Jarník, Vojtěch: Scholarly works

Vojtěch Jarník

Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen

Fund. Math. 21 (1933), pp. 48--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500736

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen.

Von

Vojtěch Jarník (Praha).

§ 1. Resultate.

Die Arbeiten der Herren Banach, Mazurkiewicz, Saks und Steinhaus haben einen neuen Weg zur Untersuchung der Derivierten stetiger Funktionen eröffnet. Insbesondere haben die Herren Banach [1]) und Mazurkiewicz [2]) folgenden Satz bewiesen: Es sei C der Raum aller im Intervall $< 0, 1 >$ stetiger reeller Funktionen $x(t)$ (mit der üblichen Abstandsdefinition); dann gibt es in C eine Residualmenge [3]) C_1, so dass folgendes gilt: ist $x(t)$ eine Funktion aus C_1 und ist $0 \leqq t < 1$, so ist

$$\limsup_{h \to +0} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| = \infty \quad {}^{4)}.$$

Da C in sich von zweiter Kategorie ist, so ist C_1 nicht leer, also gibt es in $< 0, 1 >$ stetige Funktionen, welche für kein t $(0 \leqq t < 1)$ eine *endliche rechtsseitige* Ableitung besitzen. Auf die-

[1]) Über die Bairesche Klasse gewisser Funktionenmengen, *Studia Mathem.*, III (1931), S. 174—179.

[2]) Sur les fonctions non dérivables, *Studia Mathem.*, III (1931), S. 92—94.

[3]) Eine Menge $C_1 \subset C$ heisst eine Residualmenge in C, wenn $C - C_1$ von erster Kategorie in C ist. Alle im folgenden auftretenden Relativbegriffe, die sich auf Funktionenmengen beziehen, werden auf C als Raum bezogen. Das Wort „Funktion" bedeutet im folgenden stets eine Funktion aus C.

[4]) Herr Banach beweist dasselbe auch für den Fall, dass h nur durch eine beliebig vorgeschriebene Nullfolge $h_1, h_2, \ldots$ $(h_n > 0)$ gegen Null strebt; auf solche diskontinuierlichen Annäherungen gehen wir hier nicht ein.

selbe Weise kann man, wie Herr Saks bemerkt [5]), zeigen, dass auch diejenigen Funktionen, die in keinem Punkte t mit $0 < t < 1$ weder eine *endliche* noch *unendliche zweiseitige* Ableitung besitzen, eine Residualmenge in C bilden. Dagegen gilt der überraschende Satz [5]), dass die Funktionen, die für kein t $(0 \leqq t < 1)$ weder eine endliche noch unendliche *rechtsseitige* Ableitung besitzen, nur eine (nach Herrn Besicovitch nichtleere) Menge erster Kategorie bilden. In dieser Note möchte ich zu diesen Resultaten einige — allerdings ziemlich naheliegende — Ergänzungen hinzufügen; dabei benutze ich die Banachsche Methode.

Es gilt zunächst folgender

Satz I. *Es gibt in C eine Residualmenge A, so dass jede Funktion $x(t)$ aus A folgende Eigenschaften besitzt* [6]):

I 1) *Für jedes t aus* $(0, 1)$ *ist*

$$<x_-(t), x^-(t)> + <x_+(t), x^+(t)> = <-\infty, \infty>\ ^{7)}.$$

I 2) *Für fast alle t aus* $<0, 1>$ *ist*

$$x^+(t) = \infty,\ x_+(t) = -\infty,\ x^-(t) = \infty,\ x_-(t) = -\infty.$$

I 3) *Für jedes t mit* $0 \leqq t < 1$ *ist Max* $(|x^+(t)|, |x_+(t)|) = \infty$ *und für jedes t mit* $0 < t \leqq 1$ *ist Max* $(|x^-(t)|, |x_-(t)|) = \infty$.

I 4) *Es gibt in* $<0, 1>$ *vier nichtleere perfekte Mengen* M^+, M_+, M^-, M_-, *so dass folgendes gilt: für jedes t aus M^+ ist* $x^+(t) = x_+(t) = \infty$, *für jedes t aus M_+ ist* $x^+(t) = x_+(t) = -\infty$, *für jedes t aus M^- ist* $x^-(t) = x_-(t) = \infty$, *für jedes t aus M_- ist* $x^-(t) = x_-(t) = -\infty$ [8]).

[5]) S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fundamenta Mathem.*, 19 (1932), S. 211—219.

[6]) Mit $x^+(t), x_+(t), x^-(t), x_-(t)$ bezeichnen wir der Reihe nach die obere, untere rechtsseitige und die obere, untere linksseitige Derivierte von $x(t)$. $<a, b>$ bezeichnet das abgeschlossene Intervall (für $a = b$ den Punkt a), (a, b) das offene Intervall mit den Endpunkten a, b. μM bedeutet das Lebesguesche Mass von M.

[7]) Das bedeutet also: ist $0 < t < 1, -\infty \leqq a \leqq \infty$, so gibt es eine Folge $h_1, h_2, \ldots$ mit

$$h_n \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} h_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{x(t+h_n) - x(t)}{h_n} = a.$$

[8]) I 3 und I 4 sind nicht neu; I 3 stammt von den Herren Banach und Mazurkiewicz (l. c. 1) 2)), I 4 rührt vom Herrn Saks her (l. c. 5)).

Man kann einen Teil dieser Resultate folgendermassen verallgemeinern:

Satz II. *Es sei* $\varphi(h)$ *für alle reellen* h *definiert,* $h\varphi(h)>0$ *für* $h\neq 0$, $\lim\limits_{h=0}\varphi(h)=0$.

Dann gibt es in C *eine Residualmenge* A_1, *so dass jede Funktion* $x(t)$ *aus* A_1 *folgende Eigenschaften besitzt:*

II 1) *Für jedes* t *aus* $(0, 1)$ *ist*

$$\limsup_{h=0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\infty,\quad \liminf_{h=0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=-\infty.$$

II 2) *Für fast alle* t *aus* $\langle 0,1\rangle$ *ist*

$$\limsup_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\limsup_{h=-0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\infty,$$

$$\liminf_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\liminf_{h=-0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=-\infty.$$

II 3) *Für jedes* t *mit* $0\leqq t<1$ *ist*

$$\limsup_{h=+0}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}\right|=\infty$$

und für jedes t *mit* $0<t\leqq 1$ *ist*

$$\limsup_{h=-0}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}\right|=\infty.$$

Das ist also eine direkte Verallgemeinerung von I 2, I 3 und eines Teils von I 1 [9]). Ganz anders sieht es aber mit I 4 aus. Wenn $\limsup\limits_{h=+0}\varphi(h):h<\infty$ ist ($\varphi(h)>0$ für $h>0$), so lässt sich der „rechtsseitige" Teil des Saksschen Satzes I 4 sofort verallgemeinern; den z. B aus $\lim\limits_{h=+0}\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}=\infty$ folgt dann $\lim\limits_{h=+0}\dfrac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\infty$. Wenn aber $\limsup\limits_{h=+0}\varphi(h):h=\infty$, so gilt im Gegenteil der

Satz III. *Ist* $\varphi(h)>0$ *für* $h>0$, $\lim\limits_{h=+0}\varphi(h)=0$, $\limsup\limits_{h=+0}\varphi(h):h=$

[9]) Wie es mit dem Rest von I 1 steht, weiss ich nicht. Ich bemerke noch, dass II 3 nicht neu ist; vgl. Auerbach und Banach, Über die Höldersche Bedingung, *Studia Mathem.* 3 (1931), S. 180--184.

$=\infty$, *so gibt es in* C *eine Residualmenge* A_2, *so dass jede Funktion* $x(t)$ *aus* A_2 *folgende Eigenschaft besitzt: ist* $0 \leqq t < 1$, *so ist*

$$\limsup_{h \to +0} \frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)} \geqq 0, \quad \liminf_{h \to +0} \frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)} \leqq 0.$$

Ich bemerke noch, dass man in diesem Satz z. B. in der ersten Ungleichung die Zahl 0 durch keine positive Zahl ersetzen darf. Denn es sei $x(t)$ eine Funktion aus $A A_2$ ($A A_2$ ist auch eine Residualmenge). Nach I 2 gibt es zwei Zahlen a, b mit

$$0 \leqq a < b \leqq 1, \quad x^+(a) = x^-(b) = \infty, \quad x_+(a) = x_-(b) = -\infty.$$

Das Maximum von $x(t)$ in $\langle a, b \rangle$ wird daher in einem Punkt c mit $a < c < b$ angenommen, und es ist bestimmt

$$\limsup_{h \to +0} \frac{x(c+h) - x(c)}{\varphi(h)} \leqq 0 \quad (also = 0).$$

Wir werden nun die Sätze II, III und die Behauptung I 1 beweisen; wegen des Beweises von I 4 verweise ich auf die zitierte Abhandlung des Herrn Saks.

§ 2. Beweise.

Wir führen zunächst folgende Bezeichnung ein: es sei $r > 0$, $0 < s < \frac{1}{2}$; dann setzen wir $N = \left[\frac{1}{2s}\right]$ (also N ganz, $N > 0$) und bezeichnen mit $z_{r,s}(t)$ folgende für $0 \leqq t \leqq 1$ definierte Funktion:

$$z_{r,s}(t) = 0 \text{ für } t = 2ls \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, N)$$

$$z_{r,s}(t) = r \text{ für } t = (2l+1)s \; (l = 0, 1, 2, \ldots, N-1);$$

$$z_{r,s}(t) \text{ ist linear für } ls \leqq t \leqq (l+1)s \; (l = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1);$$

$$z_{r,s}(t) = 0 \text{ für } 2Ns \leqq t \leqq 1.$$

Es sei $\varphi(h)$ definiert für alle reellen h,

$$\varphi(h) \cdot h > 0 \text{ für } h \neq 0, \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

Es sei T die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 < t < 1$, so dass

$$\limsup_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)} < \infty$$

ist. Es sei U die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t < 1$, so dass

$$\limsup_{h \to +0} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \right| < \infty$$

ist. Es sei V die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Ist $E(x(t))$ die Menge derjenigen t mit $0 \leqq t < 1$, für welche

$$\limsup_{h \to +0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} < \infty$$

ist, so ist *nicht* $\mu E(x(t)) = 0$. Es sei endlich W die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t < 1$, so dass

$$\limsup_{h \to +0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} < 0$$

ist. Die Sätze II, III werden bewiesen sein, wenn wir beweisen: die Mengen T, U, V sind von erster Kategorie in C; und wenn

$$\limsup_{h \to +0} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty$$

ist, so ist auch W von erster Kategorie in C [10]).

Ad T. Für ganzes $n > 2$ sei T_n die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt mindestens ein t mit $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für alle h mit $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$ die Ungleichung gilt

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \leqq n.$$

Offenbar ist T_n abgeschlossen, $T = \Sigma T_n$. Es genügt also zu zeigen: T_n ist nirgends dicht, oder (weil T_n abgeschlossen): jede offene Kugel K des Raumes C enthält (bei beliebig vorgegebenem n) ein $x(t)$, welches nicht zu T_n gehört.

[10]) Aus Symmetriegründen dürfen wir uns z. B. bei dem Beweis von II 2 auf die Betrachtung von $\limsup\limits_{h \to +0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}$ beschränken; und analog in den übrigen Fällen.

Beweis. Es sei (hier und auch stets im folgenden) $\psi(k) =$ obere Grenze von $\varphi(h)$ für $0 < |h| \leqq k$, wenn $k > 0$. In K gibt es ein Polynom $w(t)$ und es gibt also ein $r > 0$, so dass jede Funktion $w(t) + z(t)$ mit

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq 1} |z(t)| \leqq r$$

in K liegt. Weiter gibt es ein $p > 0$, so dass

$$\left| \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \right| < p$$

gilt für alle t, h mit $h \neq 0$, $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq t + h \leqq 1$. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2}, \quad 4s < \frac{1}{n}, \; 2ps < \frac{r}{4}, \; \frac{r}{4\,\psi(2s)} > n$$

(das geht wegen $\lim\limits_{k \to +0} \psi(k) = 0$);

dann konstruieren wir die Funktion $z_{r,s}(t)$. Es sei $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$; wenn $z_{r,s}(t) \leqq \frac{r}{2}$ ist, so wählen wir ein h so, dass $0 < h \leqq 2s$, $z_{r,s}(t+h) = r$; wenn aber $z_{r,s}(t) > \frac{r}{2}$ ist, so wählen wir ein h so, dass $0 > h \geqq -2s$, $z_{r,s}(t+h) = 0$. In beiden Fällen ist $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$ und

$$\frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} \geqq \frac{1}{|\varphi(h)|} \left(\frac{r}{2} - p\,|h| \right) >$$

$$> \frac{r}{4\,\psi(2s)} > n.$$

Also gehört $w(t) + z_{r,s}(t)$ zu K, nicht aber zu T_n, w. z. b. w.

Ad U. Für ganzes $n > 2$ sei U_n die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für alle h mit $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ die Ungleichung

$$\left| \frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)} \right| \leqq n$$

gilt. Offenbar ist U_n abgeschlossen, $U=\sum_{n=3}^{\infty} U_n$. Es genügt also zu zeigen: Jede Kugel K des Raumes C enthält ein $x(t)$, welches nicht zu U_n gehört.

Beweis. $w(t)$, r, p mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2},\quad 4s < \frac{1}{n},\quad 2ps < \frac{r}{4},\quad \frac{r}{4\psi(2s)} > n;$$

dann gehört $w(t)+z_{r,s}(t)$ zwar zu K, nicht aber zu U_n. Denn, wenn $0 \leqq t \leqq 1-\frac{1}{n}$ ist, so gibt es sicher ein h mit $0 < h \leqq 2s$, $|z_{r,s}(t+h)-z_{r,s}(t)| \geqq \frac{r}{2}$. Dann ist aber $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ und

$$\left|\frac{w(t+h)+z_{r,s}(t+h)-w(t)-z_{r,s}(t)}{\varphi(h)}\right| \geqq \frac{1}{\psi(2s)}\left(\frac{r}{2}-ph\right)$$

$$> \frac{r}{4\psi(2s)} > n, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ad V. Wenn $x(t)$ eine Funktion aus C ist, so sei $E(x(t))$ die Menge derjenigen t mit $0 \leqq t < 1$, für welche

$$\limsup_{h \to +0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} < \infty;$$

für ganzes $n>2$ sei $E_n(x(t))$ die Menge derjenigen t mit $0 \leqq t \leqq 1-\frac{1}{n}$, für welche gilt: für jedes h mit $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ ist

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \leqq n.$$

Offenbar ist $E(x(t))=\sum_{n=3}^{\infty} E_n(x(t))$. Also: dann und nur dann ist $\mu E(x(t)) > 0$, wenn es ein ganzes $n>2$ und ein ganzes $k>0$ gibt, so dass $\mu E_n(x(t)) \geqq \frac{1}{k}$ ist. Es sei $V_{n,k}$ die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, für welche $\mu E_n(x(t)) \geqq \frac{1}{k}$ ist. Dann ist

$V = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_{n,k}$ und $V_{n,k}$ ist abgeschlossen [11]). Daher genügt es wieder zu zeigen: Jede Kugel K des Raumes C enthält ein $x(t)$, welches nicht zu $V_{n,k}$ gehört.

Beweis. $w(t), r, p$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2}, \quad 4s < \frac{1}{n}, \quad 2ps < \frac{r}{4k}, \quad \frac{r}{4k\psi(2s)} > n.$$

Wir konstruieren dann die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$. Ist $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$ und ist $z_{r,s}(t) < r\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$, so können wir ein h mit $0 < h \leqq 2s$, $z_{r,s}(t+h) = r$ wählen und dann ist $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ und

$$\frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} \geqq \frac{1}{\varphi(h)}\left(\frac{r}{2k} - ph\right)$$

$$> \frac{1}{\psi(2s)} \cdot \frac{r}{4k} > n;$$

also gehört t nicht zu $E_n(w(t) + z_{r,s}(t))$. Die Menge derjenigen t, für welche $z_{r,s}(t) \geqq r\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ ist, hat aber offenbar höchstens das Mass $\frac{1}{2k}$. Also ist $\mu E_n(w(t) + z_{r,s}(t)) \leqq \frac{1}{2k}$; die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ gehört also zwar zu K, nicht aber zu $V_{n,k}$, w. z. b. w.

Ad W. Für ganzes $n > 2$ sei W_n die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für jedes h mit $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ die Ungleichung

[11]) Das zeigt man so: es sei $x_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ eine für $0 \leqq t \leqq 1$ gleichmässig konvergente Folge von Funktionen aus $V_{n,k}$; es sei $x(t) = \lim_{m=\infty} x_m(t)$. Wenn ein t für unendlich viele Werte von m zu $E_n(x_m(t))$ gehört, so gehört t offenbar auch zu $E_n(x(t))$. Also ist $E_n(x(t)) \supset \overline{\mathrm{Lim}}_{m}\, E_n(x_m(t))$, also ist $\mu E_n(x(t)) \geqq \limsup \mu E_n(x_m(t)) \geqq \frac{1}{k}$, also gehört auch $x(t)$ zu $V_{n,k}$, w. z. b. w.

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \leqq -\frac{1}{n}$$

gilt. Offenbar ist W_n abgeschlossen, $W = \sum_{n=3}^{\infty} W_n$. Es genügt also zu zeigen: Ist

$$\limsup_{h=+0} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty,$$

so enthält jede Kugel K des Raumes C ein $x(t)$, welches nicht zu W_n gehört.

Beweis. $w(t), r, p$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2}, 4s < \frac{1}{n}, \frac{\varphi(2s)}{2s} > np.$$

Wir konstruieren dann die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$. Es sei $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$; wird $h = 2s$ gewählt, so ist $0 < h \leqq \frac{1}{n}$, $z_{r,s}(t) = z_{r,s}(t+h)$, also

$$\frac{w(t+h)+z_{r,s}(t+h)-w(t)-z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} = \frac{w(t+2s)-w(t)}{2s} \cdot \frac{2s}{\varphi(2s)} > -\frac{1}{n}.$$

Die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ gehört also zu K, nicht aber zu W_n, w. z. b. w.

Damit sind die Sätze II, III bewiesen. Wir sollen noch die Behauptung I 1 beweisen. Es sei also S die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: es gibt mindestens ein t mit $0 < t < 1$ und mindestens ein a mit $-\infty \leqq a \leqq \infty$, so dass es keine Folge $h_1, h_2, \ldots$ mit

$$h_n \neq 0, \lim_{n=\infty} h_n = 0, \lim_{n=\infty} \frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n} = a$$

gibt; und wir sollen zeigen: S ist von erster Kategorie in C. Es sei n ganz, $n > 2$, α rational, β rational, $\alpha < \beta$; dann bezeichnen wir mit $S_{n,\alpha,\beta}$ die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für jedes h mit $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$ mindestens eine (also genau eine) von den beiden Ungleichungen

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \leqq \alpha, \quad \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \geqq \beta$$

gilt. Offenbar ist $S_{n,\alpha,\beta}$ abgeschlossen,

$$S = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\alpha \text{ rational}} \sum_{\substack{\beta \text{ rational} \\ \beta < \alpha}} S_{n,\alpha,\beta}.$$

Es genügt also zu zeigen: Jede Kugel K des Raumes C enthält (für gegebene n, α, β) mindestens ein $x(t)$, welches nicht zu $S_{n,\alpha,\beta}$ gehört.

Beweis. In K liegt ein Polynom $w(t)$; es gibt ein $r > 0$, so dass jede Funktion $w(t) + z(t)$ mit

$$\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |z(t)| \leqq r$$

zu K gehört. Weiter sei

$$\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |w'(t)| = q.$$

Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

1.) $$0 < s < \frac{1}{2}, \quad 4s < \frac{1}{n}, \quad \frac{r}{4s} > q + \left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right|;$$

2.) für alle t, h mit $0 \leqq t \leqq 1$, $0 < |h| \leqq 2s$ ist

$$\left| \frac{w(t+h) - w(t)}{h} - w'(t) \right| < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Wir konstruieren die Funktion $z_{r,s}(t)$. Es sei $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$. Wenn h das Intervall $0 < h \leqq 2s$ durchläuft, so durchläuft $z_{r,s}(t + h) - z_{r,s}(t)$ genau das Intervall $< -z_{r,s}(t),\ r - z_{r,s}(t) >$; also durchläuft

$$\frac{z_{r,s}(t+h) - z_{r,s}(t)}{h} \tag{1}$$

mindestens alle Zahlen des Intervalls

$$\left\langle -\frac{z_{r,s}(t)}{2s}, \frac{r - z_{r,s}(t)}{2s} \right\rangle.$$

Ebenso: wenn h das Intervall $0 > h \geqq -2s$ durchläuft, so durchläuft (1) mindestens alle Zahlen des Intervalls

$$\left\langle -\frac{r - z_{r,s}(t)}{2s}, \frac{z_{r,s}(t)}{2s} \right\rangle.$$

Beachten wir, dass $\operatorname{Max}(z_{r,s}(t), r - z_{r,s}(t)) \geqq \frac{r}{2}$ ist, so folgt: wenn h alle Werte mit $0 < |h| \leqq 2s$ durchläuft, so durchläuft (1) sicher alle Werte des Intervalls $\left\langle -\frac{r}{4s}, \frac{r}{4s} \right\rangle$, also umsomehr alle Werte des Intervalls

$$\left\langle -q - \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|, q + \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \right\rangle.$$

Es gibt also sicher ein h mit $0 < |h| \leqq 2s$ (also $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$), für welches

$$\frac{z_{r,s}(t+h) - z_{r,s}(t)}{h} = -w'(t) + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist. Für dieses h ist aber

$$\left| \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{h} - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| < \frac{\beta-\alpha}{2},$$

also

$$\alpha < \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{h} < \beta.$$

Die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ liegt daher in K, nicht aber in $S_{n,\alpha,\beta}$, w. z. b. w.