Vojtěch Jarník
Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen

Práce Mat.-Fiz. 36 (1928-29), pp. 91–106

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500717

Panu prof. Dru K. Petrovi v dokonalé úctě autor.

VOJTECH JARNÍK.

# Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen.

## Przyczynek do metrycznej teorji przybliżeń diofantowych.

Es sei $0 \leqq \Theta \leqq 1$; dann besitzt bekanntlich die Ungleichung

$$\left| \Theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $a, b$. In dieser Ungleichung darf die Zahl $\sqrt{5}$ durch keine grössere Zahl ersetzt werden [1]); andererseits gibt es irrationale Zahlen $\Theta$, die sich „beliebig gut" durch rationale Zahlen approximieren lassen [2]). Dieser Umstand führt zu folgender Fragestellung.

Es sei $f(x)$ eine für $x > 0$ stetige und positive Funktion; $x^2 f(x)$ sei für $x > 0$ abnehmend. Wir wollen sagen, dass eine Zahl $\Theta$ mit $0 \leqq \Theta \leqq 1$ „die Approximation $f(x)$ gestattet" (oder auch, dass die Approximation $f(x)$ durch die Zahl $\Theta$ realisiert wird), wenn die Ungleichung

$$\left| \Theta - \frac{a}{b} \right| < f(b)$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $a, b$ besitzt. Wir fragen nun: wie gross ist das Lebesguesche Mass der Menge derjenigen Zahlen $\Theta$ $(0 \leqq \Theta \leqq 1)$, welche die Approximation $f(x)$ gestatten? Diese Frage

[1]) Wegen der Sätze über Kettenbrüche, die im folgenden angewandt werden, vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin, 1913), insbes. S. 37 — 55.

[2]) Man denke nur an eine Irrationalzahl, in deren Dezimalentwickelung „sehr lange" Reihen von Nullen vorkommen.

wurde vom Herrn Khintchine folgendermassen beantwortet [1]): Dieses Mass ist gleich 0, wenn $\int^{+\infty} x f(x)\, dx$ konvergiert und dieses Mass ist gleich 1, wenn $\int^{+\infty} x f(x)\, dx$ divergiert.

Es werde nun für $\alpha > 2$ mit $P_\alpha$ die Menge derjenigen Zahlen $\Theta$ mit $0 \leqq \Theta \leqq 1$ bezeichnet, welche die Approximation $\frac{1}{x^\alpha}$ gestatten; nach dem Satze des Herrn Khintchine ist das Mass von $P_\alpha$ gleich 0. Trotzdem kann man die Mengen $P_\alpha$, die zu verschiedenen Werten von $\alpha$ gehören, in bezug auf ihre „Ausdehnung" untereinander unterscheiden, wenn man statt des Lebesgueschen Masses den Hausdorffschen Mass—und Dimensionsbegriff einführt [2]).

Diese Hausdorffsche Dimension kann folgendermassen eingeführt werden:

Es sei eine reelle Zahl $s$ gegeben; es sei $E$ eine Menge von reellen Zahlen; wir überdecken $E$ mit höchstens abzählbar vielen Intervallen, deren Längen mit $l_1, l_2, \ldots$ bezeichnet werden mögen und bilden die Summe $\sum_i l_i^s$ (diese Summe möge $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum_i l_i^s$ divergiert). Wenn $\rho > 0$, so sei $L_{s,\rho}(E)$ die untere Grenze aller solchen Summen $\sum_i l_i^s$, gebildet für alle solchen Überdeckungen der Menge $E$, für welche $l_1 \leqq \rho$, $l_2 \leqq \rho$, $l_3 \leqq \rho, \ldots$. Wenn $\rho$ abnimmt, so nimmt $L_{s,\rho}(E)$ offenbar nicht ab, also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\rho=0} L_{s,\rho}(E) = L_s(E) \quad (0 \leqq L_s(E) \leqq +\infty).$$

(Für $s = 1$ ist $L_{s,\rho}(E)$ offenbar von $\rho$ unabhängig und gleich dem äusseren Lebesgueschen Mass von $E$.) Für $s < s'$ ist $L_{s',\rho}(E) \leqq \rho^{s'-s} L_{s,\rho}(E)$; aus $L_s(E) < +\infty$ folgt also $L_{s'}(E) = 0$. Weiter ist offenbar $L_s(E) = 0$ für $s > 1$ (man denke sich z. B. die ganze reelle Zahlenachse durch abzählbar viele Intervalle überdeckt, deren Längen $l_1, l_2, \ldots$ durch $l_i = \frac{\rho}{i}$ gegeben sind); für $s < 0$ ist offenbar $L_s(E) = +\infty$, wenn $E$ nicht leer ist.

[1]) Einige Sätze über Kettenbrüche usw., Mathem. Annalen 92 (1924), S. 115—125.

[2]) F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Mathematische Annalen 79 (1919), S. 157—179. Der Leser braucht von der Hausdorffschen Theorie nichts zu kennen.

Also gibt es — falls $E$ nicht leer ist — eine Zahl $\sigma$, so dass $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $L_s(E) = 0$ für $s > \sigma$, $L_s(E) = \infty$ für $s < \sigma$. Diese Zahl $\sigma$ heisse die Hausdorffsche Dimension der Menge $E$, in Zeichen

$$\dim E = \sigma.$$

Nach dem Gesagten ist folgendes klar:

1. Bei der Definition von $L_{s,\rho}(E)$, $L_s(E)$, $\dim E$ ist es gleichgültig, ob wir bei der Überdeckung von $E$ nur offene oder nur abgeschlossene Intervalle oder beides zugleich zulassen.

2. Aus $E \subset E'$ folgt $\dim E \leqq \dim E'$.

3. Wenn $D$ eine höchstens abzählbare Menge von reellen Zahlen ist, so ist

$$\dim (E + D) = \dim E$$

(wenn wir, wie immer, $E$ als nichtleer voraussetzen).

Nach diesen Vorbereitungen ist schon dem Leser der Sinn des folgenden Satzes klar: Für $\alpha > 2$ ist [1])

$$\dim P_\alpha = \frac{2}{\alpha}.$$

Bei diesem Satz handelte es sich um die Approximation $\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 2)$, welche nur auf einer Menge vom Lebesgueschen Mass Null realisiert wird; wir wollen uns nun solchen Approximationen $f(x)$ zuwenden, die im Gegenteil für *alle* $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Mass Null realisiert werden; dies ist z. B. für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \max (1, \log^\alpha x)}$$

$(0 < \alpha \leqq 1)$ der Fall (denn das Integral

$$\int^{+\infty} x f(x)\, dx$$

divergiert für $0 < \alpha \leqq 1$; für $\alpha > 1$ konvergiert aber schon das Integral). Hier hat freilich die Menge der Zahlen $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, welche die Approximation $f(x)$ gestatten, das Lebesguesche Mass 1, also umsomehr die Dimension 1. Man muss hier also die Menge $Q_\alpha$ derjenigen Zahlen $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ untersuchen, welche die Approximation

---

[1]) Dieser Satz wird in meiner Abhandlung „Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass" (im Druck in Recueil mathématique de la Société mathématique de Moscou) bewiesen.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \max(1, \log^\alpha x)} \quad (0 < \alpha \leqq 1)$$

*nicht* gestatten; die Dimension von $Q_\alpha$ ist aber keine wachsende Funktion von $\alpha$, wie man vielleicht vermuten könnte, sondern es gilt der

**Satz 1.** dim $Q_\alpha = 1$ für $0 < \alpha \leqq 1$.

Diesen Satz und noch viel mehr wollen wir in dieser Note beweisen. Es sei $M_\infty$ die Menge derjenigen Zahlen $\theta$ mit $0 \leqq \theta \leqq 1$, welche folgende Eigenschaft haben: zu $\theta$ gibt es eine nur von $\theta$ abhängige positive Zahl $c(\theta)$, so dass für alle ganzen $p$, $q$ mit $q > 0$ die Ungleichung

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{c(\theta)}{q^2}$$

gilt. Offenbar ist $M_\infty \subset Q_\alpha$ für $0 < \alpha \leqq 1$; der Satz 1. wird also bewiesen sein, wenn wir folgenden Satz beweisen:

**Satz 2.** dim $M_\infty = 1$.

Wir wollen aber noch mehr beweisen. Bekanntlich lassen sich alle Irrationalzahlen $\theta$ mit $0 < \theta < 1$ und alle Folgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ($a_i$ ganz und positiv für $i = 1, 2, \ldots$) eineindeutig so zuordnen, dass für die Zahl $\theta$ und die ihr zugeordnete Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Beziehung

$$(1) \qquad \theta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

gilt. $a_n$ heisse der $n$ — te Teilnenner von $\theta$; wenn

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{p_n}{q_n},$$

wo $n \geqq 1$, $q_n > 0$, $(p_n, q_n) = 1$, so heisse $p_n$ der $n$ — te Näherungszähler, $q_n$ der $n$ — te Näherungsnenner von $\theta$; um grössere Gleichförmigkeit zu erreichen, erweitern wir diese Ausdrucksweise auch auf die Fälle $n = -1$ und $n = 0$, indem wir $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ setzen.

Wenn $n$ ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben sind, so haben alle Irrationalzahlen $\theta$ $(0 < \theta < 1)$, deren regulärer Kettenbruch mit

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

anfängt, dieselben Näherungszähler $p_i$ und dieselben Näherungsnenner $q_i$ für $-1 \leqq i \leqq n$; wir wollen diese Zahlen als die $i$ — ten zu den Teilnennern $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehörigen Näherungszähler und Näherungsnenner bezeichnen; und wir benutzen diese Ausdrucksweise auch für $n=0$ [1]).

Aus (1) folgt bekanntlich

(2) $$\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1}\, p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1} \end{cases} \qquad (n \geqq 0),$$

(3) $$p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = (-1)^n \qquad (n \geqq -1),$$

$$\frac{1}{q_n\,(q_{n+1}+q_n)} < \left|\,\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n\, q_{n+1}} \qquad (n \geqq 0),$$

also

(4) $$\frac{1}{(a_{n+1}+2)\, q_n^2} < \left|\,\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}\, q_n^2}.$$

Ausserdem ist bekannt: aus

$$\left|\,\theta - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2\, s^2},\ r \text{ ganz},\ s \text{ ganz}$$

folgt $\frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n}$ für ein geeignetes $n$.

Man sieht also, dass die reguläre Kettenbruchentwickelung einer Irrationalzahl $\theta$ einen sehr guten Aufschluss gibt über die Annäherungsmöglichkeiten der Zahl $\theta$ durch rationale Zahlen. Insbesondere ist $M_\infty$ genau die Menge aller Irrationalzahlen $\theta$ mit $0 < \theta < 1$ und mit beschränkten Teilnennern.

Wir wollen ausser $M_\infty$ noch folgende Mengen untersuchen: wenn $\alpha$ ganz, $\alpha \geqq 2$, so sei $M_\alpha$ die Menge aller Irrationalzahlen $\theta$ (mit $0 < \theta < 1$), deren Teilnenner sämtlich höchstens gleich $\alpha$ sind (die analoge Menge $M_1$ wäre trivial, sie würde aus einer einzigen Zahl

[1]) Im folgenden werden wir, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben sind, mit $p_i$, $q_i$ $(-1 \leqq i \leqq n)$ stets die zu den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehörigen $i$-ten Näherungszähler und Näherungsnenner bezeichnen, ohne es ausdrücklich zu erwähnen, wenn keine Verwirrung zu befürchten ist.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

bestehen).

Die Bedeutung von $M_\alpha$ für unsere Approximationsprobleme ist nach (4) klar. Und wir werden zeigen: schon die Menge $M_2$ hat eine positive Dimension; die Dimension von $M_\alpha$ ist aber stets kleiner als 1; erst ihre Vereinigungsmenge

$$M_\infty = M_2 + M_3 + M_4 + \dots$$

hat die Dimension 1. Und noch schärfer werden wir die beiden folgenden Sätze beweisen (aus welchen Satz 1. und Satz 2. unmittelbar folgen):

**Satz 3.** $\dim M_2 > \frac{1}{4}$.

**Satz 4.** Für ganzes $\alpha > 8$ ist

$$1 - \frac{4}{\alpha \, . \log 2} \leqq \dim M_\alpha \leqq 1 - \frac{1}{8\,\alpha \log \alpha}.$$

## § 2. Beweis der Sätze 3. und 4.

1. In diesem ganzen Paragraphen sei ein festes ganzes $\alpha \geqq 2$ vorgegeben.

Im folgenden werden wir mit $(a, b)$ das abgeschlossene Intervall bezeichnen, dessen Endpunkte $a$ und $b$ sind ($a < b$ oder $a > b$).

Es seien nun $n$ ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ gegeben, wo $n \geqq 0$, $a_i \leqq \alpha$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Diejenigen Irrationalzahlen $\theta$ mit $0 < \theta < 1$, deren $i$-ter Teilnenner fur $i = 1, 2, \dots, n$ gleich $a_i$ ist, sind genau alle Zahlen

$$\theta = \frac{\varepsilon\, p_n + p_{n-1}}{\varepsilon\, q_n + q_{n-1}},$$

wo $\varepsilon > 1$, $\varepsilon$ irrational. Diese Zahlen $\theta$ sind also genau alle Irrationalzahlen eines bestimmten abgeschlossenen Intervalls, welches mit $I^n$ und, wenn nötig, auch ausführlicher mit $I^n_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ bezeichnet werden möge.

Wir wollen jedes $I^n$ ein „langes Intervall $n$-ter Ordnung" nennen. Es ist

$$I^n_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Analog: Es seien $n$ ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, wo $n \geqq 0$, $a_i \leqq \alpha$ für $i = 1, 2, \ldots, n$; diejenigen Irrationalzahlen $\theta$ mit $0 < \theta < 1$, deren $i$ — ter Teilnenner für $i = 1, 2, \ldots, n$ gleich $a_i$ ist und deren $(n+1)$ — ter Teilnenner höchstens gleich $\alpha$ ist, sind genau alle Zahlen

$$\theta = \frac{\varepsilon\, p_n + p_{n-1}}{\varepsilon\, q_n + q_{n-1}},$$

wo $\varepsilon$ irrational, $1 < \varepsilon < \alpha + 1$. Diese Zahlen $\theta$ sind also genau alle Irrationalzahlen eines bestimmten abgeschlossenen Intervalls, welches mit $K^n$ und, wenn nötig, auch ausführlicher mit $K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ bezeichnet werden möge. Wir wollen jedes $K^n$ ein „kurzes Intervall $n$ — ter Ordnung" nennen. Es ist

$$K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \left(\frac{(\alpha+1)\, p_n + p_{n-1}}{(\alpha+1)\, q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Jedes $K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ entsteht offenbar dadurch, dass man von dem entsprechenden $I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ ein Stück abschneidet, welches nach (3) für gerades $n$ am linken, für ungerades $n$ am rechten Ende von $I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ liegt. Da zwei lange Intervalle $I^n$ derselben Ordnung, die nicht zu demselben System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehören, offenbar höchstens einen Punkt gemeinsam haben, haben die beiden zugehörigen kurzen Intervalle $K^n$ überhaupt keinen gemeinsamen Punkt.

Es gibt genau $\alpha^n$ lange und ebensoviel kurze Intervalle $n$ - ter Ord nung; offenbar ist

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} & I^{n+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} \subset I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \\ & K^{n+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} \subset K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \\ & I^{n+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} \subset K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}. \end{aligned}\right.$$

Die Länge eines Intervalls $I$ bezeichnen wir allgemein mit $|I|$; also ist

$$|I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}| = \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})}$$

$$|K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}| = \frac{\alpha}{((\alpha+1)\, q_n + q_{n-1})(q_n + q_{n-1})}.$$

2. Es sei nun $V_n$ für ein gegebenes ganzes $n \geqq 0$ die Vereinigungsmenge aller langen Intervalle $n$-ter Ordnung, $W_n$ die Vereinigungsmenge aller kurzen Intervalle $n$-ter Ordnung, also

$$V_0 = I^0, \; W_0 = K^0, \; V_n = \sum_{a_i=1}^{\alpha} I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n},$$

$$W_n = \sum_{a_i=1}^{\alpha} K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \quad \text{für } n > 0.$$

Es ist nach (5) [1]

$$V_0 \supset W_0 \supset V_1 \supset W_1 \supset V_2 \supset W_2 \supset \ldots,$$

also ist die abgeschlossene, nur von $\alpha$ abhängige Menge

$$N_\alpha = V_0 \, V_1 \, V_2 \ldots$$

nichtleer und mit $W_0 \, W_1 \, W_2 \ldots$ identisch. $N_\alpha$ ist sogar perfekt; denn die Länge eines $K^n$ ist für $n > 0$ kleiner als $\frac{1}{n^2}$ (wegen $q_n \geqq n$) und jedes $K^n$ enthält mindestens zwei (nämlich genau $\alpha$) Intervalle $K^{n+1}$, die paarweise fremd sind und von welchen jedes mindestens einen Punkt von $N_\alpha$ enthält. Die in $N_\alpha$ enthaltenen Irrationalzahlen sind offenbar genau alle Zahlen aus $M_\alpha$; daher ist $N_\alpha = M_\alpha + D$, wo $D$ aus lauter rationalen Zahlen besteht, also höchstens abzählbar ist; also ist nach § 1

$$\dim N_\alpha = \dim M_\alpha.$$

3. Wir fragen also nach der Dimension von $N_\alpha$. Im Rest dieses Paragraphen sei eine Zahl $s$ fest gewählt, $0 < s < 1$. Wenn $\mathfrak{U}$ ein System von höchstens abzählbar vielen Intervallen ist, deren Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ heissen, so setzen wir

$$\Lambda_s(\mathfrak{U}) = \sum_i l_i^s.$$

Unsere Aufgabe besteht im folgenden: wenn ein $\rho > 0$ gegeben ist, so soll die untere Grenze von $\Lambda_s(\mathfrak{U})$ für alle Systeme $\mathfrak{U}$ abgeschätzt

[1] Oder direkt nach der Definition von $I^n$ und $K^n$, die sogar $W_n = V_{n+1}$ liefert.

werden, welche die Menge $N_\alpha$ überdecken und den Ungleichungen $l_i \leqq \rho$ $(i = 1, 2, \ldots)$ genügen. Offenbar ist es gleichgültig, ob wir in den Systemen $\mathfrak{U}$ nur abgeschlossene oder nur offene Intervalle oder beides zugleich zulassen.

Es sei also $\mathfrak{U}$ ein Überdeckungssystem von $N_\alpha$, welches aus höchstens abzählbar vielen *offenen* Intervallen besteht, deren Längen eine gegebene positive Zahl $\rho$ nicht überschreiten. Nach dem Borelschen Satz können wir aus diesen Intervallen *endlich* viele herausgreifen, welche auch die (abgeschlossene, beschränkte) Menge $N_\alpha$ überdecken; von diesen Intervallen lassen wir noch diejenigen weg, die keinen Punkt von $N_\alpha$ enthalten. Jedes übriggebliebene Intervall $G$ des Systems $\mathfrak{U}$ enthält im Inneren mindestens einen Punkt von $N_\alpha$, also (da $N_\alpha$ perfekt ist) unendlich viele Punkte von $N_\alpha$. Es sei $a$ die untere, $b$ die obere Grenze des Durchschnittes $G \,.\, N_\alpha$ ($a, b$ sind entweder Punkte von $G$ oder Endpunkte von $G$, sie gehören aber sicher zu $N_\alpha$, da $N_\alpha$ abgeschlossen ist); wir ersetzen $G$ durch das *abgeschlossene* Intervall $(a, b)$. Wenn wir im System $\mathfrak{U}$ diese Änderungen durchführen, so wird dadurch die Zahl $\Lambda_s(\mathfrak{U})$ nicht vergrössert und das modifizierte System überdeckt wieder die Menge $N_\alpha$.

4. Wir betrachten daher nur Überdeckungssysteme $\mathfrak{B}$ folgender Art: $\mathfrak{B}$ ist ein System von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen, welche die Menge $N_\alpha$ überdecken. Jedes Intervall des Systems $\mathfrak{B}$ hat zu Endpunkten Punkte von $N_\alpha$ und enthält unendlich viele Punkte von $N_\alpha$ (die Einschränkung $l_i \leqq \rho$ lassen wir fallen). Dann ist nach 3. für jedes $\rho > 0$ die untere Grenze der Zahlen $\Lambda_s(\mathfrak{B})$ für alle solchen $\mathfrak{B}$ sicher nicht grösser als $L_{s,\rho}(N_\alpha)$, also auch sicher nicht grösser als $\lim\limits_{\rho=0} L_{s,\rho}(N_\alpha) = L_s(N_\alpha)$.

5. Es sei also ein solches System $\mathfrak{B}$ vorgelegt; es sei $G$ ein abgeschlossenes Intervall des Systems $\mathfrak{B}$. Da $N_\alpha \subset K^0$, so ist auch $G \subset K^0$. Da jeder Punkt von $N_\alpha$ für jedes ganze $n \geqq 0$ in einem kurzen Intervall $n$-ter Ordnung $K^n$ liegt, da weiter $|K^n| < \frac{1}{n^2}$ für $n > 0$ gilt, und da endlich $G$ unendlich viele Punkte von $N_\alpha$ enthält, so gibt es auch ein $n$, so dass $G$ Punkte von mehr als einem kurzen Intervall $n$-ter Ordnung enthält.

Wegen $G \subset K^0$ gibt es also eine ganze Zahl $m \geqq 0$ mit folgender Eigenschaft: es gibt $m$ ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mit $a_i \leqq \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, so dass

$$G \subset K^m_{a_1, a_2, \ldots, a_m};$$

es gibt aber zwei Intervalle

$$K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, k}\,;\; K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, l} \quad (1 \leqq k \leqq \alpha,\ 1 \leqq l \leqq \alpha,\ k \neq l),$$

von welchen jedes mindestens einen Punkt von $G$ enthält.

Nach 1. ist (mit Benutzung von (2))

$$(6)\quad \begin{cases} K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, k} = \left(\dfrac{(\alpha+1)(kp_m+p_{m-1})+p_m}{(\alpha+1)(kq_m+q_{m-1})+q_m},\ \dfrac{kp_m+p_{m-1}+p_m}{kq_m+q_{m-1}+q_m}\right), \\[2ex] K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, l} = \left(\dfrac{(\alpha+1)(lp_m+p_{m-1})+p_m}{(\alpha+1)(lq_m+q_{m-1})+q_m},\ \dfrac{lp_m+p_{m-1}+p_m}{lq_m+q_{m-1}+q_m}\right). \end{cases}$$

Wegen (3) ist für gerades $m$ in (6) rechts der links geschriebene Endpunkt beidemal grösser als der entsprechende rechts geschriebene Endpunkt; umgekehrt für ungerades $m$. Bei geeigneter Bezeichnung ist also der Abstand der beiden Intervalle in (6) gleich (man benutze (3))

$$\left|\frac{(\alpha+1)(kp_m+p_{m-1})+p_m}{(\alpha+1)(kq_m+q_{m-1})+q_m} - \frac{lp_m+p_{m-1}+p_m}{lq_m+q_{m-1}+q_m}\right| =$$

$$= \frac{|(\alpha+1)(k-l-1)+1|}{((\alpha+1)(kq_m+q_{m-1})+q_m)((l+1)q_m+q_{m-1})} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{4\alpha^3 q_m\,(q_m+q_{m-1})}$$

(denn $\alpha \geqq 2$, $k \leqq \alpha$, $l \leqq \alpha$; $|(\alpha+1)(k-l-1)+1|$ ist gleich 1 für $k-l-1=0$, sonst mindestens gleich $\alpha > 1$).

Die Länge von $G$ ist also mindestens

$$\frac{1}{4\alpha^3 q_m\,(q_m+q_{m-1})};$$

die Länge von $I^m_{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ ist gleich

$$\frac{1}{q_m\,(q_m+q_{m-1})}.$$

Wenn wir also im System $\mathfrak{B}$ jedes Intervall $G$ durch das entsprechende Intervall $I^m_{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ ersetzen, bekommen wir ein System $\mathfrak{W}$ von abgeschlossenen Intervallen, welches die Menge $N_\alpha$ überdeckt und die Ungleichung erfüllt

$$\Lambda_s(\mathfrak{W}) \leqq 4^s \alpha^{3s} \Lambda_s(\mathfrak{B}).$$

Wenn nun im System $\mathfrak{W}$ zwei Intervalle $I^m$, $I^n$ mit $m > n$ vorkommen, so das $I^m \subset I^n$, so wird $\Lambda_s(\mathfrak{W})$ verkleinert, wenn wir $I^m$ aus $\mathfrak{W}$ weglassen. Wenn wir dies Verfahren wiederholen, kommen wir zu einem Überdeckungssystem $\mathfrak{X}$, welches aus endlich vielen langen Intervallen $n$-ter Ordnung ($n$ kann freilich von einem Intervall zum anderen variieren) besteht, von welchen keines Teilmenge eines anderen ist; dabei ist

$$\Lambda_s(\mathfrak{X}) \leqq 4^s \alpha^{3s} \Lambda_s(\mathfrak{W}).$$

6. Wir wollen uns daher auf Systeme $\mathfrak{X}$ folgender Art beschränken: $\mathfrak{X}$ sei ein System von endlich vielen langen Intervallen $n$-ter Ordnung (wobei $n$ von einem Intervall zum anderen variieren kann), welche die Menge $N_\alpha$ überdecken und von welchen keines Teilmenge eines anderen ist.

Nach 4. und 5. ist $L_s(N_\alpha)$ sicher nicht kleiner als die untere Grenze der Zahlen

$$\frac{1}{4^s \alpha^{3s}} \Lambda_s(\mathfrak{X})$$

für alle solchen Systeme $\mathfrak{X}$. Wenn wir also für irgend ein $s$ und irgend ein $\alpha$ zeigen können, dass $\Lambda_s(\mathfrak{X}) \geqq 1$ für alle solchen Systeme $\mathfrak{X}$, dann ist $L_s(N_\alpha) > 0$, also $\dim N_\alpha \geqq s$.

7. Wir beweisen nun folgenden

**Hilfssatz 1. Voraussetzung.**

*$s$ und $\alpha$ seien fest gegeben;* $0 < s < 1$, *$\alpha$ ganz,* $\alpha \geqq 2$. *Für jedes ganze* $n > 0$ *und jedes System von ganzen Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ $(1 \leqq a_i \leqq \alpha$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *sei*

$$\left| I^{n-1}_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}} \right|^s \leqq \sum_{k=1}^{\alpha} \left| I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, k} \right|^s. \tag{7}$$

**Behauptung.** $\dim N_\alpha \geqq s.$

**Beweis.** Es sei $\mathfrak{X}$ ein Überdeckungssystem von $N_\alpha$ von der in 6. geschilderten Art. Diejenigen $I^n$, die in $\mathfrak{X}$ vorkommen, können von verschiedener Ordnung $n$ sein; die höchste auftretende Ordnung sei $l$ $(l \geqq 0)$, sie möge „Ordnung des Systems $\mathfrak{X}$" heissen. Wenn $l > 0$, so kommt in $\mathfrak{X}$ ein Intervall $l$-ter Ordnung $I^l_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l}$ vor, aber kein Intervall höherer als $l$-ter Ordnung und kein Intervall $I^n$ mit $n < l$, für welches $I^l_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l} \subset I^n$ wäre. Da jedes lange Intervall $l$-ter Ordnung unendlich viele Punkte von $N_\alpha$ enthält, müssen also in $\mathfrak{X}$ alle Intervalle

$$I^{l}_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, k} \qquad (1 \leqq k \leqq \alpha) \tag{8}$$

(da sie zu je zwei höchstens einen gemeinsamen Punkt haben) vorkommen. Wenn wir diese Intervalle (8) aus $\mathfrak{X}$ weglassen und durch das Intervall $I^{l-1}_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}}$ ersetzen, bekommen wir wieder ein Überdekkungssystem $\mathfrak{X}'$ von der in 6. geschilderten Art. Nach (7) ist

$$\Lambda_s(\mathfrak{X}') \leqq \Lambda_s(\mathfrak{X}).$$

Indem wir dieses Verfahren für die vielleicht noch existierenden Intervalle $l$-ter Ordnung aus $\mathfrak{X}'$ wiederholen, kommen wir endlich zu einem System $(l-1)$-ter Ordnung $\mathfrak{X}_1$ mit $\Lambda_s(\mathfrak{X}_1) \leqq \Lambda_s(\mathfrak{X})$ und durch weitere Wiederholung bekommen wir endlich ein System nullter Ordnung $\mathfrak{Y}$ mit $\Lambda_s(\mathfrak{Y}) \leqq \Lambda_s(\mathfrak{X})$. Da aber $\mathfrak{Y}$ die Menge $N_\alpha$ überdeckt und von nullter Ordnung ist, besteht $\mathfrak{Y}$ genau aus einem Intervall (0,1), also ist $\Lambda_s(\mathfrak{Y}) = 1^s = 1$, $\Lambda_s(\mathfrak{X}) \geqq 1$, womit nach 6. die Behauptung bewiesen ist.

8. Wir beweisen nun den Satz 3:

$$\dim M_2 > \frac{1}{4}.$$

Wir sollen also zeigen, dass für $\alpha = 2$ und ein geeignetes $s > \frac{1}{4}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. erfüllt sind. Die Ungleichung (7) lautet jetzt

$$\frac{1}{q^s_{n-1}(q_{n-1}+q_{n-2})^s} \leqq \frac{1}{(q_{n-1}+q_{n-2})^s(2q_{n-1}+q_{n-2})^s} + \frac{1}{(2q_{n-1}+q_{n-2})^s(3q_{n-1}+q_{n-2})^s}$$

oder

$$1 \leqq \frac{1}{\left(2+\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^s} + \frac{1}{\left(2+\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^s\left(3-\frac{2q_{n-2}}{q_{n-1}+q_{n-2}}\right)^s}.$$

Wegen $0 \leqq q_{n-2} \leqq q_{n-1}$ ist diese Ungleichung sicher erfüllt, wenn $\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} \geqq 1$; diese Ungleichung ist aber für ein geeignetes $s > \frac{1}{4}$ erfüllt; denn $\frac{1}{3^{1/4}} + \frac{1}{9^{1/4}} > \frac{2}{9^{1/4}} > \frac{2}{16^{1/4}} = 1$.

9. Wir beweisen nun die erste Hälfte des Satzes 4., nämlich die **Behauptung:** für ganzes $\alpha > 8$ ist

$$\dim N_\alpha \geqq 1 - \frac{4}{\alpha \log 2}.$$

Wir setzen also $s = 1 - \frac{4}{\alpha \log 2}$, wo $\alpha > 8$, $\alpha$ ganz und haben zu zeigen, dass die Voraussetzung des Hilfssatzes 1. erfüllt ist. Die zu beweisende Ungleichung (7) lautet

$$(8) \qquad \frac{1}{q^s_{n-1}(q_{n-1}+q_{n-2})^s} \leqq \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^s\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^s}.$$

Nach (3) ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})} =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\alpha} \left(\frac{k\,p_{n-1}+p_{n-2}}{k\,q_{n-1}+q_{n-2}} - \frac{(k+1)\,p_{n-1}+p_{n-2}}{(k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2}}\right)$$

$$= (-1)^{n-1} \left(\frac{p_{n-1}+p_{n-2}}{q_{n-1}+q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

$$+ (-1)^{n-1} \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{(\alpha+1)\,p_{n-1}+p_{n-2}}{(\alpha+1)\,q_{n-1}+q_{n-2}}\right)$$

$$= \frac{1}{q_{n-1}\,(q_{n-1}+q_{n-2})} - \frac{1}{q_{n-1}\,((\alpha+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})}$$

$$= \frac{1}{q_{n-1}\,(q_{n-1}+q_{n-2})}\left(1 - \frac{\tau}{\alpha}\right),$$

wo $\tau$ noch von verschiedenen Argumenten abhängt, sicher aber

$$\tfrac{1}{2} < \tau < 2$$

ist.

Der Ausdruck $\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^s\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^s}$

entsteht aus $\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})}$,

wenn man darin den $k$-ten Summanden mit dem Ausdruck

$$(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s} \tag{9}$$

multipliziert. Der Ausdruck (9) ist aber mindestens gleich (man setze $k=1$)

$$(q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}\,(2\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s} \geqq$$

$$(2\,q_{n-1}\,(q_{n-1}+q_{n-2}))^{1-s};$$

also ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^s\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^s}$$

$$\geqq \frac{1}{q_{n-1}^s\,(q_{n-1}+q_{n-2})^s} \cdot 2^{1-s}\left(1-\frac{2}{\alpha}\right).$$

Die Ungleichung (8) ist also richtig, wenn $2^{1-s}\left(1-\frac{2}{\alpha}\right) \geqq 1$, d. h. wenn $(1-s)\log 2 \geqq -\log\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)$; und dies ist wegen $(1-s)\log 2 = \frac{4}{\alpha}$, $-\log\left(1-\frac{2}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 + \ldots < \frac{4}{\alpha}$ der Fall. Damit ist die Behauptung bewiesen.

10. **Hilfssatz 2. Voraussetzung.** *$s$ und $\alpha$ seien fest gegeben; $0 < s < 1$, $\alpha$ ganz, $\alpha \geqq 2$. Für jedes ganze $n > 0$ und für jedes System von ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ $(1 \leqq a_i \leqq \alpha$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sei*

$$|\,I^{n-1}_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}\,|^s \geqq \sum_{k=1}^{\alpha} |\,I^{n}_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, k}\,|^s. \tag{10}$$

**Behauptung.** $\dim N_\alpha \leqq s.$

**Beweis.** Aus (10) folgt

$$1 = |\,I^0\,|^s \geqq \Sigma\,|\,I^1\,|^s \geqq \Sigma\,|\,I^2\,|^s \geqq \ldots,$$

wo die Summe $\Sigma |I^n|^s$ über alle langen Intervalle $n$-ter Ordnung erstreckt wird. Es sei nun ein $\rho > 0$ gegeben; wir wählen ein festes $n$ so gross, dass alle langen Intervalle $n$-ter Ordnung kürzer als $\rho$ sind (das ist möglich, da $|I^n| \leqq \frac{1}{n^2}$ für $n > 0$).

Alle langen Intervalle $n$-ter Ordnung überdecken die Menge $N_\alpha$; also ist $L_{s,\rho}(N_\alpha) \leqq \Sigma |I^n|^s \leqq |I^0|^s = 1$, also $L_s(N_\alpha) = \lim\limits_{\rho=0} L_{s,\rho}(N_\alpha) \leqq 1$, also $\dim N_\alpha \leqq s$, wie behauptet.

11. Wir beweisen nun die zweite Hälfte des Satzes 4, d. h. die **Behauptung:** für ganzes $\alpha > 8$ ist

$$\dim N_\alpha \leqq 1 - \frac{1}{8\,\alpha \log \alpha}.$$

Wir setzen also $s = 1 - \frac{1}{8\,\alpha \log \alpha}$, wo $\alpha > 8$, $\alpha$ ganz und haben zu zeigen, dass die Voraussetzung des Hilfssatzes 2. erfüllt ist. Die zu beweisende Ungleichung (10) lautet

$$(11) \quad \frac{1}{q_{n-1}^s\,(q_{n-1}+q_{n-2})^s} \geqq \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^s\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^s}.$$

Nun haben wir in 9. gezeigt, dass

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})} \leqq \frac{1-\frac{1}{2\alpha}}{q_{n-1}\,(q_{n-1}+q_{n-2})}.$$

Der Ausdruck rechts in (11) entsteht aus dem Ausdruck links in (12), wenn dort das $k$-te Glied mit dem Ausdruck

$$(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}$$

multipliziert wird. Dieser Ausdruck ist aber höchstens gleich (man setze $k=\alpha$)

$$\begin{aligned}
&(\alpha\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}\,((\alpha+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}\\
&\leqq (\alpha+1)^{2-2s}\,q_{n-1}{}^{1-s}\,(q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}\\
&< (2\,\alpha)^{2-2s}\,q_{n-1}^{1-s}\,(q_{n-1}+q_{n-2})^{1-s}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\,q_{n-1}+q_{n-2})^s\,((k+1)\,q_{n-1}+q_{n-2})^s} \leqq \frac{\left(1-\frac{1}{2\,\alpha}\right)(2\,\alpha)^{2-2s}}{q_{n-1}^s\,(q_{n-1}+q_{n-2})^s}$$

und wir haben nur

$$\left(1-\frac{1}{2\,\alpha}\right)(2\,\alpha)^{2-2s} \leqq 1$$

zu zeigen; dies ist aber wegen

$$(2-2\,s)\log 2\,\alpha = \frac{1}{4\,\alpha\log\alpha}\log 2\,\alpha < \frac{1}{2\,\alpha}$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\,\alpha}\right)^n = -\log\left(1-\frac{1}{2\,\alpha}\right)$$

in der Tat der Fall, womit die Behauptung bewiesen ist.

Praha, den 2. Dezember 1929.