Vojtěch Jarník
Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden [1b]

Math. Ann. 100 (1928), pp. 699--721

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500701

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

§ 1.

Einleitung.

Es sei $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu,\nu} u_\mu u_\nu$ $(r \geqq 4)$ stets eine positiv-definite quadratische Form der u_μ. Für $x > 0$ sei $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im r-dimensionalen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; $J_Q(x)$ sei der Inhalt dieses Ellipsoids,

$$\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - J_Q(x).$$

Dann gilt

$$(1) \qquad \mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}}\right),^{1)} \qquad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right).^{2)}$$

Wenn insbesondere die $a_{\mu,\nu}$ rational sind, so ist [3]

$$(2) \qquad \mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \qquad \text{für} \quad r > 4,$$

---

[1]) E. Landau, Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen, Berliner Akademieber. 1915, S. 458—476.

[2]) E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, vierte Abhandlung, Göttinger Nachr. 1924, S. 137—150.

[3]) Vgl. die in der Math. Zeitschr. unter dem gemeinsamen Titel „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ erschienenen Arbeiten von E. Landau, erste Abhandlung **21** (1924), S. 126—132, zweite Abhandlung **24** (1926), S. 299—310; A. Walfisz, erste Abhandlung **19** (1924), S. 300—307, zweite Abhandlung **26** (1927), S. 106—124; V. Jarník **27** (1927), S. 154—160. Weiter: H. Petersson, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Abhandl. aus dem Math. Seminar in Hamburg **5** (1926), S. 116—150. Ch. H. Müntz, Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie I, Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. **24**, 2 (1925), S. 81—93 und Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 150—165.

$$(3) \qquad \mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\log^2 x\right) \quad \text{für} \quad r = 4,$$

$$(4) \qquad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \quad \text{für} \quad r \geqq 4.$$

Für $r = 4$ ist noch in einigen Spezialfällen (mit rationalen $a_{\mu,\nu}$) etwas mehr bekannt[4]).

In einer vor einigen Wochen erschienenen Arbeit[5]) hat Herr Walfisz das Problem von Formen mit *irrationalen* Koeffizienten in Angriff genommen und folgende Resultate erhalten:

Er betrachtet nur Formen von der speziellen Gestalt

$$Q(u) = \alpha u_1^2 + \sum_{\mu,\nu=2}^{r} a_{\mu,\nu} u_\mu u_\nu, \qquad \alpha > 0 \text{ irrational}, \quad a_{\mu,\nu} \text{ rational}, \quad r \geqq 10$$

und beweist:

1. $\mathsf{P}_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$.

2. Zu jedem $\varphi(x) > 0$ mit $\varphi(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$ läßt sich eine irrationale Zahl $\alpha > 0$ so finden, daß

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(\varphi(x)).$$

3. Für fast alle $\alpha > 0$ ist trotzdem[6])

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{6}{5}}\log^{\frac{1}{4}} x\right).$$

Ich habe inzwischen das Problem mit einer anderen Methode angegriffen und werde hier folgendes zeigen:

Ich betrachte ausschließlich Formen[7])

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2, \qquad \alpha_j > 0, \; r \geqq 4.$$

Für diese Formen werde ich beweisen:

1. $$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\log x\right) \quad \text{für} \quad r > 4,$$
$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\log^2 x\right) \quad \text{für} \quad r = 4. \qquad \text{(Satz 1.)}$$

---

[4]) E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttinger Nachr. 1912, S. 687—771; H. D. Kloosterman, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 519—529; A. Walfisz, Teilerprobleme, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 66—88.

[5]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, dritte Abhandlung, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 245—268.

[6]) „Fast alle" bedeutet: alle bis auf eine Menge vom Maß Null. „Maß" bedeutet in dieser Arbeit das Lebesguesche Maß.

[7]) Rationale α_j (einige oder alle) werden nicht ausgeschlossen.

Daß sich dieses Resultat nicht wesentlich verbessern läßt, zeigt die im Falle rationaler α_j gültige Formel (4).

2. Für *fast alle* $\alpha_j > 0$ ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$ (Satz 3).

Außerdem werde ich mich mit speziellen Formen der Gestalt

$$(5)\qquad Q(u) = \beta_1(u_{1,1}^2 + \dots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2(u_{1,2}^2 + \dots + u_{r_2,2}^2) + \dots + \beta_\sigma(u_{1,\sigma}^2 + \dots + u_{r_\sigma,\sigma}^2)$$

mit $\beta_j > 0$, $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ beschäftigen, für welche ich folgende, ziemlich scharfe Resultate beweisen werde:

3. Für *fast alle* $\beta_j > 0$ ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$ (Satz 2).

4. Für *fast alle* $\beta_j > 0$ ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma}\log^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} x\right) \quad \text{(Satz 4)}.$$

5. Für *alle* $\beta_j > 0$ ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma}\right) \quad \text{(Satz 5)}.$$

Ich könnte zwar auch für Formen (5) *ohne* die Voraussetzung $r_j \geqq 4$ einige Resultate bekommen, und zwar unmittelbar aus der Methode des § 5, doch verzichte ich darauf, um nicht unübersichtliche Resultate zu häufen. Ebenso könnte man ohne Mühe das x^ε im Satz 2 und 3 und das Glied $\log^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} x$ im Satz 4 noch verschärfen. Endlich ist es zweifellos möglich, die hier erhaltenen Resultate auch auf Formen von einer etwas allgemeineren Gestalt zu übertragen.

Zum Beweis der Sätze 1, 2, 3 benutze ich den bekannten Hardy-Littlewoodschen Ansatz, wie er im Falle von Formen mit rationalen Koeffizienten von Herrn Petersson (loc. cit. [3])) konsequent durchgeführt worden ist. Die erzeugende Funktion ist hier freilich keine Potenzreihe mehr, sondern eine Dirichletsche Reihe; statt der Cauchyschen Integralformel wird darum die Perronsche Formel (6) benutzt. Die Unendlichkeit des Integrationsweges bereitet hier einige Schwierigkeiten, die im § 2 überwunden werden; dann läßt sich schon Satz 1 leicht beweisen (§ 3). Dagegen brauche ich zum Beweis der Sätze 2 und 3 noch einen Hilfssatz über die Häufigkeit derjenigen Systeme von ganzen positiven Zahlen

$h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$; $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, die bei gegebenem $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\sigma$ $(\gamma_j > 0)$ die $\sigma - 1$ Ausdrücke

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \gamma_1 - \frac{h_j}{k_j} \gamma_j \right| \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

„klein" machen (§ 4).

Zum Beweis der Sätze 4, 5 benutze ich eine ganz elementare (bis auf die Benutzung eines Satzes von Herrn Khintchine bei Satz 4) Methode, die im wesentlichen auf einer Approximation der Formen (5) durch Formen mit rationalen Koeffizienten (oder vielmehr Koeffizientenverhältnissen) beruht.

§ 2.

Vorbereitungen.

Im folgenden sei immer r ganz, $r \geqq 4$; $x > 4$; $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Es sei $Q(u)$ eine positiv-definite quadratische Form von der Gestalt

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2.$$

Wir setzen noch[8])

$$A_Q(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1; \qquad J_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} = M x^{\frac{r}{2}};$$

$$\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - J_Q(x).$$

Dabei ist die Summation über alle ganzen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ zu erstrecken, für welche $Q(m) \leqq x$.

Es sei

$$\theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 s} \quad \text{für} \quad \Re(s) > 0;$$

die Dirichletsche Reihe

$$\theta(\alpha_1 s)\theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots)$$

ist für $\Re(s) > 0$ absolut konvergent und es ist

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n = A_Q(x).$$

Für jedes $x > 4$, welches sich nicht in der Form $x = \sum_{j=1}^{r} m_j^2 \alpha_j$ mit ganzen m_j darstellen läßt, gilt demnach die Formel[9])

$$(6) \qquad A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \theta(\alpha_1 s)\, \theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) \frac{e^{xs}}{s} ds.$$

---

[8]) Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

[9]) Alle benutzten Integrationswege sind geradlinig. Vgl. z. B. Hardy-Riesz, The General Theory of Dirichlet's Series, Cambridge Tracts 18 (1915), S. 12.

Wir setzen noch $\Delta(x)$ gleich der kleinsten unter den Zahlen $|x - \sum_{j=1}^{r} m_j^2 \alpha_j|$, wo die m_j unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Hilfssatz 1. *Es sei* $\gamma > 0$, $\delta \geqq 0$. *Es sei die Abschätzung*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^\gamma \log^\delta x)$$

für diejenigen x *richtig, für welche* $\Delta(x) \geqq \frac{1}{x^{\frac{r}{2}}}$; *dann ist sie auch für stetig wachsendes* x *richtig.*

Beweis. Es ist[10]) $\sum_{\frac{x}{2} \leqq Q(m) \leqq x} 1 < c x^{\frac{r}{2}}$ für $x > c$; daher gibt es auf der Strecke $\frac{x}{2} < y < x$ mindestens eine Zahl y mit $\Delta(y) > \frac{x}{c x^{\frac{r}{2}}} > \frac{1}{y^{\frac{r}{2}}}$. Gesetzt nun, die Behauptung sei falsch; dann würde es eine Folge von Zahlenpaaren $x_1, D_1, x_2, D_2, \ldots$ mit $x_n \to +\infty, D_n \to +\infty$ geben, so daß entweder

1. für alle n gelten würde

$$A_Q(x_n) > M x_n^{\frac{r}{2}} + D_n x_n^\gamma \log^\delta x_n$$

oder

2. für alle n gelten würde

$$A_Q(x_n) < M x_n^{\frac{r}{2}} - D_n x_n^\gamma \log^\delta x_n\,.$$

Aus 1. ergibt sich nun ein Widerspruch folgendermaßen: Es sei y_n die untere Grenze der y mit $y \geqq x_n$, $\Delta(y) \geqq \frac{1}{y^{\frac{r}{2}}}$. Dann wäre $\Delta(y_n) \geqq \frac{1}{y_n^{\frac{r}{2}}}$, $x_n \leqq y_n < 2x_n$ für $x_n > c$; weiter wäre

$$\Delta(y) \leqq \frac{1}{y^{\frac{r}{2}}} \leqq \frac{1}{x_n^{\frac{r}{2}}} \quad \text{für} \quad x_n < y \leqq y_n;$$

also

$$\sum_{x_n < Q(m) \leqq y_n} 1 \geqq (y_n - x_n)\, \frac{1}{2} x_n^{\frac{r}{2}} - 1\,.$$

---

[10]) Mit c bezeichne ich unterschiedslos positive, nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängige Zahlen.

Also

$$A_Q(y_n) \geqq M x_n^{\frac{r}{2}} + (y_n - x_n)\frac{1}{2} x_n^{\frac{r}{2}} - 1 + D_n x_n^\gamma \log^\delta x_n$$

$$\geqq M\left(x_n^{\frac{r}{2}} + \frac{r}{2}(y_n - x_n) y_n^{\frac{r}{2}-1}\right) + \frac{D_n}{2^{1+\gamma}} y_n^\gamma \log^\delta y_n$$

$$\geqq M y_n^{\frac{r}{2}} + \frac{D_n}{2^{1+\gamma}} y_n^\gamma \log^\delta y_n \quad \text{für} \quad y_n > c(\gamma, \delta),$$

gegen die Voraussetzung, da $\varDelta(y_n) \geqq \frac{1}{y_n^{\frac{r}{2}}}$.

Ebenso ergibt sich ein Widerspruch aus 2.: Hier sei y_n die obere Grenze der $y \leqq x_n$ mit $\varDelta(y) \geqq \frac{1}{y^{\frac{r}{2}}}$; also $\varDelta(y_n) \geqq \frac{1}{y_n^{\frac{r}{2}}}$, $\frac{x_n}{2} < y_n \leqq x_n$; $\varDelta(y) \leqq \frac{1}{y^{\frac{r}{2}}}$ für $y_n \leqq y < x_n$, alles für $x_n > c$. Also

$$\sum_{y_n < Q(m) \leqq x_n} 1 \geqq (x_n - y_n)\frac{1}{2} y_n^{\frac{r}{2}} - 1,$$

$$A_Q(y_n) \leqq M x_n^{\frac{r}{2}} + \frac{r}{2}(y_n - x_n) x_n^{\frac{r}{2}-1} + 1 - D_n y_n^\gamma \log^\delta y_n$$

$$\leqq M y_n^{\frac{r}{2}} - \frac{D_n}{2} y_n^\gamma \log^\delta y_n,$$

wieder gegen die Voraussetzung.

Hilfssatz 2. *Wenn x die Zahlen mit $\varDelta(x) \geqq \frac{1}{x^{\frac{r}{2}}}$ durchläuft, so ist*

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i x^r}^{\frac{1}{x} + i x^r} \theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) \frac{e^{xs}}{s} ds + O(1).$$

Beweis. Wegen (6) und weil der Integrand für konjugiert komplexe Werte von s konjugiert komplexe Werte annimmt, genügt es, für die betreffenden x zu beweisen, daß

$$(7) \qquad \left| \int_{\frac{1}{x} + i x^r}^{\frac{1}{x} + i\xi} \theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) \frac{e^{xs}}{s} ds \right| < c$$

für alle $\xi > x^r$ und alle $x > c$. Die linke Seite von (7) ist gleich

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\left|\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}+ix^r}^{\frac{1}{x}+i\xi}\frac{e^{(x-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j)\left(\frac{1}{x}+ti\right)}}{s}\,ds\right|\\ &\leqq\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}\left|\int_{x^r}^{\xi}\frac{e^{(x-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j)\left(\frac{1}{x}+ti\right)}}{t}\,dt\right|+\frac{1}{x}\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}\left|\int_{x^r}^{\xi}\frac{e^{(x-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j)\left(\frac{1}{x}+ti\right)}}{t\left(\frac{1}{x}+it\right)}\,dt\right|\\ &\leqq c\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j\cdot\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^r\,|x-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j|}+\frac{1}{x^{r+1}}\right).\end{aligned}\right.$$

Es ist aber erstens $\dfrac{1}{|x-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j|}\leqq x^{\frac{r}{2}}$; zweitens $\sum\limits_{Q(m)\leqq 2^n x}1<c(2^n x)^{\frac{r}{2}}$ für $n\geqq 0$, $x>c$. Also

$$\sum_{(m)=-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_j m_j^2\alpha_j\cdot\frac{1}{x}}<c\sum_{n=1}^{\infty}(2^n x)^{\frac{r}{2}}e^{-2^{n-1}}<c\,x^{\frac{r}{2}};$$

also ist die rechte Seite in (8) kleiner als

$$c\,x^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{x^r}x^{\frac{r}{2}}+\frac{1}{x^{r+1}}\right)<c\quad\text{für}\quad x>c;$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 3[11]. *Es sei A eine positive Zahl; dann ist*

$$(9)\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-\frac{A}{\sqrt{x}}i}^{\frac{1}{x}+\frac{A}{\sqrt{x}}i}\theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s)\ldots\theta(\alpha_r s)\,\frac{e^{xs}}{s}\,ds=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}}+O\left(x^{\frac{r}{4}}\right).$$

Beweis. Nach einer bekannten Transformationsformel ist

$$\theta(\alpha_j s)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}\,(1+\psi_j(s)),$$

wo

$$\psi_j(s)=2\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2\frac{\pi^2}{\alpha_j s}};$$

[11] Vgl. Petersson, loc. cit. [3], § 2, wo analoge Rechnungen vorkommen.

wir setzen $s = \frac{1}{x} + ti$; dann ist auf unserem Integrationsweg[12])

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1+x^2t^2} > c_1 \quad \text{für} \quad x > c_1.$$

Also

$$|\psi_j(s)| \leqq 2\, e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j(1+x^2t^2)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 c_1}{\alpha_j}(m^2-1)} < c_1 e^{-c_1 \frac{x}{1+x^2t^2}}.$$

Demnach ist die linke Seite von (9) gleich

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}} \int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+1}} \left(1 + \chi \cdot e^{-c_1 \frac{x}{1+x^2t^2}}\right) dt,$$

wo $|\chi| < c_1$. Hier ist erstens

$$\int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \left| \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)} \cdot e^{-c_1 \frac{x}{1+x^2t^2}}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+1}} \right| dt = O\left(x^{\frac{r}{2}}\right) \int_0^{A\sqrt{x}} \frac{e^{-c_1 \frac{x}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}\, dt; \tag{10}$$

Das Maximum des Integranden für $t > 0$ liegt für $x > c_1$ bei $t^2 + 1 = \frac{c_1 x}{\frac{r}{2}+1}$ und ist gleich $O\left(x^{-\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}\right)$; daher ist die linke Seite von (10) gleich $O\left(x^{\frac{r}{4}}\right)$. Weiter ist

$$\left| \int_{-\infty}^{-\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+1}}\, dt \right| = \left| \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+1}}\, dt \right| = O \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}+1}}\, dt = O\left(x^{\frac{r}{4}}\right).$$

[12]) Mit c_1 bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von α_j, r und A $(j = 1, 2, \ldots, r)$ abhängen.

Endlich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+1}}\, dt = \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} x^{\frac{r}{2}},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Wenn für irgendeine Form*

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2 \qquad (\alpha_j > 0),$$

für irgendein $A > 0$, *irgendein* $\gamma \geqq \frac{r}{4}$ *und irgendein* $\delta \geqq 0$ *gilt*

$$\int_{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+ix^r} |\theta(\alpha_1 s)\ldots\theta(\alpha_r s)| \frac{ds}{|s|} = O(x^\gamma \log^\delta x),$$

so ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^\gamma \log^\delta x).$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 1, 2, 3, wenn wir noch bemerken, daß der Integrand für konjugiert komplexe Werte von s konjugiert komplexe Werte annimmt und $|e^{xs}| = e$ ist.

§ 3.

Allgemeine Bemerkungen und Satz 1.

Für das Folgende (§ 3—6) machen wir folgende Verabredungen. Wir legen, bei gegebenem $x > 4$, auf das Intervall $-\infty < t < +\infty$ alle Fareybrüche $\frac{h}{k}$ mit $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$ und konstruieren noch ihre Medianten, d. h. die Punkte $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte von unseren Fareybrüchen sind. Mit $\mathfrak{B}_{h,k}$ bezeichnen wir das linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, dessen Endpunkte zwei benachbarte Medianten sind und welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\theta}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\theta'}{k\sqrt{x}} \right),$$

wo θ, θ' noch von h, k, x abhängen, aber den Ungleichungen $\frac{1}{2} \leqq \theta \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \theta' \leqq 1$ genügen. Wenn a_1, a_2, a_3 drei reelle Zahlen sind, $a_1 > 0$, so wollen wir, wenn J das Intervall $\langle a_2, a_3)$ ist, mit $a_1 J$ das Intervall $\langle a_1 a_2, a_1 a_3)$ bezeichnen.

Es gilt nun bekanntlich[13]) folgendes: Wenn $\binom{l\,m}{n\,p}$ eine Modulsubsti-

[13]) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, S. 183—185. Leipzig: B. G. Teubner 1903.

tution ist mit $n > 0$, $\frac{p}{n} = \frac{2h}{k}$ $\left(\text{also } n = k \text{ oder } n = \frac{k}{2}\right)$, so ist

$$\theta(\alpha_j s) = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{k\left(\alpha_j s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)}} \bar{\theta}\left(-\pi i \frac{l\alpha_j s - m\pi i}{n\alpha_j s - p\pi i}\right), \tag{11}$$

wo $\mathfrak{B}, \bar{\theta}$ noch von h, k, l, m, n, p abhängen, dabei aber $|\mathfrak{B}|$ kleiner als eine absolute Konstante ist und $\bar{\theta}(s)$ eine der folgenden Gestalten hat:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\theta}(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 s} \quad \text{oder} \quad \bar{\theta}(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{-m^2 s} \quad \text{oder} \\ \qquad \bar{\theta}(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 s}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Wenn nun $s = \frac{1}{x} + ti$ und t im Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, so ist

$$\Re\left(-\pi i \frac{l\alpha_j s - m\pi i}{n\alpha_j s - p\pi i}\right) = \frac{\pi^2 \alpha_j}{x n^2\left(\frac{\alpha_j^2}{x^2} + \left(\alpha_j t - \frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)} > c;$$

denn es ist

$$\left|\alpha_j t - \frac{2\pi h}{k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}}, \qquad 0 < n \leqq k \leqq \sqrt{x}.$$

Daher ist für $s = \frac{1}{x} + ti$, t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ nach (11) und (12)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right)^2}}, \tag{13}$$

also

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{\left|t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right|}}\right) \quad \left(\operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{0}\right) = a\right). \tag{14}$$

Satz 1. *Es sei* $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2$, $\alpha_j > 0$, $r \geqq 4$; *dann ist*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1} \log x\right) \quad \textit{für} \quad r > 4,$$

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1} \log^2 x\right) \quad \textit{für} \quad r = 4.$$

Beweis. Ich setze $A = \operatorname{Max} \frac{2\pi}{\alpha_j}$; dann ist

$$\int_{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+ix^r} \left|\frac{\theta(\alpha_1 s)\ldots\theta(\alpha_r s)}{s} ds\right| \leqq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left|\frac{\theta^r(\alpha_j s)}{s}\right| dt, \tag{15}$$

wo $s = \frac{1}{x} + it$ $\left(\text{denn } \sqrt[r]{a_1 a_2 \ldots a_r} \leqq \frac{1}{r}(a_1 + a_2 + \ldots + a_r) \text{ für } a_j \geqq 0\right)$.

Aber

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left| \frac{\theta^r(\alpha, s)}{s} \right| dt \leqq \sum_{h,k} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}} \left| \frac{\theta^r(\alpha, s)}{s} \right| dt,$$

wo ich nur über diejenigen Paare von h, k summiere, für welche mindestens ein Punkt von $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ im Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, x^r\right)$ liegt. Es ist also sicher $h > 0$, da $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{0,1}$ im Intervall $\left\langle -\frac{2\pi}{\alpha_j \sqrt{x}}, \frac{2\pi}{\alpha_j \sqrt{x}} \right)$ liegt. Weiter ist für t aus $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ (wegen $x > 4$) $|s| > |t| \geqq \frac{2\pi}{\alpha_j}\left(\frac{h}{k} - \frac{1}{k\sqrt{x}}\right) > \frac{\pi}{\alpha_j} \frac{h}{k}$.

Nach (13) gilt also

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}} \left| \frac{\theta^r(\alpha, s)}{s} \right| dt < c \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}} \frac{k}{h} \frac{dt}{k^{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right)^2\right)^{\frac{r}{4}}}$$

$$< \frac{c}{k^{\frac{r}{2}-1} h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + t^2\right)^{\frac{r}{4}}} = \frac{c\, x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1} h}.$$

Dieser Ausdruck ist über einige $h > 0$ zu summieren, wobei aber stets $h < c\, x^{r+\frac{1}{2}}$; dann über k mit $0 < k \leqq \sqrt{x}$. Das ergibt

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left| \frac{\theta^r(\alpha, s)}{s} \right| dt < c\, x^{\frac{r}{2}-1} \log x \, \Psi(x),$$

wo $\Psi(x) = 1$ für $r > 4$, $\Psi(x) = \log x$ für $r = 4$. Wegen (15) und Hilfssatz 4 ist damit der Satz 1 bewiesen.

§ 4.

Ein Hilfssatz über diophantische Approximationen.

Wir betrachten nun einen σ-dimensionalen Euklidischen Raum R_σ; seine Punkte seien durch ihre rechtwinkligen Koordinaten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\sigma$ charakterisiert. Es sei $\sigma > 1$. Es seien weiter drei Zahlen C, D, a gegeben mit $0 < C < D$, $a > 0$; mit W bezeichnen wir den Würfel $C \leqq \gamma_j \leqq D$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; mit W_1 bezeichnen wir den Würfel $C \leqq \gamma_j \leqq D$ $(j = 2, \ldots, \sigma)$, den wir als Punktmenge eines $(\sigma - 1)$-dimensionalen Raumes $R_{1,\sigma-1}$ betrachten. Es seien nun ganze nichtnegative Zahlen[14])

$$h_1 > 0, h_2 > 0, \ldots, h_\sigma > 0, \quad k_1 > 0, k_2 > 0, \ldots, k_\sigma > 0,$$
$$n_2, n_3, \ldots, n_\sigma, \ \varrho$$

und eine Zahl γ_1 mit $C \leqq \gamma_1 \leqq D$ gegeben. Wir bezeichnen mit $M(h; k; n; \varrho; \gamma_1)$ die Menge derjenigen Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ von W_1, für welche gilt

$$(16) \qquad \left|\frac{h_1}{k_1}\gamma_1 - \frac{h_j}{k_j}\gamma_j\right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma).$$

Das Maß der Menge $M(h; k; n; \varrho; \gamma_1)$ im $(\sigma - 1)$-dimensionalen Raum $R_{1,\sigma-1}$ ist höchstens

$$\prod_{j=2}^{\sigma} \frac{2a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho}.$$

Nun sei $M(h; k; n; \varrho)$ die Menge von allen Punkten $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\sigma)$ des σ-dimensionalen Würfels W, in welchen (16) gilt; ihr Maß in R_σ ist höchstens gleich

$$\int_C^D \prod_{j=2}^{\sigma} \frac{2a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho}\, d\gamma_1;$$

also[15])

$$\mathrm{m}\, M(h; k; n; \varrho) \leqq \frac{c_2}{2^{n_2+n_3+\cdots+n_\sigma} h_2 h_3 \ldots h_\sigma 2^{\varrho(\sigma-1)}}.$$

Aus (16) folgt noch

$$\left|\frac{h_1}{k_1}\frac{k_j}{h_j}\gamma_1 - \gamma_j\right| < \frac{a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma);$$

für $\varrho > c_2$ ist also, wenn $M(h; k; n; \varrho)$ nicht leer ist,

$$(17) \qquad c_2 \frac{h_1}{k_1} < \frac{h_j}{k_j} < c_2 \frac{h_1}{k_1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

Wir beschränken uns im folgenden auf solche ϱ.

Es sei nun l; $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$; $n_2, n_3, \ldots, n_\sigma$; ϱ ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen. Wir betrachten alle Mengen $M(h; k; n; \varrho)$, für welche gilt

$$(18) \qquad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}; \quad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Wenn ein solches $M(h; k; n; \varrho)$ nicht leer sein soll, so muß (17) gelten, also

$$c_2 2^{l+m_j-m_1} < h_j < c_2 2^{l+m_j-m_1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma).$$

---

[14]) Man übersehe nicht die Unsymmetrie in bezug auf den Index 1!

[15]) $\mathrm{m}\, M$ sei das Maß von M in R_σ; mit c_2 bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von σ, C, D, a abhängen.

Die Summe der Maße aller dieser $M(h;k;n;\varrho)$ ist daher höchstens gleich

$$\frac{c_2\, 2^{(\sigma-1)m_1}}{2^{n_2+n_3+\dots+n_\sigma}\, 2^{(\sigma-1)l}\, 2^{(\sigma-1)\varrho}\, 2^{m_2+m_3+\dots+m_\sigma}} \cdot \frac{2^{\sigma l}\, 2^{m_2+m_3+\dots+m_\sigma}\, 2^{m_1+m_2+\dots+m_\sigma}}{2^{(\sigma-1)m_1}}$$

$$= c_2 \frac{2^l\, 2^{m_1+m_2+\dots+m_\sigma}}{2^{n_2+n_3+\dots+n_\sigma}\, 2^{(\sigma-1)\varrho}} = \mathfrak{L}.$$

Wir betrachten nun die Menge $\overline{M}(l;m;n;\varrho)$ derjenigen Punkte des Würfels W, in welchen die Ungleichungen (16) für mehr als

$$\left((\varrho+1)(l+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=2}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2 \frac{2^l\, 2^{m_1+m_2+\dots+m_\sigma}}{2^{n_2+n_3+\dots+n_\sigma}\, 2^{(\sigma-1)\varrho}} = \mathfrak{M}$$

Wertsysteme von h_j, k_j mit (18) erfüllt sind; d. h. die Menge der Punkte, die in mehr als $\mathfrak{M}$ Mengen $M(h;k;n;\varrho)$ mit (18) enthalten ist; das Maß dieser Menge ist offenbar höchsten $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{M}}$, d. h.

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{m}\,\overline{M}(l;m;n;\varrho) \leqq \frac{c_2}{\left((\varrho+1)(l+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=2}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2};$$

alles für $\varrho > c_2$. Der Ausdruck rechts in (19) ist aber das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe. Daher bilden diejenigen Punkte von W, die in unendlich vielen Mengen $\overline{M}(l;m;n;\varrho)$ mit $\varrho > c_2$ enthalten sind, eine Punktmenge vom Maß Null, die wir mit $N(C,D,a)$ bezeichnen. Insbesondere haben wir also folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 5. *Es sei* $0 < C < D$, $a > 0$, σ *ganz*, $\sigma > 1$. *Dann gibt es im Würfel* W:

$$C \leqq \gamma_j \leqq D \qquad (j = 1, 2, \dots, \sigma)$$

des σ-dimensionalen Raumes R_σ eine Punktmenge $N(C,D,a)$ vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit:

Zu jedem Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\sigma)$ von $W - N(C, D, a)$ gibt es eine Zahl

$$\varrho_0 = \varrho_0(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\sigma, a),$$

so daß für jedes System von nichtnegativen ganzen Zahlen

$$l;\, m_1, m_2, \dots, m_\sigma;\, n_2, n_3, \dots, n_\sigma;\, \varrho$$

mit $\varrho > \varrho_0$ die Ungleichungen

$$\left|\frac{h_1}{k_1}\gamma_1 - \frac{h_j}{k_j}\gamma_j\right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \dots, \sigma),$$

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \quad 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1}, \quad 2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}, \quad \dots,$$

$$2^{m_\sigma} \leqq k_\sigma < 2^{m_\sigma+1}$$

höchstens

$$\mathfrak{M} = \left((\varrho+1)(l+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=2}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2 \frac{2^l\, 2^{m_1+m_2+\dots+m_\sigma}}{2^{n_2+n_3+\dots+n_\sigma}\, 2^{(\sigma-1)\varrho}}$$

Lösungen in ganzen h_j, k_j $(j=1,2,\dots,\sigma)$ *besitzen.*

§ 5.

Satz 2.

Hilfssatz 6. *Es sei* $\sigma \geqq 2$; $r_j \geqq 4\,(j=1,2,\dots,\sigma)$; $\sum_{j=1}^{\sigma} r_j = r$; r_j, σ *ganz. Dann gibt es in dem* σ*-dimensionalen Raum der Punkte* $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\sigma)$ *eine Punktmenge* N *vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit: Für jeden Punkt* $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\sigma)$ *mit* $\beta_j>0$ $(j=1,2,\dots,\sigma)$, *welcher nicht zu* N *gehört, und jedes* $\varepsilon>0$ *ist*

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left|\frac{\theta^{r_1}(\beta_1 s)\,\theta^{r_2}(\beta_2 s)\dots\theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s)}{s}\right| dt = O\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma+\varepsilon}\right), \tag{20}$$

wo $A = \max \frac{2\pi}{\beta_j}$, $s = \frac{1}{x}+it$.

Aus Hilfssatz 6 folgt dann wegen Hilfssatz 4 sofort

Satz 2. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j=1,2,\dots,\sigma)$; $\sum_{j=1}^{\sigma} r_j = r$; r_j, σ *ganz. Es sei*

$$Q(u) = \beta_1(u_{1,1}^2+u_{2,1}^2+\dots+u_{r_1,1}^2)+\beta_2(u_{1,2}^2+u_{2,2}^2+\dots+u_{r_2,2}^2)$$
$$+\dots+\beta_\sigma(u_{1,\sigma}^2+u_{2,\sigma}^2+\dots+u_{r_\sigma,\sigma}^2).$$

Dann gibt es in dem σ*-dimensionalen Raum der Punkte* $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\sigma)$ *eine Punktmenge* N *vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit:*

Für jeden Punkt $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\sigma)$ *mit* $\beta_j>0$ $(j=1,2,\dots,\sigma)$, *welcher nicht zu* N *gehört und jedes* $\varepsilon>0$ *ist*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma+\varepsilon}\right).$$

Beweis des Hilfssatzes 6. Weil eine Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Nullmengen[16]) wieder eine Nullmenge ist, genügt es zu zeigen: Zu jedem $\bar{C},\bar{D}$ mit $0<\bar{C}<\bar{D}$ gibt es eine Nullmenge $\bar{N}(\bar{C},\bar{D})$, so daß in jedem Punkt des Würfels $\bar{W}$: $\bar{C}\leqq\beta_j\leqq\bar{D}$ $(j=1,2,\dots,\sigma)$, der nicht zu $\bar{N}(\bar{C},\bar{D})$ gehört, für jedes $\varepsilon>0$ die Beziehung (20) erfüllt ist.

---

[16]) Statt „Menge vom Maß Null" sage ich im folgenden oft „Nullmenge".

Es sei dauernd $x > 4$ und wir greifen aus $\overline{W}$ irgendeinen Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ heraus. Zu jedem t unseres Integrationsintervalls $(\operatorname{Max} \frac{2\pi}{\beta_j} \frac{1}{\sqrt{x}}, x^r)$ und zu jedem j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ gibt es genau ein Paar h_j, k_j so, daß t im Intervall $\frac{2\pi}{\beta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ liegt; diese Werte h_j, k_j sind also bestimmte Funktionen von t, die freilich noch von $x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ abhängen. Wir bilden nun zu jedem System von ganzen Zahlen

$$n_1, n_2, \ldots, n_\sigma; \quad h_1, h_2, \ldots, h_\sigma; \quad k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$$

mit

$$h_j \geqq 0, \quad 0 < k_j \leqq \sqrt{x}, \quad (h_j, k_j) = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

die Menge derjenigen t unseres Integrationsintervalls, welche im Durchschnitt der σ Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ liegen und die Ungleichungen

$$(21) \qquad \frac{1}{2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left| \frac{\beta_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j} \right| \leqq \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

erfüllen. Diese Menge bezeichnen wir mit $Q(h; k; n)$. Weil in $\frac{2\pi}{\beta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ gilt

$$\left| \frac{\beta_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j} \right| \leqq \frac{1}{k_j \sqrt{x}},$$

so sind diejenigen Mengen $Q(h; k; n)$ leer, für welche mindestens eine der Zahlen n_j negativ ist; ebenso sind diejenigen Mengen $Q(h; k; n)$ leer, für welche mindestens eine der Zahlen h_j gleich Null ist. Weiter kommen nur die h_j mit $h_j < \bar{c}_2 x^{r + \frac{1}{2}}$ in Betracht[17]). Endlich ist jeder Punkt t unseres Integrationsintervalls in genau einer der abzählbar vielen Mengen $Q(h; k; n)$ enthalten, ausgenommen die endlich vielen Punkte $t = \frac{2\pi}{\beta_j} \frac{h_j}{k_j}$.

Es genügt also zu zeigen: für fast alle Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ von $\overline{W}$ gilt

$$\sum_{(h), (k), (n)} \int_{Q(h; k; n)} \left| \frac{\vartheta^{r_1}(\beta_1 s) \ldots \vartheta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s)}{s} \right| dt = O\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma + \varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Dabei können wir uns nach dem eben Gesagten auf die $Q(h; k; n)$ mit $h_j > 0$, $n_j \geqq 0$, $h_j < \bar{c}_2 x^{r + \frac{1}{2}}$ beschränken. Aus Symmetriegründen dürfen und wollen wir uns sogar auf die $Q(h; k; n)$ mit

$$(22) \qquad 2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_2} k_2 \geqq \ldots \geqq 2^{n_\sigma} k_\sigma$$

beschränken.

---

[17]) $\bar{c}_2$ bedeuten positive, nur von $r_j, \sigma, \overline{C}, \overline{D}$ abhängige Zahlen.

Es sei nun l; $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$; $n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$ ein System von ganzen nichtnegativen Zahlen; wir wollen sagen, daß eine Menge $Q(h; k; n)$ mit (22) zur Klasse $[l; m; n]$ gehört, wenn

$$(23) \qquad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \qquad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Jede von unseren Mengen $Q(h; k; n)$ gehört also genau einer Klasse an. Wenn eine Menge $Q(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sein soll, so muß nach (21) (wegen $2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_j} k_j$ für $j = 2, 3, \ldots, \sigma$) gelten

$$\left| \frac{1}{\beta_1} \frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\beta_j} \frac{h_j}{k_j} \right| < \frac{\bar{c}_2}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

wo die ganze Zahl ϱ durch $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ definiert ist. Wenn wir nun den Hilfssatz 5 mit $\gamma_j = \frac{1}{\beta_j}$, $C = \frac{1}{\bar{D}}$, $D = \frac{1}{\bar{C}}$, $a = \bar{c}_2$ anwenden, finden wir:

Es gibt im Würfel $\overline{W}$ $(\bar{C} \leqq \beta_j \leqq \bar{D})$ eine Punktmenge $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ von folgender Beschaffenheit:

1. Wenn der Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ die Menge $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ durchläuft, so durchläuft der Punkt $\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_\sigma}\right)$ eine Menge vom Maß Null.

2. Zu jedem Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ der Menge $\overline{W} - \bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ gibt es eine Zahl

$$\varrho_0 = \varrho_0(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma; \bar{C}, \bar{D}, \sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma),$$

so daß für alle $\varrho \geqq \varrho_0$ (also für alle $x \geqq 2^{(\varrho_0+1)}$) und für jedes System von ganzen nichtnegativen Zahlen

$$l;\ m_1, m_2, \ldots, m_\sigma;\ n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$$

höchstens

$$\mathfrak{M} = 2^{\sigma-1} \left(\log x \, (l+1) \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j + 1) \prod_{j=2}^{\sigma} (n_j + 1) \right)^2 \frac{2^{l+m_1+m_2+\ldots+m_\sigma}}{2^{n_2+\ldots+n_\sigma} x^{\frac{\sigma-1}{2}}}$$

Mengen $Q(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sind.

Aus 1. folgt freilich, daß auch

3. die Menge $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ das Maß Null hat.

Es sei nun $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ im Rest des Beweises ein fester Punkt von $\overline{W} - \bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$; und es sei $x > \operatorname{Max}(4, 2^{\varrho_0+1})$. Wir vereinigen die Klassen $[l; m; n]$ in Oberklassen $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{\sigma\}$ folgendermaßen: wenn genau τ von den σ Zahlen $2^{m_j+n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ größer oder gleich $\sqrt{x}$ sind, so werde die Klasse $[l; m; n]$ zur Oberklasse $\{\tau\}$ gezählt. Wegen (22), (23) ist offenbar

$$2^{n_1+m_1} \geqq 2^{n_2+m_2} \geqq \ldots \geqq 2^{n_\sigma+m_\sigma}.$$

Es genügt uns also zu zeigen: für unseren Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$, für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes τ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots, \sigma)$ ist

$$(24)\qquad \sum \int\limits_{Q(h;k;n)} \left| \frac{\theta^{r_1}(\beta_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s)}{s} \right| dt = O\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma + \varepsilon}\right),$$

wenn $Q(h; k; n)$ alle nicht leeren Mengen der Oberklasse $\{\tau\}$ durchläuft. Für ein $Q(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$, die zur Oberklasse $\{\tau\}$ gehört, ist nach (14) der Integrand kleiner als[18])

$$c_3 \frac{2^{m_1}}{2^l} \frac{x^{\frac{r_1}{2} + \ldots + \frac{r_\tau}{2}}}{2^{m_1 \frac{r_1}{2} + \ldots + m_\tau \frac{r_\tau}{2}}} \cdot x^{\frac{r_{\tau+1}}{4} + \ldots + \frac{r_\sigma}{4}} \cdot 2^{n_{\tau+1} \frac{r_{\tau+1}}{2} + \ldots + n_\sigma \frac{r_\sigma}{2}};$$

das Maß von $Q(h; k; n)$ ist wegen (21) kleiner als

$$\frac{c_3}{2^{m_1 + n_1} \sqrt{x}};$$

endlich ist die Anzahl der nicht leeren $Q(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ höchstens $\mathfrak{M}$.

Also ist der Beitrag aller $Q(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ zum Integral auf der linken Seite von (24) höchstens gleich

$$(25)\qquad \begin{cases} c_3 x^{\frac{r_1}{2} + \ldots + \frac{r_\tau}{2} + \frac{r_{\tau+1}}{4} + \ldots + \frac{r_\sigma}{4} - \frac{\sigma}{2}} \prod\limits_{j=1}^{\tau} \dfrac{1}{2^{n_j + m_j\left(\frac{r_j}{2} - 1\right)}} \cdot \prod\limits_{j=\tau+1}^{\sigma} 2^{n_j\left(\frac{r_j}{2} - 1\right) + m_j} \\ \qquad \times \log^2 x \left((l+1) \prod\limits_{j=1}^{\sigma} (m_j + 1) \prod\limits_{j=2}^{\sigma} (n_j + 1)\right)^2. \end{cases}$$

Diesen Ausdruck sollen wir nun über die nichtnegativen ganzen Zahlen

$$l;\ m_1, m_2, \ldots, m_\sigma;\ n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$$

summieren, wobei zu beachten ist

$$2^{m_j + n_j} \geqq \sqrt{x} \ \text{ für } j \leqq \tau; \quad 2^{m_j + n_j} < \sqrt{x} \ \text{ für } j > \tau;$$

$$2^{m_j} \leqq \sqrt{x} \ \text{ für } j = 1, 2, \ldots, \sigma; \ \ 2^l < c_3 x^{r + \frac{1}{2}}.$$

Es sei nun $1 > \varepsilon > 0$, $\eta = \frac{\varepsilon}{\sigma + 2}$. Mit $c_3(\varepsilon)$ bezeichne ich unterschiedslos positive, nur von $\varepsilon, \beta_j, r_j, \sigma$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ abhängige Zahlen. Die angekündigte Summation ergibt:

---

[18]) Denn es ist $|s| > t \geqq \frac{2\pi}{\beta_1}\left(\frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{k_1\sqrt{x}}\right) > c_3 \frac{h_1}{k_1}$; mit c_3 bezeichne ich unterschiedslos positive, nur von β_j, r_j, σ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ abhängige Zahlen.

$$\sum_{2^l < c_3 x^{r+\frac{1}{2}}} (l+1)^2 < c_3 \log^3 x < c_3(\varepsilon) x^\eta;$$

$$\sum_{\substack{2^{m_j+n_j} \geqq \sqrt{x} \\ 2^{m_j} \leqq \sqrt{x}}} \frac{(m_j+1)^2 (n_j+1)^2}{2^{n_j+m_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}} < c_3(\varepsilon) \log^2 x \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}} \sum_{2^{n_j} \geqq \frac{\sqrt{x}}{2^{m_j}}} \frac{1}{2^{n_j(1-\eta)}}$$

$$< c_3(\varepsilon) \frac{x^\eta}{\sqrt{x}} \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2}-2+\eta\right)}} < c_3(\varepsilon) \frac{x^\eta}{\sqrt{x}};$$

$$\sum_{2^{m_j+n_j} < \sqrt{x}} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 \, 2^{n_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)} 2^{m_j} < c_3 \log^4 x \cdot \sqrt{x} \sum_{2^{n_j} < \sqrt{x}} 2^{n_j\left(\frac{r_j}{2}-2\right)}$$

$$< c_3(\varepsilon) x^{\frac{r_j}{4}-\frac{1}{2}+\eta}.$$

(Für $j=1$ haben wir sogar den überflüssigen Faktor $(n_j+1)^2$ hinzugefügt; man vergesse bei der Summation nicht die Bedingungen $r_j \geqq 4$.)

Aus diesen drei Abschätzungen sieht man aber, daß die durchzuführende Summation des Ausdruckes (25) höchstens

$$c_3(\varepsilon) x^{\frac{r_1}{2}+\dots+\frac{r_\tau}{2}+\frac{r_{\tau+1}}{4}+\dots+\frac{r_\sigma}{4}-\frac{\sigma}{2}} x^{2\eta} \prod_{j=1}^{\tau} \left(\frac{x^\eta}{\sqrt{x}}\right) \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} \left(x^{\frac{r_j}{4}-\frac{1}{2}+\eta}\right) = c_3(\varepsilon) x^{\frac{r}{2}-\sigma+\varepsilon}$$

ergibt, w. z. b. w.

§ 6.

Satz 3.

Hilfssatz 7. *Es sei r ganz, $r \geqq 4$. Dann gibt es im r-dimensionalen Raum der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ eine Punktmenge N vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit: Für jeden Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ mit $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \dots, r)$, der nicht zu N gehört, und jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left| \frac{\theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s) \dots \theta(\alpha_r s)}{s} \right| dt = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right);$$

dabei ist $s = \frac{1}{x} + ti$, $A = \operatorname{Max} \frac{2\pi}{\alpha_j}$.

Nach Hilfssatz 4 folgt daraus sofort

Satz 3. *Es sei r ganz, $r \geqq 4$. Dann gibt es im r-dimensionalen Raum der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ eine Punktmenge N vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit:*

Es sei $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *ein Punkt mit* $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, *der nicht in* N *liegt*; *es sei* $\varepsilon > 0$; *endlich sei*

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2.$$

Dann ist

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right).$$

Beweis des Hilfssatzes 7. Wir wenden den Hilfssatz 6 mit $r_j = 4$, α_j statt β_j, r statt σ und $4r$ statt r an; N sei die dort erklärte Menge vom Maß Null, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ ein Punkt mit $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, der nicht zu N gehört; dann ist nach dem Hilfssatz 6

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left|\frac{\theta^4(\alpha_1 s)\ldots\theta^4(\alpha_r s)}{s}\right| dt \leqq \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^{4r}} \left|\frac{\theta^4(\alpha_1 s)\ldots\theta^4(\alpha_r s)}{s}\right| dt$$

$$= O\left(x^{\frac{4r}{2}-r+\varepsilon}\right) = O(x^{r+\varepsilon}).$$

Nach einer Hölderschen Ungleichung [19]) ist aber für $a_\nu \geqq 0$, $x_\nu \geqq 0$, $m > 1$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu\right)^m \leqq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^m \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{m-1}.$$

Durch Grenzübergang ergibt sich daraus sofort eine analoge Ungleichung für Integrale aus nichtnegativen Funktionen, aus welcher sich ergibt:

$$\left(\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left|\frac{\theta(\alpha_1 s)\ldots\theta(\alpha_r s)}{s}\right| dt\right)^4 \leqq \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left|\frac{\theta^4(\alpha_1 s)\ldots\theta^4(\alpha_r s)}{s}\right| dt \left(\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^r} \left|\frac{dt}{s}\right|\right)^3$$

$$= O(x^{r+\varepsilon})\cdot O(x^{\varepsilon}) = O(x^{r+4\varepsilon}),$$

w. z. b. w.

§ 7.

Satz 4.

Satz 4. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $\sum_{j=1}^{\sigma} r_j = r$; σ, r_j *ganz. Es sei*

$$Q(u) = \beta_1(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2(u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2}^2) + \ldots$$
$$+ \beta_\sigma(u_{1,\sigma}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2).$$

Dann gibt es eine Punktmenge P *des* σ*-dimensionalen Raumes der Punkte* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ *vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit*:

[19]) O. Hölder, Über einen Mittelwertsatz, Göttinger Nachrichten 1889, S. 38—47; vgl. besonders S. 44.

Wenn $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *und der Punkt* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ *nicht zu* P *gehört, so ist*

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma} \log^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} x\right).$$

Beweis. Herr Khintchine[20]) hat bewiesen: es gibt im Raum der Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ eine Punktmenge P vom Maß Null und von folgender Beschaffenheit:

Zu jedem Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$, der nicht zu P gehört, gibt es eine Folge von Systemen von ganzen Zahlen

$$(26)\quad \begin{cases} \qquad p_{2,n}, p_{3,n}, \ldots, p_{\sigma,n}, q_n & (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ \text{mit} \quad q_n \to +\infty, \quad \left|\frac{\beta_j}{\beta_1} - \frac{p_{j,n}}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} \log^{\frac{1}{\sigma-1}} q_n} & (j = 2, 3, \ldots, \sigma). \end{cases}$$

Wir nehmen ein solches System $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ und eine zugehörige Folge (26). Es sei

$$Q_n(u) = \beta_1 \Big(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2 + \frac{p_{2,n}}{q_n}(u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2}^2) + \ldots$$
$$+ \frac{p_{\sigma,n}}{q_n}(u_{1,\sigma}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2)\Big);$$

für ganzzahlige Werte von $u_{i,k}$ (d. h. in jedem Gitterpunkt) nimmt diese Form einen Wert von der Gestalt $\beta_1 \frac{m}{q_n}$ (m ganz) an. Es ist

$$|Q_n(u) - Q(u)| \leqq \frac{\beta_1}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} \log^{\frac{1}{\sigma-1}} q_n} (u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2)$$
$$\leqq \frac{Q(u)}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} \log^{\frac{1}{\sigma}} q_n} \quad \text{für} \quad n > c_3.$$

Es sei M_n ganz, $M_n \leqq q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} \log^{\frac{1}{\sigma+1}} q_n < M_n + 1$. Wenn

$$\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n},$$

so ist

$$\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\left(1 - \frac{1}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} \log^{\frac{1}{\sigma}} q_n}\right) \leqq Q_n(u) \leqq \beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\left(1 + \frac{1}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} \log^{\frac{1}{\sigma}} q_n}\right),$$

[20]) A. Khintchine, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 706—714. Sein Resultat ist noch schärfer und in symmetrischer Form dargestellt.

also (wenn sich das Zeichen o auf wachsendes n bezieht)

$$\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3} + o(1)}{q_n} \leqq Q_n(u) \leqq \beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3} + o(1)}{q_n},$$

also

$$\beta_1 \frac{M_n}{q_n} < Q_n(u) < \beta_1 \frac{M_n + 1}{q_n}$$

für $n > c_3$. In dem Gebiet

$$\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}$$

liegen also für $n > c_3$ keine Gitterpunkte; also ist

$$A_Q\left(\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right) = A_Q\left(\beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right);$$

dagegen ist

$$J_Q\left(\beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right) - J_Q\left(\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right) = c_3 \frac{\left(M_n + \frac{2}{3}\right)^{\frac{r}{2}} - \left(M_n + \frac{1}{3}\right)^{\frac{r}{2}}}{q_n^{\frac{r}{2}}} > c_3 \frac{M_n^{\frac{r}{2}-1}}{q_n^{\frac{r}{2}}}$$

$$> c_3 \left(\frac{M_n}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}-\sigma} \left(\log \frac{M_n}{q_n}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}$$

für $n > c_3$. Für $n > c_3$ ist also mindestens eine der beiden Zahlen

$$\left|\mathsf{P}_Q\left(\beta_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right)\right|, \qquad \left|\mathsf{P}_Q\left(\beta_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right)\right|$$

größer als

$$c_3 \left(\frac{M_n}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}-\sigma} \left(\log \frac{M_n}{q_n}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}},$$

womit wegen $\frac{M_n}{q_n} \to +\infty$ der Satz bewiesen ist.

§ 8.

Satz 5.

Satz 5. *Es sei* $\sigma \geqq 2$; $r_j \geqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $\sum_{j=1}^{\sigma} r_j = r$; σ, r_j *ganz*; $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$. *Es sei*

$$Q(u) = \beta_1 (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \cdots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2 (u_{1,2}^2 + \cdots + u_{r_2,2}^2) + \cdots$$
$$+ \beta_\sigma (u_{1,\sigma}^2 + \cdots + u_{r_\sigma,\sigma}^2).$$

Behauptung:

$$\mathrm{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma}\right).$$

Beweis. Es gibt bekanntlich eine Folge von Systemen von ganzen Zahlen

$$p_{2,n},\ p_{3,n},\ \ldots,\ p_{\sigma,n},\ q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit $q_n \to +\infty$, $\left|\frac{\beta_j}{\beta_1} - \frac{p_{j,n}}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}}}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Es sei

$$Q_n(u) = \beta_1\Big(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2 + \frac{p_{2,n}}{q_n}(u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2}^2) + \ldots$$
$$+ \frac{p_{\sigma,n}}{q_n}(u_{1,\sigma}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2)\Big);$$

für jedes ganzzahlige System von $u_{i,k}$ hat der Wert von $Q_n(u)$ die Form $\beta_1 \frac{m}{q_n}$ (m ganz). Es ist

$$|Q_n(u) - Q(u)| \leqq \frac{\beta_1}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}}}(u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2) \leqq \frac{d\,Q(u)}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}}},$$

wo $d = \underset{j=1,2,\ldots,\sigma}{\mathrm{Max}} \frac{\beta_1}{\beta_j}$ (d ist also ein c_3).

Nun sei $\overline{M}_n$ ganz, $\overline{M}_n \leqq \frac{1}{6d} q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}} < \overline{M}_n + 1$. Wenn

$$\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{2}{3}}{q_n},$$

so ist

$$\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{1}{3}}{q_n}\left(1 - \frac{d}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}}}\right) < Q_n(u) < \beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{2}{3}}{q_n}\left(1 + \frac{d}{q_n^{1+\frac{1}{\sigma-1}}}\right),$$

also für $n > c_3$

$$\beta_1 \frac{\overline{M}_n}{q_n} < Q_n(u) < \beta_1 \frac{\overline{M}_n + 1}{q_n};$$

im Gebiet

$$\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{2}{3}}{q_n}$$

liegen also für $n > c_3$ keine Gitterpunkte; also

$$A_Q\left(\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right) = A_Q\left(\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right);$$

andererseits

$$J_Q\left(\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right) - J_Q\left(\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right) > c_3 \frac{\overline{M}_n^{\frac{r}{2}-1}}{q_n^{\frac{r}{2}}} > c_3 \left(\frac{\overline{M}_n}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}-\sigma} \quad \text{für} \quad n > c_3.$$

Für $n > c_3$ ist also mindestens eine der beiden Zahlen

$$\left|\mathsf{P}_Q\left(\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right)\right|, \qquad \left|\mathsf{P}_Q\left(\beta_1 \frac{\overline{M}_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right)\right|$$

größer als $c_3 \left(\frac{\overline{M}_n}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}-\sigma}$, womit wegen $\frac{\overline{M}_n}{q_n} \to +\infty$ der Satz bewiesen ist.

Göttingen, den 21. November 1927.

(Eingegangen am 22. 11. 1927.)