Vojtěch Jarník
Quelques remarques sur la mesure de M. Hausdorff

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1930, 6 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500724

Quelques remarques sur la mesure de M. Hausdorff.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 7 février 1930.

I. Cette note contient quelques remarques simples sur la notion de mesure de M. Hausdorff.[1]) Nous ne considérons que des ensembles linéaires de points et nous allons nous appuyer sur la 2ème définition du mémoire cité de M. Hausdorff[2]) (spécialisée pour les ensembles linéaires):

Soit A un ensemble linéaire de points; soit $\lambda(x)$ une fonction croissante et continue pour $x > 0$, satisfaisant à la relation $\lim_{x=0} \lambda(x) = 0$ (toute fonction, jouissant de ces propriétés, sera appelée „fonction admissible.") Soit $\rho > 0$; soit $J_1, J_2, \ldots$ un ensemble au plus dénombrable d'intervalles qui recouvrent, dans leur totalité, l'ensemble A; soit l_n la longueur de J_n; soit $l_n < \rho$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Nous formons la somme $\sum_n \lambda(l_n)$; tout ensemble au plus dénombrable d'intervalles, dont les longueurs sont $< \rho$, recouvrant l'ensemble A, donne naissance à une valeur déterminée de la somme $\sum_n \lambda(l_n)$; la borne inférieure de ces valeurs de $\sum_n \lambda(l_n)$ soit désignée par $L_\varrho[A; \lambda(x)]$. Soit enfin

$$L[A; \lambda(x)] = \lim_{\varrho=0} L_\varrho[A; \lambda(x)]$$

(l'existence de cette limite, qui est $\geqq 0$ et $\leqq +\infty$, est évidente).

La fonction d'ensemble $L[A; \lambda(x)]$ est une „mesure extérieure" d'après M. Carathéodory.[3])

[1]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, Math. Annalen 79 (1919), p. 157—179.

[2]) Loc. cit. [1]), p. 166.

[3]) C. Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen, Göttinger Nachrichten 1914, p. 404—426.

II. Si A est un ensemble au plus dénombrable, on a $L[A; \lambda(x)] = 0$ pour toute fonction admissible $\lambda(x)$. D'autre part, nous allons démontrer:

Si A est un ensemble linéaire parfait, il existe une fonction admissible $\lambda(x)$ telle que

$$L[A; \lambda(x)] > 0.$$

Remarque. L'assertion de ce théorème reste évidemment vraie si l'ensemble linéarie A n'est pas parfait lui-même, mais s'il contient un ensemble parfait.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, nous allons supposer que A est borné et non dense (car, si l'ensemble A contient tous les points d'un intervalle, la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire le nombre $L(A; x)$ — en est positive). Soit a la borne inférieure, b la borne supérieure de A. Soit M un ensemble parfait, linéaire et non dense, dont la borne inférieure resp. supérieure est égale à 0 resp. à 1 et dont la mesure de Lebesgue est positive, par exemple égale à $\frac{1}{2}$. On peut, comme il est bien connu, trouver une fonction $f(x)$ continue et croissante dans $< a, b >$, telle que $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ et telle que $f(x)$ appartient à M, si x appartient à A et dans ce cas seulement. Soit

$$\lambda(x) = \frac{x}{b-a} \text{ pour } x \geqq b - a,$$

$$\lambda(x) = \max_{a \leqq y \leqq b} \frac{[f(y+x) - f(y)]}{x} \text{ pour } 0 < x < b - a.$$

Évidemment, $\lambda(x)$ est une fonction admissible. Si les intervalles

$$< a_1, b_1 >, < a_2, b_2 >, \ldots \qquad (a \leqq a_n < b_n \leqq b)$$

recouvrent l'ensemble A, les intervalles

$$< f(a_1), f(b_1) >, < f(a_2), f(b_2) >, \ldots$$

recouvrent l'ensemble M, alors on a, en conséquence de $L(M, x) = \frac{1}{2}$,

$$\sum_n \lambda(b_n - a_n) \geqq \sum_n [f(b_n) - f(a_n)] \geqq \frac{1}{2}, \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque. Le théorème démontré peut être étendu aux ensembles non linéaires. Soit par exemple A un ensemble borné et parfait dans un plan; soient u, v deux axes rectangulaires dans ce plan. Soient A_u, A_v les projections de A sur ces axes; A_u, A_v sont deux ensembles fermés dont l'un au moins, par exemple A_u, n'est pas dénombrable. A_u contient alors un ensemble parfait. Alors on peut trouver une fonction admissible $\lambda(x)$ telle que l'on ait $L[A_u; \lambda(x)] > 0$. Pour les ensembles plans, la définition du nombre $L[A; \lambda(x)]$ est complètement analogue à celle pour les ensembles linéaires; seulement, au lieu de recouvrir l'ensemble A à l'aide d'intervalles, on doit recouvrir A à l'aide de cercles $K_1, K_2, \ldots$ et on doit former la somme $\sum_n \lambda(l_n)$, où l_n est le diamètre de K_n. Si les cercles

$K_1, K_2, \ldots$ recouvrent A, leurs projections sur u recouvrent A_u; mais la projection du cercle K_n étant un intervalle de longueur l_n, on a

$$L\,[A\,;\,\lambda\,(x)] \geqq L\,[A_u\,;\,\lambda\,(x)] > 0, \quad c.\ q.\ f.\ d.$$

III. Si A est un ensemble linéaire tel que $\overset{*}{L}\,(A\,;\,x) > 0$, on a évidemment $L\,[A\,;\,\lambda\,(x)] = \infty$ pour toute fonction admissible $\lambda\,(x)$, pour laquelle $\lim\limits_{x=0} \frac{\lambda\,(x)}{x} = \infty$. Inversement:

Soit A un ensemble linéaire; soit $L\,(A\,;\,x) = 0$; alors on peut trouver une fonction admissible $\lambda\,(x)$ telle que

$$\lim_{x=0} \frac{\lambda\,(x)}{x} = +\infty\,, \quad L\,[A\,;\,\lambda\,(x)] < \infty\,.$$

Démonstration. Nous allons définir une suite $c_1, c_2, \ldots$ de nombres positifs ($\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$) de la manière suivante:

Soit $l_{1,1}, l_{2,1}, \ldots, l_{k,1}, \ldots$ une suite d'intervalles recouvrant l'ensemble A et telle que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_{k,1} < \frac{1}{1^3}$ (nous désignons dans cette démonstration l'intervalle et sa longueur par la même lettre). Nous introduisons le symbole suivant: si $\varepsilon > 0$, nous désignons par $\sum\limits_{(\varepsilon)} l_{k,1}$ la somme de ceux des nombres $l_{k,1}$ qui sont plus petits que ε. D'une manière analogue on va interpréter, dans la suite, les symboles $\sum\limits_{(\varepsilon)} l_{k,2}, \sum\limits_{(\varepsilon)} l_{k,3} \ldots$ Choisissons un nombre c_1 $(0 < c_1 < 1)$ tel que $\sum\limits_{(c_1)} l_{k,1} < \frac{1}{2^3}$.

Soit $n > 1$; supposons les nombres positifs $c_i, l_{k,i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$; $k = 1, 2, \ldots$) déjà choisis de telle manière que

$$c_i < \frac{c_{i-1}}{10}\,, \quad l_{k,i} < \frac{c_{i-1}}{10} \quad (2 \leqq i \leqq n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_{k,i} < \frac{1}{i^3}\,, \quad \sum_{(c_i)} l_{k,j} < \frac{1}{(i+1)^3} \quad (1 \leqq j \leqq i \leqq n-1).$$

Alors, on peut choisir une suite d'intervalles $l_{1,n}, l_{2,n}, \ldots, l_{k,n}, \ldots$, recouvrant l'ensemble A et telle que

$$l_{k,n} < \frac{c_{n-1}}{10}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} l_{k,n} < \frac{1}{n^3}\,.$$

Puis, on peut choisir un nombre c_n tel que

$$0 < c_n < \frac{c_{n-1}}{10}\,, \quad \sum_{(c_n)}^{\infty} l_{k,j} < \frac{1}{(n+1)^3} \quad \text{pour } 1 \leqq j \leqq n.$$

Nous définissons une fonction $\lambda(x)$ comme il suit:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x) &= x \quad \text{pour } x \geqq c_1, \\ \lambda(x) &= nx \quad \text{pour } c_n \leqq x \leqq \frac{c_{n-1}}{10} \ (n > 1), \\ \lambda(x) &= \text{fonction linéaire pour } \frac{c_n}{10} \leqq x \leqq c_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Alors $\lambda(x)$ est défini, continu et positif pour $x > 0$. Parce que $\lambda\left(\frac{c_n}{10}\right) = (n+1)\frac{c_n}{10} < n\,c_n = \lambda(c_n)$, la fonction $\lambda(x)$ est, de plus, croissante. Le quotient $\frac{\lambda(x)}{x}$ est égal à $n-1$ pour $x = c_{n-1}$ et à n pour $x = \frac{c_{n-1}}{10}$; alors, d'après (1), on a $n-1 \leqq \frac{\lambda(x)}{x} \leqq n$ pour $c_n \leqq x \leqq c_{n-1}$. Alors on a $\lim\limits_{x=0} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x=0} \lambda(x) = 0$ (car $0 < c_n < 10^{-n+1}$). D'autre part, on a, pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(l_{k,n}) \leqq n \sum_{k=1}^{\infty} l_{k,n} + (n+1) \sum_{(c_n)} l_{k,n} + (n+2) \sum_{(c_{n+1})} l_{k,n} + (n+3) \sum_{(c_{n+2})} l_{k,n} + \ldots,$$

$$< \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots; \ l_{k,n} < 10^{-n+1};$$

$$\text{d'où } \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(l_{k,n}) = 0, \ L\,[A;\lambda(x)] = 0.$$

IV. Il existe un ensemble linéaire borné et parfait M tel que la relation

$$0 < L\,[M;\lambda(x)] < +\infty$$

n'est satisfaite pour aucune fonction admissible $\lambda(x)$.

Démonstration. Soit P l'ensemble parfait bien connu de Cantor, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots$ (a_n égal à 0 ou à 2). P consiste évidemment de deux parties congruentes, contenues resp. dans les intervalles $< 0, \frac{1}{3} >$, $< \frac{2}{3}, 1 >$. D'une façon générale, soit P_n la partie de P, contenue dans $< 0, 3^{-n} >$; alors P consiste de 2^n parties cogruentes à P_n. Évidemment, entre les intervalles contigus de P, il en existe exactement 2^{n-1} dont la longueur soit égale à 3^{-n}. Soient $< a_{n,1}, b_{n,1} >$, $< a_{n,2}, b_{n,2} >$ ... ces intervalles; soit $P_{n,i}$ l'ensemble provenant de P_n par une translation à droite de grandeur $a_{n,i}$. Soit

$$M = P + P_{1,1} + \sum_{i=1}^{2} P_{2,i} + \sum_{i=1}^{2^2} P_{3,i} + \ldots$$

Soit $\lambda(x)$ une fonction admissible, $L[P;\ \lambda(x)] = \alpha$, $L[M;\ \lambda(x)] = \beta$; alors $L[P_{n,i};\ \lambda(x)] = 2^{-n}\alpha$; $\beta = \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\,\alpha}{2^2} + \frac{2^2\,\alpha}{2^3} + \ldots$
Alors, si $\alpha = 0$, on a $\beta = 0$; si $\alpha > 0$, on a $\beta = +\infty$; *c. q. f. d.*

V. Un phénomène analogue se présente pour quelques ensembles de points qui se rattachent à la question de l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels. Dans mon mémoire „Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass," [4]) j'ai démontré le théorème suivant: Soit $\alpha > 2$; soit M_α l'ensemble des nombres Θ de l'intervalle $<0,\ 1>$, pour lesquels l'inégalité

$$\left|\Theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^\alpha}$$

a une infinité de solutions en nombres entiers p, q. Alors on a

$$L\ (M_\alpha;\ x^s) = 0 \text{ pour } s > \frac{2}{\alpha}\ ,$$

$$L\ (M_\alpha;\ x^s) = +\infty \text{ pour } 0 < s < \frac{2}{\alpha}\ .$$

Soit maintenant N_α $(\alpha > 2)$ l'ensemble des nombres Θ de l'intervalle $< 0,\ 1 >$ qui jouissent de la propriété suivante:

Il existe une suite p_1, q_1; p_2, q_2; ... de couples de nombres entiers telle que

$$\lim_{n=\infty} q_n = +\infty, \qquad \Theta - \frac{p_n}{q_n} = O\left(\frac{1}{q_n^\alpha}\right).$$

Evidemment, on a $M_\alpha \subset N_\alpha \subset M_{\alpha'}$ pour $2 < \alpha' < \alpha$; alors, en conséquence du théorème cité ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} L\ (N_\alpha;\ x^s) &= 0 \text{ pour } s > \frac{2}{\alpha}\ , \\ L\ (N_\alpha;\ x^s) &= +\infty \text{ pour } 0 < s < \frac{2}{\alpha}\ . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nous allons démontrer:

Soit $\alpha > 2$; alors il n'existe aucune fonction admissible $\lambda(x)$ pour laquelle on aurait

$$0 < L\,[N_\alpha;\ \lambda(x)] < +\infty.$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit a un nombre rationnel; si Θ appartient à N_α et que $0 \leq a + \Theta \leq 1$, le nombre $a + \Theta$, lui aussi, appartient à N_α. Soit $a = \frac{k}{l}$, $b = \frac{k+1}{l}$ $(0 \leq k < l,\ k,\ l$ nombres entiers). Alors, si $N_{a,b}$ signifie la partie de N_α contenue dans $< a,\ b >$, on a, $\lambda(x)$ étant une fonction admissible,

$$L\,[N_{a,b};\ \lambda(x)] = \frac{1}{l}\,L\,[N_\alpha;\ \lambda(x)] = (b-a)\,L\,[N_\alpha;\ \lambda(x)]. \tag{3}$$

[4]) Recueil mathém. de la Société math. de Moscou (sous presse).

D'après (2), on a $L(N_\alpha; x) = 0$; on peut alors trouver une suite d'intervalles fermés $< a_1, b_1 >, < a_2, b_2 >, \ldots$ $(0 \leq a_n < b_n \leq 1)$ recouvrant l'ensemble N_α et telle que $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \frac{1}{2}$; évidemment, nous pouvons, de plus, supposer que

$$a_n = \frac{k_n}{l_n}, \; b_n = \frac{k_n + 1}{l_n} \quad (0 \leq k_n < l_n, \; k_n, l_n \text{ entiers}).$$

Alors on a, d'après (3),

$$L[N_\alpha; \lambda(x)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} L[N_{a_n, b_n}; \lambda(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) L[N_\alpha; \lambda(x)] \leq \frac{1}{2} L[N_\alpha; \lambda(x)]$$

— relation qui ne peut pas être vérifiée, si $0 < L[N_\alpha; \lambda(x)] < +\infty$.