Vojtěch Jarník

Sur les points à coordonnées entiéres dans les ellipsoides à plusieurs dimensions

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1928, 10 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500712

Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 23 Mars 1928.

§ 1. Introduction.

Dans deux Mémoires[1][2] qui paraîtront prochaînement dans les Mathematische Annalen, je me suis occupé d'une manière systématique du problème en question pour les ellipsoides, dont les axes coincident avec les axes des coordonnées.

Dans Gp. I, j'ai démontré le théorème suivant (Satz 1):

Théorème A. Soit $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2$ $(r \geqq 4, \alpha_j > 0)$; *pour* $x > 0$ *soit*

$$A_Q(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} + P_Q(x);$$

alors on a

$$P_Q(x) = O(x \log^2 x) \text{ pour } r = 4$$

$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2} - 1} \log x) \text{ pour } r > 4.$$

Pour démontrer ce théorème, je suis parti de la formule

$$\left[\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}\right]$$

$$(1) \qquad A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \Theta(\alpha_1 s)\, \Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)\, e^{xs} \frac{ds}{s},$$

[1]) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; dans la suite cité par Gp. I.

[2]) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Abhandlung; dans la suite cité par Gp. II.

valable pour les $x > 0$, non exprimables sous la forme $x = \sum_{j=1}^{r} m_j^2 \alpha_j$ (m_j entiers). Dans ce travail, je veux démontrer en premier lieu le théorème plus précis suivant:

Théorème 1er. $Q(u)$, $A_Q(x)$, $P_Q(x)$ ayant la signification donnée plus haut, on a $$P_Q(x) = O(x \log^2 x) \text{ pour } r = 4$$
$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2}-1}) \text{ pour } r > 4.$$

Pour démontrer ce théorème, il faut partir non de la formule (1), mais de la formule

$$(2) \qquad \int_x^{x \pm z} A_Q(y)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)\, e^{xs} (e^{\pm zs} - 1) \frac{ds}{s^2} \quad (0 < z \leqq 1),$$

valable pour $x > 1$.

C'est cette formule (2) qui m'a servi pour point de départ dans Gp. II, où j'ai démontré le théorème suivant:

Théorème B. Si $r \geqq 6$ et si un au moins entre les $r-1$ nombres $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ ($j = 2, 3, \ldots, r$) est incommensurable, on a

$$P_Q(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1}).$$

Si tous les nombres $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ sont commensurables, on a d'après MM. Walfisz et Landau[3]) $P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2}-1})$ pour $r \geqq 5$. Alors, le théorème 1er est pour $r \geqq 6$ une conséquence immédiate du théorème B et du théorème de Walfisz-Landau. Néanmoins, je développe ici la démonstration du théorème 1er, ce théorème contenant une évaluation nouvelle de $P_Q(x)$ pour $r = 5$ et sa démonstration étant bien plus simple que celle du théorème B.

Je veux encore donner une démonstration du théorème suivant:

Théorème 2ème. Soit $\sigma \geqq 2$, $r_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, \sigma$); σ, r_j entiers; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma \geqq 4$; $\lambda = \sum_{j=1}^{\sigma} \min\left(\frac{r_j}{4}, 1\right)$. Considérons toutes les formes quadratiques

$$(3) \qquad Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \beta_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2)$$

avec $\beta_j > 0$. On a alors, pour presque tous les systèmes des valeurs positives $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$[4])

[3]) Pour les détails bibliographiques, voir mon Mémoire original: O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech, Rozpravy České akademie 37 (1928).

[4]) C'est-à-dire pour tous les systèmes $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ avec $\beta_j > 0$, excepté au plus un ensemble de points $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ dont la mesure (dans l'espace à σ dimensions) est zéro („mesure“ au sens de M. Lebesgue).

$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2} - \lambda + \varepsilon})$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Dans Gp. I, j'ai démontré ce théorème dans deux cas particuliers: pour $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ (Satz 2.) et pour $r_1 = r_2 = \ldots = r_\sigma = 1$ (Satz 3.), en partant de la formule (1). Dans mon Mémoire original[3]), je démontre le théorème $2^{ème}$ à l'aide de la formule (2), ce qui permet de simplifier considérablement la démonstration. Ici, pour être plus court, je veux montrer, quelles modifications sont à faire dans la démonstration du „Satz 2" (Gp. I, § 5) pour démontrer le cas général.

§ 2. Démonstration du théorème 1er.

Soit $\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 s}$ pour $\Re(s) > 0$; en posant

$$\Theta(\alpha_1 s)\,\Theta(\alpha_2 s)\ldots\Theta(\alpha_r s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots),$$

on a évidemment pour $x > 0$:

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n = A_Q(x), \text{ d'où } \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n) = \int_0^x A_Q(y)\,dy.$$

En utilisant la formule bien connue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{Ts}}{s^2}\,ds = Max\,(0, T) \quad (a > 0, T \text{ réel}),$$

on obtient pour $x > 0$, $a > 0$

$$\int_0^x A_Q(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\, e^{xs}\frac{ds}{s^2},$$

alors

$$\int_x^{x\pm 1} A_Q(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \Theta(\alpha_1 s)\ldots\Theta(\alpha_r s)\, e^{xs}(e^{\pm s} - 1)\,\frac{ds}{s^2}$$

pour $x > 1$.

Pour démontrer le théorème 1er, il suffit de montrer

$$\int_x^{x\pm 1} A_Q(y)\,dy = \pm\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O(x^{\frac{r}{2}-1}\log^{\varphi} x),$$

où $\varphi = 2$ pour $r = 4$, $\varphi = 0$ pour $r > 4$.

En effet, $A_Q(x)$ étant une fonction non décroissante de x, on aura alors

$$\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{r}{2}-1} \log^{\varphi} x\right) = \int_{x-1}^{x} A_Q(y)\,dy \leqq A_Q(x) \leqq$$

$$\leqq \int_{x}^{x+1} A_Q(y)\,dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{r}{2}-1} \log^{\varphi} x\right), \text{ q. e. d.}$$

Tout d'abord, posons $A = \underset{1 \leqq j \leqq r}{Max} \frac{2\pi}{\alpha_j}$ et occupons-nous de l'intégrale

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x} + i\frac{A}{\sqrt{x}}} \Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)\, e^{xs} (e^{\pm s} - 1) \frac{ds}{s^2}.$$

On a, d'après une formule bien connue,

$$\Theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}\,(1 + \Psi_j(s)), \text{ où } \Psi_j(s) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \frac{\pi^2}{\alpha_j s}}.$$

Pour[5]) $s = \frac{1}{x} + t i$, $x > c$, $|t| \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}$ on a

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1 + x^2 t^2} > c; \text{ alors}$$

$$|\Psi_j(s)| \leqq 2 e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j (1 + x^2 t^2)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-c(m^2-1)} < c\, e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}.$$

On a alors, pour $x > c$,

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}} \int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}} (e^{\pm s} - 1)\left(1 + \mu c\, e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}\right) dt$$

$\left(s = \frac{1}{x} + i t\right)$.

---

[5]) Par c, je désigne des nombres positifs, ne dépendant que de $Q(u)$; par μ des fonctions d'un nombre quelconque des variables, satisfaisant l'inégalité $|\mu| \leqq 1$.

On a évidemment pour $x > c$:

$$|e^{\pm s} - 1| < c \min\left(\frac{1}{x} + |t|,\ 1\right)$$

Alors

$$\int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \left| \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}} (e^{\pm s} - 1) \right| e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\, dt =$$

(4)
$$= O\left(x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{(1+x^2t^2)^{\frac{r}{4}+1}} (1 + x\,|t|)\, dt \right) =$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}} \int_0^{A\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}\, dt \right).$$

La fonction sous le dernier signe d'intégration a, pour $x > c$, son maximum aux points t, déterminés par l'équation $1 + t^2 = \dfrac{cx}{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}$; la grandeur de ce maximum est $O\left(x^{-\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}\right)$; l'expression (4) est alors égale à $O\left(x^{\frac{r}{4}}\right)$.

En second lieu, on a

(5)
$$\left| \int_{-\infty}^{-\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}} (e^{\pm s} - 1)\, dt \right| = \left| \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \cdots \right| = O\left(\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}} \right) = O\left(x^{\frac{r}{4}}\right).$$

Enfin, on a

(6)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}} (e^{\pm s} - 1)\, dt = \frac{1}{i} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{e^{(x\pm 1)s}}{s^{\frac{r}{2}+2}}\, ds - \frac{1}{i} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}}\, ds =$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} \left((x \pm 1)^{\frac{r}{2}+1} - x^{\frac{r}{2}+1} \right) = \pm \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} x^{\frac{r}{2}} + O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

De (4), (5), (6) on déduit

$$J_1(x) = \pm \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Pour démontrer le théorème 1er, il suffit alors de démontrer l'exactitude de la formule

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \mid \Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_r s) \mid Min\,(1, t)\, \frac{dt}{t^2} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1} \log^{\varphi} x\right).$$

D'après un relation bien connue entre la valeur moyenne arithmétique et géométrique, il suffit alors de démontrer la formule

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \mid \Theta^r(\alpha_j s) \mid Min\,(1, t)\, \frac{dt}{t^2} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1} \log^{\varphi} x\right)$$

pour $j = 1, 2, \ldots, r$.

Construisons, x étant un nombre donné > 1, tous les points $\frac{h}{k}$ avec $0 < k \leq \sqrt{x}$, $h \gtreqless 0$, $(h, k) = 1$, c'est-à-dire les fractions de Farey avec le dénominateur $\leq \sqrt{x}$. Nous construisons aussi leurs médiantes, c'est-à-dire tous les points $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, où $\frac{h}{k}, \frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ sont deux points de Farey voisins. Soit $\mathfrak{B}_{h,k}$ l'intervalle, fermé du côté gauche, ouvert du côté droit, contenant le point de Farey $\frac{h}{k}$, dont les points extrêmes sont deux médiantes voisines. On a

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\mu}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\mu}{\sqrt{x}} \right) . \tag{7}$$

De la théorie des transformations des fonctions Θ, nous utilisons le résultat suivant: l, m, n, p étant quatre nombres entiers avec $n > 0$, $lp - mn = 1$, $\frac{p}{n} = \frac{2h}{k}$ $\left(\text{alors } n = k \text{ ou bien } n = \frac{k}{2}\right)$, on a

$$\Theta(\alpha_j s) = \frac{\mu c}{\sqrt{k\left(\alpha_j s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)}}\, \bar{\Theta}\left(-\pi i\, \frac{l \alpha_j s - m \pi i}{n \alpha_j s - p \pi i}\right), \tag{8}$$

où $\bar{\Theta}(s)$ est définie par une des équations suivantes:

$$\bar{\Theta}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s},\quad \bar{\Theta}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 s},\quad \bar{\Theta}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 s}.$$

Pour $s = \frac{1}{x} + t\,i$, t étant situé dans l'intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, on a

$$\Re\left(-\pi i \frac{l\,\alpha_j s - m\,\pi\,i}{n\,\alpha_j s - p\,\pi\,i}\right) = \frac{\pi^2 \alpha_j}{x\,n^2\left(\frac{\alpha_j^2}{x^2} + \left(\alpha_j t - 2\pi\frac{h}{k}\right)^2\right)} > c,$$

car $\left|\alpha_j t - 2\pi\frac{h}{k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}}$, $n \leqq k$; on a alors d'après (8)

$$(9)\qquad |\Theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}}.$$

j étant fixé, l'intervalle $-\infty < t < \infty$ est divisé en une infinité dénombrable d'intervalles $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, qui sont deux à deux sans points communs. Pour ceux entre ces intervalles, qui ont un point commun au moins avec l'intervalle $<\frac{A}{\sqrt{x}}, \infty)$, on a nécessairement $h > 0$, d'après (7). Alors

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta^r(\alpha_j s)|\,Min\,(1, t)\,\frac{dt}{t^2} \leqq \sum_{h>0,k}\ \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta^r(\alpha_j s)|\,Min\,(1, t)\,\frac{dt}{t^2}.$$

t étant situé dans l'intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, on a $\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{1}{k\sqrt{x}}$, alors pour $h > 0$, $x > c$: $c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}$. En utilisant encore la formule (9), on obtient (pour $h > 0$, $x > c$)

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta^r(\alpha_j s)|\,Min\,(1, t)\,\frac{dt}{t^2} \leqq$$

$$\leqq c\,\frac{Min\left(1, \frac{k}{h}\right)}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{dt}{\left[\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2\right]^{\frac{r}{4}}}$$

$$\leqq c\,\frac{Min\left(1, \frac{k}{h}\right)}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + t^2\right)^{\frac{r}{4}}} = c\,x^{\frac{r}{2}-1}\,\frac{Min\left(1, \frac{k}{h}\right)}{k^{\frac{r}{2}-1}h},$$

d'où

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\, \Theta^{r}(\alpha_j s) \,|\, Min\,(1, t)\, \frac{d\,t}{t^2} \leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{k>0,\,k} \frac{Min\left(1, \frac{k}{h}\right)}{k^{\frac{r}{2}-1}\, h}$$

$$\leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} \frac{\log\,(k+1)}{k^{\frac{r}{2}-1}} \leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \log^{\varphi} x$$

q. e. d.

§ 3. Démonstration du théorème 2ème.

Pour démontrer le théorème 2ème, il suffit, d'après Gp. I, Hilfssatz 4, de démontrer le fait suivant

(A) *Pour presque tous les systèmes*

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ *avec* $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *on a*

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} |\, \Theta^{r_1}(\beta_1 s) \ldots \Theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s) \,|\, \frac{d\,t}{t} = O\left(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

C'est ce fait (A) que j'ai démontré dans le Hilfssatz 6, Gp. I pour $r_j \geqq 4$. Mais, en jettant un coup d'oeil sur la démonstration du Hilfssatz 6, on voit que l'hypothèse $r_j \geqq 4$ n'intervient que dans les conclusions, faites de l'expression (25)[6]; cette expression et son applicabilité à la démonstration du fait (A) sont alors indépendantes de l'hypothèse $r_j \geqq 4$. Il suffit alors de démontrer le fait suivant:

Soit τ *un nombre entier,* $0 \leqq \tau \leqq \sigma$*; soit*[7])

$$L\,(x; l; m; n) = x^{\frac{r_1+\ldots+r_\tau}{2} + \frac{r_{\tau+1}+\ldots+r_\sigma}{4} - \frac{\sigma}{2}\log^2 x}\,.$$

$$.\,(l+1)^2 \prod_{j=1}^{\tau} \frac{(m_j+1)^2\,(n_j+1)^2}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)+n_j}} \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} (m_j+1)^2\,(n_j+1)^2\, 2^{m_j+n_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}\,.$$

Soit $S = \Sigma\, L\,(x; l; m; n)$, *où la sommation est étendue sur toutes les valeurs entières non négatives de*

$$l, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma, n_1, n_2, \ldots, n_\sigma,$$

pour lesquelles

$$2^{m_j} \leqq \sqrt{x},\ 2^l < c\, x^{r+\frac{1}{2}},\ 2^{m_j+n_j} \geqq x \text{ pour } j \leqq \tau,\ 2^{m_j+n_j} < \sqrt{x} \text{ pour } j > \tau.$$

---

[6]) Gp. I, § 5.

[7]) $L\,(x;\ l;\ m;\ n)$ est (excepté le facteur superflu $(n_1+1)^2$ et un facteur constant) exactement l' expression (25).

Alors on a

$$S = O\left(x^{\frac{r}{2} - \lambda + \varepsilon}\right) \tag{10}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Mais l'exactitude de (10) est elle-même une conséquence immédiate des formules suivantes:

$$\sum_{2^l < c\, x^{r + \frac{1}{2}}} (l + 1)^2 = O\,(log^3 x).$$

$$\sum_{\substack{2^{m_j + n_j} \geqq \sqrt{x} \\ 2^{m_j} \leqq \sqrt{x}}} \frac{(m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2}{2^{n_j + m_j\left(\frac{r_j}{2} - 1\right)}} \leqq c\, log^2 x \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} \frac{(m_j + 1)^2}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2} - 1\right)}} \frac{2^{m_j}}{\sqrt{x}}$$

$$< c\, \frac{log^2 x}{\sqrt{x}} \cdot \begin{cases} log^2 x \text{ pour } r_j > 4 \\ log^3 x \text{ pour } r_j = 4 \\ x^{1 - \frac{r_j}{4}}\, log^2 x \text{ pour } r_j < 4. \end{cases}$$

$$\sum_{2^{m_j + n_j} < \sqrt{x}} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2\, 2^{m_j + n_j\left(\frac{r_j}{2} - 1\right)}$$

$$\leqq c\, log^4 x \sum_{2^{n_j} < \sqrt{x}} 2^{n_j\left(\frac{r_j}{2} - 1\right)} \frac{\sqrt{x}}{2^{n_j}}$$

$$\leqq c\, \sqrt{x}\, log^4 x \begin{cases} x^{\frac{r_j}{4} - 1} \text{ pour } r_j > 4 \\ log\, x \text{ pour } r_j = 4 \\ 1 \text{ pour } r_j < 4. \end{cases}$$

On voit de plus que l'on pourrait remplacer, dans l'énoncé du théorème 2$^{\text{eme}}$, le facteur x^{ε} par une puissance de log x.

§ 4. **Remarques.**

A chaque forme quadratique $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2$ $(\alpha_j > 0)$ on peut faire correspondre un „exponent exact" $\mu = \mu(Q)$ tel que $P_Q(x) = O(x^{\mu + \varepsilon})$, $P_Q(x) = \Omega(x^{\mu - \varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Le théorème 2$^{\text{ème}}$ montre que $\mu(Q) \leqq \frac{r}{2} - \lambda$ pour „presque toutes" les formes (3). D'autre part, j'ai démontré (Gp. I, Satz 5): pour toutes les formes (3), on a $P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma}\right)$, alors $\mu(Q) \geqq \frac{r}{2} - \sigma$. Pour $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4, \ldots,$ $r_\sigma \geqq 4$, on a $\lambda = \sigma$, alors $\mu(Q) = \frac{r}{2} - \sigma$ pour „presque toutes" les formes

(3). La détermination de μ (Q) dans le cas général du théorème 2ème (au moins pour „presque toutes" les formes (3)) paraît être un problème très difficile. Discutons un peu le cas $\sigma = 2$. Alors on a $\mu\,(Q) = \frac{r}{2} - 2$ pour „presque toutes" les formes $Q\,(u) = \beta_1\,(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \beta_2\,(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2)$, si $r_1 \geqq 4$, $r - r_1 \geqq 4$. Mais pour $r_1 = 1$ on a certainement $\mu\,(Q) \geqq \frac{r}{2} - \frac{3}{2}$, comme le montre le théorème suivant:

Soit $r \geqq 4$, $Q\,(u) = \beta_1\,u_1^2 + \beta_2\,(u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_r^2)$; $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$; *alors on a* $P_Q\,(x) = \Omega\,(x^{\frac{r-3}{2}})$.

Démonstration: Soit $F\,(n)$ le nombre de représentations du nombre entier $n \geqq 0$ en somme de $r - 1$ carrés; on a

$$\sum_{n \leqq x} F\,(n) = \sum_{v_1^2 + \ldots + v_{r-1}^2 \leqq x} 1 \sim \frac{\pi^{\frac{r-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}\, x^{\frac{r-1}{2}};$$

d'où $F\,(n) = \Omega\,(n^{\frac{r-3}{2}})$. Il existe alors une constante $a > 0$, dépendant seulement de r et une suite des nombres entiers croissants $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \ldots$ telle que $F\,(\xi_m) > a\,\xi_m^{\frac{r-3}{2}}$. Les points $(0, v_2, v_3, \ldots, v_r)$, dont les coordonnées sont des nombres entiers, satisfaisant à la condition $\sum_{j=2}^{r} v_j^2 = \xi_m$, sont situés sur la surface $Q\,(u) = \beta_2\,\xi_m$. $A_Q\,(x)$ varie alors par un saut brusque de grandeur $\Omega\,(\xi_m^{\frac{r-3}{2}})$ si x passe la valeur $\beta_2\,\xi_m$. La même circonstance se présente alors chez $P_Q\,(x)$, d'où $P_Q\,(x) = \Omega\,(x^{\frac{r-3}{2}})$.