Vojtěch Jarník

Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven

Math. Zeitschr. 26 (1927), pp. 445--459

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500688

Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Es seien in der Ebene zwei rechtwinklige Koordinatenachsen x, y und eine Punktmenge L gegeben. Die Punktmenge L möge folgenden Voraussetzungen genügen[1]):

I. L ist eine beschränkte Punktmenge.

II. Alle Punkte von L liegen im Gebiet $x > 0$, $0 \leqq y \leqq x$.[2])

III. Es gibt zwei Zahlen u, v mit $0 \leqq u < v \leqq 1$, so daß es in L einen und nur einen Punkt (x, y) mit $\frac{y}{x} = w$ gibt, wenn w eine Zahl mit $u \leqq w \leqq v$ ist, dagegen keinen Punkt mit $\frac{y}{x} = w$, wenn $w > v$ oder $w < u$.

Wenn λ eine positive Zahl ist und wenn der Punkt (x, y) die Punktmenge L durchläuft, so durchläuft der Punkt $(\sqrt{\lambda}\, x, \sqrt{\lambda}\, y)$ eine Punktmenge, die mit $L(\lambda)$ bezeichnet werde. Zu jedem Punkte (x, y) des Gebietes

$$(1) \qquad x > 0, \quad u \leqq \frac{y}{x} \leqq v$$

gibt es offenbar einen und nur einen Wert von λ, für welchen der Punkt (x, y) in der Menge $L(\lambda)$ enthalten ist. Dieser Wert von λ ist also in (1) eine wohldefinierte Funktion von x, y; wir bezeichnen sie mit $f(x, y)$.

---

[1]) Alle vorkommenden Zahlen und Punkte sind reell; alle Quadratwurzeln sind positiv zu nehmen.

[2]) Diese Voraussetzung ist nicht wesentlich; sie wurde eingeführt, nur um unendliche Werte von $\frac{y}{x}$ und die Zweideutigkeit gewisser Funktionen zu vermeiden. Durch Spiegelungen an den Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ kann man sich allerdings von dieser Voraussetzung leicht befreien.

Diese Funktion ist offenbar positiv-homogen zweiter Ordnung in (1); d. h. wenn $a > 0$ und wenn (1) gilt, so ist

(2) $$f(ax, ay) = a^2 f(x, y).$$

Weiter ist in (1) offenbar $f(x, y) > 0$. Wir machen über $f(x, y)$ noch folgende Voraussetzung:

IV. $f(x, y)$ ist in (1) stetig[3]) und besitzt für

(3) $$x > 0, \quad u < \frac{y}{x} < v$$

stetige partielle Ableitungen bis zur vierten Ordnung.

Wir betrachten nun alle in (1) liegenden Gitterpunkte (a, b). Die zugehörigen Werte $f(a, b)$ bilden eine abzählbare Menge. Wir bezeichnen die verschiedenen unter ihnen, wachsend geordnet[4]), mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Es ist also $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; offenbar gibt es unendlich viele λ_n und es ist $\lim\limits_{n=\infty} \lambda_n = +\infty$.

Die vorliegende Note ist dem Beweis folgender vier Behauptungen gewidmet:

Behauptung I. *Wenn in* (1) *gilt*

(4) $$f(x, y) = \alpha(ax + by)^2 \qquad (\alpha \text{ beliebig}^{5)};\ a, b \text{ ganz}),$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} = 2\sqrt{\alpha}\,\delta > 0,$$

wo $\delta = (a, b)$ *den größten gemeinsamen Teiler von* a, b *bedeutet.*

Behauptung II. *Wenn in* (1) *gilt*

(5) $$f(x, y) = (ax + by)^2 \qquad \left(\frac{b}{a} \text{ irrational}\right),$$

so ist

$$\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

endlich.

Behauptung III. *Wenn in* (1) *gilt*

(6) $$f(x, y) = \alpha(ax^2 + 2bxy + cy^2) \qquad (\alpha \text{ beliebig};\ a, b, c \text{ ganz};\ b^2 - ac \neq 0),$$

---

[3]) Die Punktmenge L ist also ein stetiger Kurvenbogen; die Koordinaten x, y eines Punktes von L lassen sich z. B. als stetige Funktionen des Parameters $\tau = \frac{y}{x}$ $(u \leqq \tau \leqq v)$ darstellen.

[4]) Die Möglichkeit einer solchen Anordnung folgt sofort aus der Beschränktheit von L.

[5]) α ist dann von selbst positiv.

so ist

$$\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

endlich und von Null verschieden.

Behauptung IV. *In allen anderen Fällen ist*

$$\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n) \sqrt{\lambda_n})$$

endlich.

Die geometrische Bedeutung dieser Behauptungen wird sofort klar, wenn man sich vergegenwärtigt, daß $f(x, y) = 1$ mit den Nebenbedingungen (1) die Gleichung der Kurve L ist und daß $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ diejenigen Werte von λ sind, für welche die Kurve $L(\lambda)$ (d. h. die in bezug auf den Nullpunkt im Verhältnis $\sqrt{\lambda}:1$ gestreckte Kurve L) durch mindestens einen Gitterpunkt hindurchgeht.

Die Behauptungen I, II, III sind fast trivial; man findet ihre Beweise im § 3. Auch der Beweis der Behauptung IV, dem der § 2 gewidmet ist, verläuft ganz elementar. Es wird nur von den einfachsten Sätzen der Differentialrechnung Gebrauch gemacht; aus der Zahlentheorie wird nur folgender wohlbekannter Satz herangezogen:

Hilfssatz 1. *Es sei $\varrho > 0$; dann gibt es eine Folge von Zahlenpaaren p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit*

$$p_i, q_i \text{ ganz und positiv}, \quad \lim_{i=\infty} p_i = \lim_{i=\infty} q_i = +\infty,$$

$$\left| \frac{p_i}{q_i} - \varrho \right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

Ich beweise gleich noch folgenden einfachen

Hilfssatz 2. Voraussetzung: *Es seien A, B, C drei Zahlen mit $B^2 - AC \neq 0$; es gebe zwei Zahlen τ_1, τ_2 mit $\tau_1 < \tau_2$, so daß die Funktion $\sigma(\tau) = -\frac{A+B\tau}{B+C\tau}$ für jedes irrationale τ mit $\tau_1 < \tau < \tau_2$, $B + C\tau \neq 0$ einen irrationalen Wert hat.*

Behauptung. *Man kann eine Zahl α und drei ganze Zahlen a, b, c so finden, daß $A = \alpha a$, $B = \alpha b$, $C = \alpha c$.*

Beweis. Es ist $\sigma(\tau)$ für alle τ mit $\tau_1 < \tau < \tau_2$ definiert, höchstens mit Ausnahme eines einzigen Wertes, und nimmt für $\tau_1 < \tau < \tau_2$ unendlich viele Werte — also auch unendlich viele rationale Werte — an. Es sei also τ' eine Zahl mit $\tau_1 < \tau' < \tau_2$, für welche $\sigma(\tau')$ rational ist und es sei τ'' eine von τ' und $\sigma(\tau')$ verschiedene Zahl mit $\tau_1 < \tau'' < \tau_2$, für welche $\sigma(\tau'')$ rational ist. Nach der Voraussetzung sind dann auch τ' und τ'' rationale Zahlen. Es ist weiter

$$A + B(\tau' + \sigma(\tau')) + C\tau'\sigma(\tau') = 0,$$
$$A + B(\tau'' + \sigma(\tau'')) + C\tau''\sigma(\tau'') = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß die Zahlen A, B, C wirklich — wie behauptet — zueinander in rationalen Verhältnissen stehen, außer wenn gleichzeitig

$$\tau' + \sigma(\tau') = \tau'' + \sigma(\tau''), \qquad \tau'\sigma(\tau') = \tau''\sigma(\tau'').$$

Diese beiden Gleichungen würden aber besagen, daß entweder $\tau' = \tau''$, $\sigma(\tau') = \sigma(\tau'')$ oder $\tau' = \sigma(\tau'')$, $\sigma(\tau') = \tau''$ ist. Dies ist aber nicht der Fall, da τ'' von τ' und $\sigma(\tau')$ verschieden angenommen wurde, w. z. b. w.

Bemerkung. Die Voraussetzung IV hat eine Form, die die Eigenschaften der Kurve L vielleicht nicht ganz deutlich hervortreten läßt. Ich will sie darum durch folgende Voraussetzung V ersetzen:

V. Es gebe zwei Zahlen t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ und zwei Funktionen $F(t)$, $G(t)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $F(t)$, $G(t)$ sind für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ stetig und besitzen für $t_1 < t < t_2$ stetige Ableitungen vierter Ordnung.

2. Die Menge der Punkte $(F(t), G(t))$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ ist mit L identisch und aus $F(t) = F(t')$, $G(t) = G(t')$ folgt $t = t'$.

3. Für $t_1 < t < t_2$ ist stets $F'(t)\,G(t) - F(t)\,G'(t) \neq 0$. [6])

Ich behaupte: die Voraussetzungen I, II, III, IV sind mit den Voraussetzungen I, II, III, V äquivalent. Denn erstens, wenn I, II, III, IV gilt, so ist die Kurve L durch $f(x, y) = 1$ oder durch $x^2 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 1$ mit den Nebenbedingungen (1) gegeben; die Parameterdarstellung

$$x = \frac{1}{\sqrt{f(1,\tau)}}, \qquad y = \frac{\tau}{\sqrt{f(1,\tau)}} \qquad (u \leqq \tau \leqq v)$$

zeigt also, daß die Voraussetzung V erfüllt ist.

Andererseits, wenn I, II, III, V gilt, so kann man die Kurve $L(\lambda)$ durch die Gleichungen

$$(\alpha) \qquad x = \sqrt{\lambda}\,F(t), \qquad y = \sqrt{\lambda}\,G(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

ausdrücken. Also ist $\frac{y}{x}$ eine stetige Funktion von t, die jeden Wert höchstens einmal annimmt; sie ist also monoton und man kann daher t als eine stetige Funktion von $\frac{y}{x}$ ausdrücken $\left(\text{für } x > 0, \quad u \leqq \frac{y}{x} \leqq v\right)$; aus der ersten Gleichung (α) folgt dann, daß auch λ in (1) eine stetige

[6]) Die Kurve L besitzt also für $t_1 < t < t_2$ in jedem Punkte eine wohldefinierte, nicht durch den Nullpunkt gehende Tangente.

Funktion $f(x, y)$ von x, y ist. Daß diese Funktion in (3) stetige partielle Ableitungen bis zu vierter Ordnung besitzt, folgt sofort aus (α) nach dem Satze über implizite Funktionen, da die Funktionaldeterminante $\frac{1}{2}(F'(t)\, G(t) - F(t)\, G'(t))$ nicht verschwindet.

Die Voraussetzung IV besagt also über die Kurve L mehr als eine bloße Stetigkeits- und Differentiierbarkeitsbedingung. Man kann aber diesen Übelstand in den meisten Fällen leicht beseitigen und die Gültigkeit unserer Behauptungen auf allgemeinere Kurven ausdehnen. Z. B. kann man folgendes behaupten: Die Punktmenge L möge den Voraussetzungen I, II, III genügen; man definiere $f(x,y)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, L(\lambda)$ wie am Anfang dieses Paragraphen. Es gebe weiter zwei Zahlen u', v' $(u \leqq u' < v' \leqq v)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f(x, y)$ ist für $x > 0$, $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$ stetig und besitzt in jedem inneren Punkt dieser Punktmenge stetige partielle Ableitungen bis zu vierter Ordnung.

2. Keine der Gleichungen (4), (5), (6) sei erfüllt für alle x, y mit $x > 0$, $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$. Dann ist $\liminf\limits_{n=\infty} \left((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}\right)$ endlich. Denn es sei L' diejenige Teilmenge von L, für welche $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$ gilt, und es seien $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots, (n_1 < n_2 < \ldots)$ diejenigen Werte von λ, für welche $L(\lambda)$ durch einen Gitterpunkt des Gebietes $x > 0$, $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$ hindurchgeht. Dann besagt die Behauptung IV, auf die Kurve L' angewandt, daß $\liminf\limits_{k=\infty} \left((\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\sqrt{\lambda_{n_k}}\right)$ endlich ist; um so mehr ist also $\liminf\limits_{n=\infty} \left((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}\right)$ endlich.

Ich will aber bei solchen naheliegenden Modifikationen unseres Satzes nicht länger verweilen und gehe zu seinem Beweis über.

§ 2.

Beweis der Behauptung IV.

Nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen gilt in (3) (wegen (2) und infolge der Voraussetzung IV):

$$(7) \qquad 2 f(x,y) = x^2 f_{x^2}(x,y) + 2\,x\,y\, f_{xy}(x,y) + y^2 f_{y^2}(x,y).$$

Dabei sind f_{x^2}, f_{xy}, f_{y^2} positiv-homogene Funktionen nullter Ordnung; man kann also in (3) setzen

$$(8) \qquad f_{x^2}(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad f_{xy}(x,y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad f_{y^2}(x,y) = \chi\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo die Funktionen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ für $u < \tau < v$ stetig sind und eine stetige zweite Ableitung besitzen.

Aus (8) folgt weiter in (3) $\left(\text{wir setzen } \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = \varphi'(\tau) \text{ usw.}\right)$

$$(9) \qquad \begin{cases} f_{x^3}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), & f_{x^2y}(x,y) = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right), \\ f_{xy^2}(x,y) = \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\chi'\left(\frac{y}{x}\right), & f_{y^3}(x,y) = \frac{1}{x}\chi'\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

Um die Behauptung IV nachzuweisen, genügt es offenbar, folgendes zu zeigen: falls in (1) weder (4) noch (5) noch (6) gilt, so ist es möglich, vier Folgen ganzer Zahlen

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, \ldots \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, \ldots \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_n, \ldots \\ d_1, & d_2, & \ldots, & d_n, \ldots \end{array}$$

zu finden, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. Die Punkte (a_n, b_n) und (c_n, d_n) liegen im Gebiet (1) $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. $$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} d_n = +\infty.$$

3. $$f(a_n, b_n) - f(c_n, d_n) \neq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

4. $$f(a_n, b_n) - f(c_n, d_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(a_n, b_n)}}\right),$$
$$f(a_n, b_n) - f(c_n, d_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(c_n, d_n)}}\right)$$

(Das Zeichen O bezieht sich auf wachsendes n.)

Wir setzen also jetzt voraus, daß in (1) weder (4) noch (5) noch (6) gilt. Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall A. Es ist $\chi'(\tau) = 0$ für alle τ mit $u < \tau < v$.

Fall B. Es gibt ein τ_1 mit $u < \tau_1 < v$, $\chi'(\tau_1) \neq 0$.

Wir werden diese beiden Fälle nacheinander diskutieren.

Fall A. Nach (9) ist dann auch $\psi'(\tau) = \varphi'(\tau) = 0$ für $u < \tau < v$; es ist also nach (7) und (8) in diesem Falle

$$(10) \qquad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

in (3), wo A, B, C, Konstanten sind. Wegen der Stetigkeit von $f(x,y)$ gilt dann (10) im ganzen Gebiet (1). Weil in (1) weder (4) noch (5) noch (6) gilt, so ist $B^2 - AC \neq 0$ und es ist nicht möglich, eine reelle Zahl α und drei ganze Zahlen a, b, c so zu bestimmen, daß $A = \alpha a$,

$B = \alpha b$, $C = \alpha c$. Nach dem Hilfssatz 2 gibt es eine irrationale Zahl τ_0 mit $B + C\tau_0 \neq 0$, $u < \tau_0 < v$, so daß $-\frac{A + B\tau_0}{B + C\tau_0}$ rational ist. Wir setzen

$$(11) \qquad -\frac{A + B\tau_0}{B + C\tau_0} = \frac{r}{s} \quad (r, s \text{ ganz und teilerfremd})$$

und bestimmen nach Hilfssatz 1 eine Folge von Zahlenpaaren p_i, q_i (p_i, q_i ganz und positiv, $\lim\limits_{i=\infty} p_i = \lim\limits_{i=\infty} q_i = +\infty$), so daß

$$(12) \qquad \frac{p_i}{q_i} = \tau_0 + \frac{c_i}{q_i^2}, \quad |c_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist für $i > i_0$: $0 < q_i - s$, $u < \frac{p_i - r}{q_i - s} < v$, $0 < q_i + s$, $u < \frac{p_i + r}{q_i + s} < v$ und

$$(13) \qquad \begin{aligned} &f(q_i + s,\ p_i + r) - f(q_i - s,\ p_i - r) \\ &\quad = 4\,(A q_i s + B(q_i r + p_i s) + C p_i r). \end{aligned}$$

Aus (11), (12) folgt aber

$$(14) \qquad \begin{aligned} 0 &= s\,(A + B\tau_0) + r\,(B + C\tau_0) \\ &= s\left(A q_i + B\left(p_i - \frac{c_i}{q_i}\right)\right) + r\left(B q_i + C\left(p_i - \frac{c_i}{q_i}\right)\right). \end{aligned}$$

Aus (13), (14) folgt

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} &f(q_i + s,\ p_i + r) - f(q_i - s,\ p_i - r) = 4\,\frac{c_i}{q_i}\,(sB + rC) \\ &\quad = 4\,\frac{c_i}{q_i}\,k\,(B^2 - AC) \qquad\qquad (\text{nach } (11)), \end{aligned} \right.$$

wo k die von Null verschiedene Zahl $\frac{s}{B + C\tau_0}$ bedeutet. Es ist offenbar für wachsendes i (wegen $f(1, \tau_0) > 0$)

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(q_i + s,\ p_i + r) &= q_i^2 f\left(1 + \frac{s}{q_i},\ \frac{p_i}{q_i} + \frac{r}{q_i}\right) \sim q_i^2 f(1, \tau_0), \\ f(q_i - s,\ p_i - r) &= q_i^2 f\left(1 - \frac{s}{q_i},\ \frac{p_i}{q_i} - \frac{r}{q_i}\right) \sim q_i^2 f(1, \tau_0); \end{aligned} \right.$$

also ist nach (15) und (16)

$$(17) \qquad f(q_i + s, p_i + r) - f(q_i - s, p_i - r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(q_i + s, p_i + r)}}\right),$$

$$(18) \qquad f(q_i + s, p_i + r) - f(q_i - s, p_i - r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(q_i - s, p_i - r)}}\right).$$

Es ist weiter τ_0 irrational, also $c_i \neq 0$ (nach (12)), also gilt nach (15)

$$(19) \qquad f(q_i + s, p_i + r) - f(q_i - s, p_i - r) \neq 0 \quad \text{für } i > i_0.$$

Aus (17), (18), (19) folgt aber nach dem am Anfang dieses Paragraphen Gesagten, daß in diesem Falle wirklich $\liminf\limits_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich ist, w. z. b. w.

Fall B. Es ist nicht identisch $\chi'(\tau) = 0$ für $u < \tau < v$; wegen der Stetigkeit von $\chi'(\tau)$ gibt es also zwei Zahlen u_1, v_1 mit $u < u_1 < v_1 < v$, so daß $\chi'(\tau)$ für $u_1 < \tau < v_1$ stets von Null verschieden ist; also ist $\chi(\tau)$ eine für $u_1 < \tau < v_1$ entweder stets wachsende oder stets abnehmende Funktion von τ, woraus sofort folgt, daß die Funktion von τ

$$f_y(1, \tau) = f_y(1, u_1) + \int_{u_1}^{\tau} f_{yy}(1, \xi)\, d\xi = f_y(1, u_1) + \int_{u_1}^{\tau} \chi(\xi)\, d\xi$$

für $u_1 < \tau < v_1$ höchstens zweimal verschwindet. Wir können also zwei Zahlen u_2, v_2 mit $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$ so wählen, daß $f_y(1, \tau)$ für $u_2 < \tau < v_2$ stets von Null verschieden ist. Für $u_2 < \tau < v_2$ ist dann die Funktion $\frac{f_x(1, \tau)}{f_y(1, \tau)}$ stetig und, wie ich behaupte, nicht konstant. Denn gesetzt, es wäre für $u_2 < \tau < v_2$

$$f_x(1, \tau) + h f_y(1, \tau) = 0 \qquad (h \text{ konst.})$$

so wäre wegen

$$f_x(x, y) = x f_x\left(1, \frac{y}{x}\right), \qquad f_y(x, y) = x f_y\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

auch

$$f_x(x, y) + h f_y(x, y) = 0 \tag{20}$$

für

$$x > 0, \qquad u_2 < \frac{y}{x} < v_2, \tag{21}$$

also auch

$$f_{xx}(x, y) + h f_{xy}(x, y) = 0, \qquad f_{xy}(x, y) + h f_{yy}(x, y) = 0;$$

daraus würde aber nach (7) und (8) folgen

$$2 f(x, y) = (h x - y)^2 f_{yy}(x, y) = (h x - y)^2 \chi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die Gleichung (20) würde dann besagen, daß in (21) gilt

$$(h x - y)^2 \frac{y - h x}{x^2} \chi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

es müßte also für $u_2 < \tau < v_2$ gelten

$$(h - \tau)^3 \chi'(\tau) = 0,$$

was mit der Voraussetzung im Widerspruch steht, daß $\chi'(\tau)$ für $u_2 < \tau < v_2$ von Null verschieden ist. Die Funktion $\frac{f_x(1, \tau)}{f_y(1, \tau)}$ ist also für $u_2 < \tau < v_2$ stetig und nicht konstant, also gibt es sicher einen Wert τ_0 mit $u_2 < \tau_0 < v_2$, so daß $\frac{f_x(1, \tau_0)}{f_y(1, \tau_0)}$ rational und von Null verschieden ist.

Wir haben also die Existenz einer Zahl τ_0 mit

$$u < \tau_0 < v, \quad \chi'(\tau_0) \neq 0, \quad f_y(1, \tau_0) \neq 0, \quad \frac{f_x(1, \tau_0)}{f_y(1, \tau_0)} = -\frac{r}{s}$$

(r, s ganz, teilerfremd und von Null verschieden)

nachgewiesen.

Es ist noch $r - s\tau_0 \neq 0$; denn aus $r - s\tau_0 = 0$ würde folgen $f_x(1, \tau_0) + \tau_0 f_y(1, \tau_0) = 0$, während aus dem Eulerschen Satz

$$f_x(1, \tau_0) + \tau_0 f_y(1, \tau_0) = 2 f(1, \tau_0) > 0$$

folgt.

Ich wähle nun eine ganze positive Zahl k so, daß

$$k^2 \frac{|(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0)|}{6} > 2 |s\psi(\tau_0) + r\chi(\tau_0)|. \tag{22}$$

Es sei weiter p_i, q_i eine (nach dem Hilfssatz 1 existierende) Folge von Zahlenpaaren mit (p_i, q_i ganz und positiv, $\lim\limits_{i=\infty} p_i = \lim\limits_{i=\infty} q_i = +\infty$)

$$\frac{p_i}{q_i} = \tau_0 + \frac{c_i}{q_i^2}, \quad |c_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Für $i > i_0$ ist das Rechteck $\mathfrak{P}_i$ mit den Ecken $(q_i - ks,\ p_i - kr)$, $(q_i - ks,\ p_i + kr)$, $(q_i + ks,\ p_i - kr)$, $(q_i + ks,\ p_i + kr)$ ganz im Gebiet

$$x > 0, \quad \frac{u + \tau_0}{2} \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{\tau_0 + v}{2} \tag{23}$$

enthalten. Es ist also für $i > i_0$ nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$\left\{\begin{aligned} f(q_i + ks, p_i + kr) &= f(q_i, p_i) + k(s f_x(q_i, p_i) + r f_y(q_i, p_i)) \\ &\quad + \frac{k^2}{2}(s^2 f_{x^2}(q_i, p_i) + 2rs f_{xy}(q_i, p_i) + r^2 f_{y^2}(q_i, p_i)) \\ &\quad + \frac{k^3}{6}(s^3 f_{x^3}(q_i, p_i) + 3rs^2 f_{x^2y}(q_i, p_i) + \ldots) + R_i', \end{aligned}\right. \tag{24}$$

wo für den Rest R_i' die Abschätzung gilt

$$|R_i'| \leqq \frac{k^4}{24}(|r| + |s|)^4 M_i^{(4)};$$

dabei bedeutet $M_i^{(4)}$ die kleinste gemeinsame obere Schranke der absoluten Beträge der vierten Ableitungen $f_{x^4}(x, y)$, $f_{x^3y}(x, y)$, $\ldots$, $f_{y^4}(x, y)$ im Rechteck $\mathfrak{P}_i$.

Man bekommt eine der Formel (24) analoge Formel für $f(q_i - ks,\ p_i - kr)$, die aus (24) entsteht, indem man k durch $-k$ und R_i' durch R_i'' ersetzt, wo für R_i'' dieselbe Abschätzung wie für R_i' gilt. Durch Subtraktion dieser beiden Formeln ergibt sich endlich

$$(25)\quad \begin{cases} f(q_i+ks, p_i+kr) - f(q_i-ks, p_i-kr) = 2k(sf_x(q_i, p_i) \\ + rf_y(q_i, p_i)) + \frac{k^3}{3}(s^3 f_{x^3}(q_i, p_i) + 3rs^2 f_{x^2y}(q_i, p_i) + \ldots) + R_i, \end{cases}$$

wo $|R_i| \leqq \frac{k^4}{12}(|r|+|s|)^4 M_i^{(4)}$.

Es ist aber $\left(\text{weil der Punkt } (q_i, \tau_0 q_i) \text{ wegen } \left|\frac{c_i}{q_i}\right| < 1 \text{ in } \mathfrak{P}_i \text{ liegt}\right)$

$$(26)\quad \begin{cases} f_x(q_i, p_i) = f_x\left(q_i, \tau_0 q_i + \frac{c_i}{q_i}\right) = f_x(q_i, \tau_0 q_i) + \frac{c_i}{q_i} f_{xy}(q_i, \tau_0 q_i) + S_i', \\ f_y(q_i, p_i) = f_y\left(q_i, \tau_0 q_i + \frac{c_i}{q_i}\right) = f_y(q_i, \tau_0 q_i) + \frac{c_i}{q_i} f_{y^2}(q_i, \tau_0 q_i) + S_i'', \end{cases}$$

wo $|S_i'| \leqq \frac{c_i^2}{2q_i^2} M_i^{(3)}$, $|S_i''| \leqq \frac{c_i^2}{2q_i^2} M_i^{(3)}$; dabei ist $M_i^{(3)}$ die kleinste gemeinsame obere Schranke von $|f_{xy^2}(x, y)|$, $|f_{y^3}(x, y)|$ in $\mathfrak{P}_i$.

Endlich ist

$$(27)\quad \begin{cases} f_{x^3}(q_i, p_i) = f_{x^3}(q_i, \tau_0 q_i) + T_i', \\ f_{x^2y}(q_i, p_i) = f_{x^2y}(q_i, \tau_0 q_i) + T_i'' \text{ usw.} \end{cases}$$

Dabei ist $|T_i'| \leqq \frac{|c_i|}{q_i} M_i^{(4)}$, $|T_i''| \leqq \frac{|c_i|}{q_i} M_i^{(4)}$ usw.

Es ist aber in (23) für wachsendes x nach (9)

$$f_{xy^2}(x, y) = \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_{x^3}(x, y) = \frac{1}{x}\chi'\left(\frac{y}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

gleichmäßig in y. Bei wachsendem i gilt aber in $\mathfrak{P}_i$:

$$x \sim q_i, \quad y \sim p_i \sim \tau_0 q_i; \quad \text{also ist} \quad M_i^{(3)} = O\left(\frac{1}{q_i}\right).$$

Aus (9) folgt weiter in (23)

$$f_{x^4}(x, y) = \frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

gleichmäßig in y; dieselbe Abschätzung gilt für die anderen vierten Ableitungen; also ist $M_i^{(4)} = O\left(\frac{1}{q_i^2}\right)$. Es ist also

$$R_i = O\left(\frac{1}{q_i^2}\right), \quad S_i' = O\left(\frac{1}{q_i^3}\right), \quad S_i'' = O\left(\frac{1}{q_i^3}\right),$$

$$T_i' = O\left(\frac{1}{q_i^3}\right), \quad T_i'' = O\left(\frac{1}{q_i^3}\right) \quad \text{usw.}$$

Wenn wir nun aus (26), (27) in (25) einsetzen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} f(q_i+ks, p_i+kr) - f(q_i-ks, p_i-kr) \\ = 2k(s f_x(q_i, \tau_0 q_i) + r f_y(q_i, \tau_0 q_i)) \\ + \frac{k^3}{3}(s^3 f_{x^3}(q_i, \tau_0 q_i) + 3rs^2 f_{x^2y}(q_i, \tau_0 q_i) + \ldots) \\ + \frac{2kc_i}{q_i}(s f_{xy}(q_i, \tau_0 q_i) + r f_{y^2}(q_i, \tau_0 q_i)) + O\left(\frac{1}{q_i^2}\right). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$s f_x(q_i, \tau_0 q_i) + r f_y(q_i, \tau_0 q_i) = q_i(s f_x(1, \tau_0) + r f_y(1, \tau_0)) = 0$$

und nach (8) und (9) ist

$$s f_{xy}(q_i, \tau_0 q_i) + r f_{y^2}(q_i, \tau_0 q_i) = s\psi(\tau_0) + r\chi(\tau_0),$$

$$s^3 f_{x^3}(q_i, \tau_0 q_i) + 3rs^2 f_{x^2y}(q_i, \tau_0 q_i) + \ldots = \frac{1}{q_i}(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0).$$

Also ist

$$(28) \quad \begin{cases} f(q_i+ks, p_i+kr) - f(q_i-ks, p_i-kr) \\ \quad = \frac{2kc_i}{q_i}(s\psi(\tau_0) + r\chi(\tau_0)) + \frac{k^3}{3q_i}(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0) + O\left(\frac{1}{q_i^2}\right). \end{cases}$$

Es ist also wegen (22) und wegen $|c_i| < 1$:

$$\begin{aligned} |f(q_i+ks, p_i+kr) - f(q_i-ks, p_i-kr)| \\ > \frac{k^3}{6q_i}|(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0)| + O\left(\frac{1}{q_i^2}\right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$(29) \qquad f(q_i+ks, p_i+kr) - f(q_i-ks, p_i-kr) \neq 0$$

für $i > i_1$.

Andererseits folgen aus (28) wegen

$$f(q_i+ks, p_i+kr) \sim f(q_i-ks, p_i-kr) \sim q_i^2 f\left(1, \frac{p_i}{q_i}\right) \sim q_i^2 f(1, \tau_0)$$
$$(\text{denn } f(1, \tau_0) > 0)$$

die Beziehungen

$$(30) \quad \begin{cases} f(q_i+ks, p_i+kr) - f(q_i-ks, p_i-kr) \\ \quad = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(q_i+kr, p_i+ks)}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(q_i-kr, p_i-ks)}}\right). \end{cases}$$

Aus (29) und (30) folgt aber nach dem am Anfang dieses Paragraphen Gesagten, daß auch in diesem Falle B $\liminf\limits_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich ist, womit die Behauptung IV vollständig bewiesen ist.

Bemerkung 1. Es sei $u = 0$, $v = 1$; dann genügt die Funktion $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{2/3}$ allen Voraussetzungen, die wir für die Anwendbarkeit der Behauptung IV verlangten. Es sind hier die $\lambda_n^{3/2}$ ganze Zahlen, also $\lambda_{n+1}^{3/2} - \lambda_n^{3/2} \geqq 1$, woraus $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}) \geqq \frac{2}{3}$ folgt. Man darf also die Behauptung IV *nicht* durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}) = 0$“ ersetzen.

Bemerkung 2. Es sei

$$\sigma = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^{16}} + \ldots = 1 + 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2^{2i}}},$$

$$\pi_k = 3^{2^{2k}}, \quad \varrho_k = \left(1 + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{3^{2^{2i}}}\right)\pi_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

π_k, ϱ_k sind positiv und ungerade, $\sigma > 1$. Es ist

$$(31) \qquad 0 < \sigma - \frac{\varrho_k}{\pi_k} = 2\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2^{2i}}} < \frac{2}{3^{2^{2k+2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{3}{(3^{2^{2k}})^4} = \frac{3}{\pi_k^4}.$$

Also ist σ eine irrationale Zahl. Ich setze nun $u = 0$, $v = 1$, $f(x, y) = x^2 + \sigma y^2$; die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Behauptung IV sind offenbar erfüllt. Es sei

$$\xi_i = \frac{\varrho_i + 1}{2}, \quad \xi_i' = \frac{\varrho_i - 1}{2}, \quad \eta_i = \frac{\pi_i - 1}{2}, \quad \eta_i' = \frac{\pi_i + 1}{2}.$$

Für $i > i_0$ ist $\xi_i > 0$, $\xi_i' > 0$, $0 < \frac{\eta_i}{\xi_i} < 1$, $0 < \frac{\eta_i'}{\xi_i'} < 1$ und

$$f(\xi_i', \eta_i') - f(\xi_i, \eta_i) = \xi_i'^2 - \xi_i^2 + \sigma(\eta_i'^2 - \eta_i^2) = -\varrho_i + \sigma\pi_i;$$

also

$$0 < f(\xi_i', \eta_i') - f(\xi_i, \eta_i) < \frac{3}{\pi_i^3} = O\left(\frac{1}{(f(\xi_i, \eta_i))^{3/2}}\right)$$

$$\left(\text{denn} \quad f(\xi_i, \eta_i) \sim \frac{\varrho_i^2 + \sigma\pi_i^2}{4} \sim \frac{\sigma^2 + \sigma}{4}\pi_i^2\right).$$

Es ist also um so mehr $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}) = 0$; man darf also die Behauptung IV *nicht* durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich und von Null verschieden“ ersetzen.

§ 3.

Beweis der Behauptungen I, II, III.

Beweis der Behauptung I. Es sei in (1)

$$f(x, y) = \alpha(ax + by)^2, \quad a, b \text{ ganz}, \quad \alpha > 0.$$

Wegen $f(x, y) > 0$ hat der Ausdruck $ax + by$ in (1) ein unveränderliches Vorzeichen; o. B. d. A. können wir annehmen, daß er in (1) positiv ist. Es sei δ der größte gemeinsame Teiler von a und b. Dann sind die Werte von $\sqrt{\lambda_n}$ ganzzahlige Vielfache von $\sqrt{\alpha}\cdot\delta$, also

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \geqq \sqrt{\alpha}\,\delta. \tag{32}$$

Es sei andererseits $n > 0$ eine ganze Zahl; dann ist $\lambda_n = \alpha(a h_n + b k_n)^2$, wo (h_n, k_n) ein Gitterpunkt in (1) ist. Wir können dann zwei ganze Zahlen h_n', k_n' so wählen, daß

$$a(h_n' - h_n) + b(k_n' - k_n) = \delta$$

und man kann offenbar — indem man statt h_n', k_n' bzw. $h_n' - b m_n$, $k_n' + a m_n$ mit geeignet gewähltem ganzzahligem m_n schreibt — noch erreichen, daß der Punkt (h_n', k_n') in (1) liegt, mindestens für hinreichend große Werte von n. Also ist für $n > n_0$

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \leqq \sqrt{\alpha}\,\delta. \tag{33}$$

Aus (32), (33) folgt für $n > n_0$

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\alpha}\,\delta,$$

also erstens $\sqrt{\lambda_{n+1}} \sim \sqrt{\lambda_n}$ und endlich

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = (\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n})(\sqrt{\lambda_{n+1}} + \sqrt{\lambda_n}) \sim 2\delta\sqrt{\alpha}\sqrt{\lambda_n},$$ w. z. b. w.

Beweis der Behauptung II. Es sei in (1)

$$f(x, y) = (ax + by)^2, \qquad \frac{b}{a} \text{ irrational.}$$

Wir wählen eine Folge von Zahlenpaaren p_i, q_i (p_i, q_i ganz und positiv, $\lim\limits_{i=\infty} p_i = \lim\limits_{i=\infty} q_i = +\infty$), wo

$$\frac{p_i}{q_i} = \left|\frac{b}{a}\right| + \frac{c_i}{q_i^2}, \qquad |c_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir setzen

$$x_i = \operatorname{Max}\left(\left[\frac{6 u p_i}{v-u}\right], \left[\frac{3 q_i}{v-u}\right]\right) + 1$$

und wählen eine ganze Zahl y_i so, daß

$$\frac{u+v}{2} < \frac{y_i}{x_i} < \frac{u+2v}{3},$$

was für hinreichend große Werte von x_i, d. h. von i, offenbar möglich ist. Dann ist, $x_i' = x_i + p_i$, $y_i' = y_i - q_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a}$ gesetzt,

$$u < \frac{\frac{y_i}{x_i} - \frac{q_i}{x_i}}{1 + \frac{p_i}{x_i}} \leqq \frac{y_i'}{x_i'} < \frac{y_i}{x_i} + \frac{q_i}{x_i} < \frac{u+2v}{3} + \frac{v-u}{3} = v$$

und

$$\begin{aligned}&|f(x_i', y_i') - f(x_i, y_i)|\\ &= |(a(x_i' + x_i) + b(y_i' + y_i))(a(x_i' - x_i) + b(y_i' - y_i))|\\ &= \left|\left(a(p_i + 2x_i) + b\left(-q_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a} + 2y_i\right)\right| \cdot \left|ap_i - bq_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a}\right)\right|.\end{aligned}$$

Wegen $p_i = O(q_i)$, $x_i = O(q_i)$, $y_i = O(q_i)$, $ap_i - bq_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a} = a\frac{c_i}{q_i}$ ist also

(34) $$|f(x_i', y_i') - f(x_i, y_i)| < C \cdot |c_i|,$$

wo C von i unabhängig ist. Weiter ist

$$f(x_i', y_i') - f(x_i, y_i) \neq 0,$$

da sonst entweder $x_i = x_i'$, $y_i = y_i'$ oder $x_i = -x_i'$, $y_i = -y_i'$ sein müßte, was nicht der Fall ist. Daraus folgt, wegen $|c_i| < 1$, daß $\liminf\limits_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ endlich ist, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Es seien jetzt σ, π_k, ϱ_k die in der Bemerkung 2 des § 2 definierten Zahlen. Es sei $u = 0$, $v = 1$, $f(x, y) = (x + \sigma y)^2$; dann sind alle Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Behauptung II erfüllt. Wenn wir im Beweise der Behauptung II für a, b, p_i, q_i die Zahlen $1, \sigma, \varrho_i, \pi_i$ nehmen, so ist nach (31): $|c_i| < \frac{3}{\pi_i^2}$, also $\lim\limits_{i=\infty} c_i = 0$. Wegen (34) ist also jetzt $\liminf\limits_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$. Man darf also die Behauptung II *nicht* durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf\limits_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ endlich und von Null verschieden" ersetzen.

Bemerkung 2. Hurwitz[7]) hat folgenden Satz bewiesen: Es sei $c > \sqrt{5}$; dann gibt es nur endlich viele Zahlenpaare p, q mit p, q ganz, $q \neq 0$, $\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}$. Es gibt also eine Zahl $d > \sqrt{5}$, so daß für *alle* p, q (p, q ganz, $q \neq 0$) gilt

$$\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{dq^2}.$$

Wir setzen $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \zeta$ und wählen $u = 0$, $v = 1$, $f(x, y) = (\zeta x + y)^2$. Dann sind alle Voraussetzungen erfüllt, die wir für die Anwendbarkeit der Behauptung II verlangten. Wenn (p, q) und (r, s) zwei verschiedene Gitterpunkte des Gebietes (1) sind, so ist

$$|f(p, q) - f(r, s)| = |\zeta(p + r) + (q + s)| \cdot |\zeta(p - r) + (q - s)|.$$

---

[7]) Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, Math. Annalen **39** (1891), S. 279–284.

Es ist

$$|\zeta(p+r)+(q+s)| > \operatorname{Max}(p,r) \geqq 1\,.$$

Weiter ist entweder $p=r$, also $q \neq s$, und dann

$$|\zeta(p-r)+(q-s)| \geqq 1$$

oder $p \neq r$, und dann ist

$$|\zeta(p-r)+(q-s)| > \frac{1}{d\,|p-r|} > \frac{1}{d\operatorname{Max}(p,r)}\,.$$

Also ist

$$|f(p,q)-f(r,s)| > \operatorname{Min}\left(1,\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}\,.$$

Um so mehr ist also

$$\liminf_{n=\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) > 0\,.$$

Man darf also *nicht* die Behauptung II durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf\limits_{n=\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$“ ersetzen.

Beweis der Behauptung III. Es sei in (1)

$f(x,y)=\alpha(ax^2+2bxy+cy^2)$, α beliebig; a,b,c ganz; $b^2-ac \neq 0$.

Dann ist offenbar $\lambda_n = \alpha\cdot m_n$ (m_n ganz), also

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqq \alpha\,. \tag{35}$$

Wir wählen nun einen Gitterpunkt (p,q) mit $p>0$, $u<\frac{q}{p}<v$, und es sei $h>0$ eine ganze Zahl; für $h>h_0$ gilt dann auch

$$u < \frac{hq-ap-bq}{hp+bp+cq} < v,$$

und es ist, wie leicht nachzurechnen,

$$f(hp+bp+cq,\ hq-ap-bq)-f(hp,hq) = (ac-b^2)f(p,q), \tag{36}$$

also von Null verschieden und von h unabhängig. Aus (35) und (36) folgt aber, daß $\liminf\limits_{n=\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ endlich und von Null verschieden ist, w. z. b. w.

(Eingegangen am 6. April 1926.)