Vojtěch Jarník

Sur la dérivée des fonctions d'une variable

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1923, 4 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500741

Slovutnému pánu,
p. prof. Dr. B. Bydžovskému
oddaný
29. IX. 24. V. Jarník

Sur la dérivée des fonctions d'une variable.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

On dit qu'une fonction est de la 1ère classe de Baire, si elle est la limite d'une suite de fonctions continues. Étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans $< a, b >$, ayant une dérivée $f'(x)$ en chaque point de cet intervalle, c'est un théorème presque évident et très connu, que la fonction $f'(x)$ est de la 1ère classe sur $< a, b >$.

On peut généraliser le problème comme il suit: d'une part, si l'on admet des dérivées infinies, on voit qu'une fonction peut avoir une dérivée dans un point de discontinuité; d'autre part, le domaine de définition de $f(x)$ peut être un ensemble quelconque et non un intervalle. Pour ce problème généralisé, je vais démontrer le théorème suivant:

Étant donnée une fonction $f(x)$ sur un ensemble parfait P^* qui a une dérivée $f'(x)$ en tout point de P^*, la fonction $f'(x)$ est de la 1ère classe sur P^*.

Pour démontrer ce théorème, il suffit[1]) de démontrer que la fonction $f'(x)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait P, contenu dans P^*.

J'indiquerai en grands traits la démonstration, en renvoyant pour les détails à mon mémoire original.[2])

La base de la démonstration est le théorème connu que voici: Si la fonction $f(x)$, définie sur un ensemble parfait P, est telle qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ et à chaque intervalle[3]) J, contenant une infinité de points

[1]) Voir p. ex. R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905.

[2]) „O derivaci funkcí jedné proměnné" (en tchèque), Rozpravy České Akademie, t. 32., no. 5.

[3]) Je désigne par le mot „intervalle" et par le symbole $< a, b >$ l'ensemble des points x tels que $a \leqq x \leqq b$.

de P, on peut faire correspondre un intervalle J_1, contenu dans J et contenant lui-même une infinité de points de P, tel que

ou bien l'oscillation de $f(x)$ dans $J_1 P$ est au plus égale à ε,

ou bien $f(x) \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ en tout point de $J_1 P$,

ou bien $f(x) \leqq -\frac{1}{\varepsilon}$ en tout point de $J_1 P$,

la fonction $f(x)$ est ponctuellement discontinue sur P.

Pour démontrer notre théorème, il nous suffit ainsi de démontrer l'absurdité de l'énoncé suivant:

(A) Il existe un ensemble parfait P contenu dans P^*, un nombre $\varepsilon > 0$ et un intervalle J contenant une infinité de points de P, tel que pour chaque intervalle J_1, contenu dans J et contenant une infinité de points de P,

1. l'oscillation de $f'(x)$ dans $J_1 P$ est plus grande que ε,

2. $f'(x) < \frac{1}{\varepsilon}$ pour une valeur x de $J_1 P$ au moins,

3. $f'(x) > -\frac{1}{\varepsilon}$ pour une valeur x de $J_1 P$ au moins.

Admettons la validité de l'énoncé (A), et choisissons un point x_1, point limite de P de droite, dans J; nous distinguerons trois cas:

1. si l'on a

$$|f'(x_1)| \leqq \frac{5}{\varepsilon}, \tag{1}$$

nous choisirons $x_1' > x_1$ (x_1' dans JP) tel que

$$|\psi(x_1, x_1') - f'(x_1)| < \frac{\varepsilon}{12} \tag{2}$$

$\left(\text{je pose } \psi(x, x') = \frac{f(x') - f(x)}{x - x}\right)$. Puis, dans l'intervalle $\left\langle x_1, \frac{x_1 + x_1'}{2} \right\rangle$ je prends un point η_1 de P tel que

$$|f'(\eta_1) - f'(x_1)| > \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3}$$

ce qui est possible par hypothèse; de ce côté de η_1, duquel le point η_1 est point limite de P, je prends η_1' dans P tel que

$$|\psi(\eta_1, \eta_1') - f'(\eta_1)| < \frac{\varepsilon}{12}, \tag{4}$$

si $f'(\eta_1)$ est fini, ou tel que

$$|\psi(\eta_1, \eta_1')| > \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{12}, \tag{5}$$

si $f'(\eta_1)$ est infini. Alors, d'après (1), (2), (3), (4), (5), on aura

$$|\psi(x_1, x_1')| < \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12},$$

$$|\psi(x_1, x_1') - \psi(\text{'}_1, \eta_1')| > \frac{\varepsilon}{6}.$$

2. si l'on a $f'(x_1) > \frac{5}{\varepsilon}$, nous choisirons d'une manière analogue x_1' tel que $\psi(x_1, x_1') > \frac{4}{\varepsilon}$, puis η_1 tel que $f'(\eta_1) < \frac{1}{\varepsilon}$ (ce qui est possible par hypothèse) et η_1' tel que $\psi(\eta_1, \eta_1') < \frac{2}{\varepsilon}$.

3. enfin, si l'on a $f'(x_1) < -\frac{5}{\varepsilon}$, nous choisirons, d'une manière analogue, les points x_1', η_1, η_1' tels que $\psi(x_1, x_1') < -\frac{4}{\varepsilon}$, $\psi(\eta_1, \eta_1') > -\frac{2}{\varepsilon}$.

Nous changeons encore la notation, en désignant par ζ_1 resp. ζ_1' le plus petit resp. le plus grand des nombres η_1, η_1'. Nous pouvons évidemment choisir ζ_1, ζ_1' tels que $x_1 < \zeta_1 < \zeta_1' < x_1'$, $\zeta_1' - \zeta_1 < \frac{x_1' - x_1}{2}$.

L'intervalle $< \zeta_1, \zeta_1' >$ contenant une infinité de points de P (d'après la choix de η_1'), on peut en partant de lui faire des considérations analogues comme en partant de l'intervalle J; nous obtenons ainsi quatre points x_2, x_2', ζ_2, ζ_2'. En procédant ainsi indéfinement, nous obtiendrons une suite illimitée des nombres x_i, x_i', ζ_i, ζ_i' de P, où

$$x_1 < \zeta_1 < x_2 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_2' < x_2' < \zeta_1' < x_1';$$

$$\lim_{i=\infty} (x_i' - x_i) = \lim_{i=\infty} (\zeta_i' - \zeta_i) = 0.$$

Ces points ont un point limite x, appartenant à P et tel que $x_i < x < x_i'$, $\zeta_i < x < \zeta_i'$; enfin, pour chaque valeur de i, l'un des trois systèmes suivants d'inégalités est valable:

1. $\left|\psi(x_i, x_i')\right| < \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12}$, $\left|\psi(x_i, x_i') - \psi(\zeta_i, \zeta_i')\right| > \frac{\varepsilon}{6}$;

2. $\psi(x_i, x_i') > \frac{4}{\varepsilon}$, $\psi(\zeta_i, \zeta_i') < \frac{2}{\varepsilon}$;

3. $\psi(x_i, x_i') < -\frac{4}{\varepsilon}$, $\psi(\zeta_i, \zeta_i') > -\frac{2}{\varepsilon}$.

D'après un lemme connu de Steinitz,[4]) l'existence d'une dérivée au point x a pour condition nécéssaire l'existence d'une limite commune des expressions

$$(6) \qquad \psi(x_i, x_i'), \quad \psi(\xi_i, \xi_i')$$

pour $\lim i = \infty$. Mais, d'après les inégalités ci-dessus, les expressions (6) ne peuvent pas avoir de limite commune finie ou infinie. Alors la fonction $f(x)$ ne peut pas avoir de dérivée au point x, ce qui contredit à l'hypothèse. L'absurdité de l'énoncé (A) est donc démontrée, et notre théorème est établi.

---

[4]) Steinitz, Stetigkeit und Differentialquotient, Mathem. Annalen, 1899, t. 52.