Vojtěch Jarník

Über bedingt konvergente Reihen

Math. Zeitschr. 24 (1926), pp. 715--732

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500686

Über bedingt konvergente Reihen.

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

Ein wohlbekannter Satz von Riemann lautet: Es sei

(c) $$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = s$$

eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern; es seien

(a) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

die nichtnegativen Glieder der Reihe (c),

(b) $$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

die übrigen Glieder von (c), wobei die a_ν in (a) und die b_ν in (b) in derselben Reihenfolge auftreten wie in der Reihe (c). Dann läßt sich die Reihe (c) zu jeder reellen Summe umordnen und zwar so, daß dabei die Reihenfolge der a_ν untereinander und die der b_ν untereinander ungeändert bleibt.

Ich stelle mir hier eine verwandte Frage; ich setze aber über die Folge (a) nur voraus, daß $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$ bei $n \to \infty$, statt vorauszusetzen, daß (a) genau aus allen nichtnegativen Gliedern der Reihe (c) besteht; und ich frage nach der Menge M der Werte, zu welchen sich die Reihe (c) unter Beibehaltung der Reihenfolge der a_ν untereinander und der b_ν untereinander umordnen läßt. Ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beeinträchtigen, setze ich im folgenden $s = 0$ voraus.

Im § 1 werde ich nach einigen einleitenden Erläuterungen und nach zwei Sätzen, die eine formale Vereinfachung der Frage gestatten, den Satz 3 beweisen: die Menge M ist ein Modul.

Im § 2 beweise ich im Satz 4 eine naheliegende Verallgemeinerung des Riemannschen Satzes und gebe dann (Satz 5 und 6) für gewisse Fälle eine untere Schranke für die kleinste positive in M enthaltene Zahl an, welche nach Satz 7 und 8 die „wahre Schranke“ ist.

§ 1.

Es sei eine Folge reeller Zahlen

$$c_1, c_2, c_3, \dots \tag{1}$$

gegeben;

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \tag{2}$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots \tag{3}$$

seien zwei unendliche Teilfolgen aus (1), und zwar seien in (3) alle Elemente von (1) enthalten, die nicht in (2) enthalten sind und keine anderen (d. h. (2) und (3) geben zusammen genau alle Elemente von (1)). Weiter setze ich voraus: Wenn $0 < n < m$, m, n ganz, so soll in (1) das Element a_n vor dem Element a_m und ebenso b_n vor b_m stehen; d. h. die Elemente der Folge (2), und ebenso die der Folge (3), sollen ebenso angeordnet sein, wie sie in (1) angeordnet waren.

Endlich sei die Reihe

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots \tag{4}$$

konvergent und habe die Summe Null; dagegen sei

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty \quad \text{bei} \quad n \to \infty, \tag{4a}$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \to -\infty.$$

Wegen (4a) ist (4) bedingt konvergent.

Wir nennen eine Funktion $f(n)$, die für alle ganzen $n \geqq 0$ definiert ist, eine *A-Funktion*, wenn folgendes gilt:

1. $f(0) = 0$.
2. $f(n)$ ist ganz und nicht negativ für jedes ganze $n > 0$.
3. Aus n, m ganz, $n > m \geqq 0$ folgt
$$f(n) \geqq f(m).$$
4. $f(n) \to +\infty$ bei $n \to \infty$.

Eine formal aufgeschriebene (nicht notwendig konvergente) Reihe

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots \tag{5}$$

nennen wir „*eine Umordnung der Reihe* (4) *in bezug auf die Teilfolgen* (2), (3)“, wenn folgendes gilt:

1. Die Reihe (5) entsteht durch Umordnung der Reihe (4) (d. h. (5) enthält als Glieder alle Elemente der Folge (1), jedes nur einmal und keine anderen).

2. Wenn n, m ganz, $0 < n < m$, so steht in der Reihe (5) das Glied a_n vor a_m und b_n vor b_m (d. h. jede der beiden Teilfolgen (2), (3) soll in (5) in ihrer ursprünglichen Anordnung auftreten).

Wenn wir die Anzahl der b_ν, die in (5) vor a_n stehen, mit $f(n)$ bezeichnen und $f(0) = 0$ setzen, so ist $f(n)$ offenbar eine A-Funktion; und umgekehrt wird durch jede A-Funktion auf diese Weise eine Umordnung der Reihe (4) in bezug auf (2), (3) definiert, und zwar eindeutig.

Ebenso, wenn wir die Anzahl der a_ν, die in (5) vor b_n stehen, mit $F(n)$ bezeichnen und $F(0) = 0$ setzen, so ist $F(n)$ eine A-Funktion; und umgekehrt wird durch jede A-Funktion auf diese Weise eine Umordnung der Reihe (4) in bezug auf (2), (3) definiert, und zwar eindeutig.

Auch zu der ursprünglichen Anordnung (4) gehört je eine solche A-Funktion.

Wir wollen sagen, daß sich die Reihe (4) in bezug auf (2), (3) zur Summe a umordnen läßt, wenn es eine Umordnung von (4) in bezug auf (2), (3) gibt, die gegen a konvergiert. Im folgenden wollen wir die Menge M der Werte untersuchen, zu welchen sich (4) in bezug auf (2), (3) umordnen läßt.

Nach dem, was über die A-Funktionen gesagt wurde, sind folgende drei Aussagen äquivalent:

I. Die Reihe (4) läßt sich in bezug auf die Teilfolgen (2), (3) zur Summe a umordnen.

II. Es gibt eine A-Funktion $f(n)$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $n_0(\delta)$, so daß

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - a \right| < \delta$$

für alle $n > n_0(\delta)$ und alle m mit

$$f(n) \leqq m \leqq f(n+1).$$

III. Es gibt eine A-Funktion $F(m)$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $m_0(\delta)$, so daß

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - a \right| < \delta$$

für alle $m > m_0(\delta)$ und alle n mit

$$F(m) \leqq n \leqq F(m+1).$$

Ich werde im folgenden die Sätze der Aussage I entsprechend formulieren, dagegen benutze ich bei den Beweisen die Aussagen II bzw. III.

Satz 1. *Voraussetzung: Es sei möglich, die Reihe* (4) *in bezug auf* (2), (3) *zur Summe a umzuordnen.*

Behauptung: *Dann läßt sich die Reihe*

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \dots = 0 \tag{6}$$

in bezug auf die Teilfolgen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \tag{7}$$

$$-a_1, -a_2, -a_3, \dots \tag{8}$$

zur Summe a umordnen.

Beweis. Weil (4) die Summe 0 hat, gibt es eine A-Funktion $\varphi(n)$, so daß für jedes $\delta > 0$ und für alle ganzen n, m mit $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gilt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu \right| < \delta. \tag{9}$$

Weiter gibt es nach Voraussetzung eine A-Funktion $\psi(m)$, so daß für jedes $\delta > 0$ und für alle ganzen m, l mit $m > m_0(\delta)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$ gilt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - a \right| < \delta. \tag{10}$$

Es sei nun $n_0'(\delta)$ die kleinste ganze Zahl mit $n_0'(\delta) > n_0(\delta)$, $\varphi(n_0'(\delta)) > m_0(\delta)$; n, l seien zwei ganze Zahlen mit $n > n_0'(\delta)$, $\psi(\varphi(n)) \leqq l \leqq \psi(\varphi(n+1))$. Weil die Funktion $\psi(m)$ nicht abnimmt, läßt sich eine ganze Zahl m so finden, daß $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ und $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$. Dann gilt gleichzeitig (9) und (10), also ist

$$\left| \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} (-a_\nu) - a \right| < 2\delta.$$

Damit ist aber der Satz bewiesen, denn $\varrho(n) = \psi(\varphi(n))$ ist offenbar eine A-Funktion.

Satz 2. *Voraussetzung*: *Es sei möglich, die Reihe* (6) *in bezug auf* (7), (8) *zur Summe a umzuordnen.*

Behauptung: *Dann läßt sich die Reihe* (4) *in bezug auf* (2), (3) *zur Summe a umordnen.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine A-Funktion $\varphi(n)$, so daß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen n, m mit $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu - a \right| < \delta. \tag{11}$$

Weiter (weil (4) zu Null konvergiert) gibt es eine A-Funktion $\psi(m)$, so daß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen m, l mit $m > m_0(\delta)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$ gilt

$$(12) \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{l} b_\mu \right| < \delta.$$

Es sei nun die ganze Zahl n so groß, daß $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) > m_0(\delta)$, und es sei die ganze Zahl l so beschaffen, daß $\psi(\varphi(n)) \leqq l \leqq \psi(\varphi(n+1))$. Dann läßt sich ein ganzes m so finden, daß $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$; also gilt dann sowohl (11) als (12), woraus

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\mu=1}^{l} b_\mu - a \right| < 2\delta$$

folgt, w. z. b. w.

Nach diesen beiden Sätzen genügt es, die Menge der Werte zu untersuchen, zu welchen sich (6) in bezug auf (7), (8) umordnen läßt; denn diese Menge ist mit M identisch. Ich werde im folgenden also ausschließlich die Umordnungen von (6) in bezug auf (7), (8) betrachten; die Worte „in bezug auf (7), (8)“ lasse ich im folgenden weg, da ja kein Mißverständnis mehr möglich ist.

Satz 3. *Die Menge M ist ein Modul.*

Beweis. Ich soll zeigen:

Wenn a und b zu M gehören, so gehört auch $a-b$ zu M.

Das beweise ich so: Wenn a zu M gehört, so gibt es eine A-Funktion $\varphi(n)$, so daß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen n, m mit $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gilt

$$(13) \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu - a \right| < \delta.$$

Wenn b zu M gehört, so gibt es eine A-Funktion $\psi(m)$, so daß für jedes $\delta > 0$ und alle ganzen m, l mit $m > m_0(\delta)$, $\psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1)$ gilt

$$(14) \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu - b \right| < \delta.$$

Wenn nun die ganze Zahl n so groß ist, daß $n > n_0(\delta)$, $\varphi(n) > m_0(\delta)$ und wenn die ganze Zahl l so beschaffen ist, daß

$$\psi(\varphi(n)) \leqq l \leqq \psi(\varphi(n+1)),$$

so gibt es ein ganzes m mit

$$\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1), \qquad \psi(m) \leqq l \leqq \psi(m+1);$$

also gilt dann sowohl (13) als (14), woraus

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\mu=1}^{l} a_\mu - (a-b) \right| < 2\delta$$

folgt, w. z. b. w.

Nach Satz 3 sieht also die Menge M folgendermaßen aus:

1. Entweder besteht M aus der einzigen Zahl Null.

2. Oder es enthält M auch andere Zahlen, unter welchen dann sicher auch positive Zahlen vorkommen. Dann sind zwei Fälle möglich:

a) Entweder gibt es unter den positiven Zahlen aus M eine kleinste ϱ; dann ist M mit der Menge der Zahlen $n\varrho$ $\left(n \gtreqless 0,\ n \text{ ganz}\right)$ identisch.

b) Oder es gibt in M beliebig kleine positive Zahlen; dann ist M auf der Achse der reellen Zahlen überall dicht[1]).

Ich werde im § 2 einige Sätze ableiten, die uns weitere Aussagen über die Beschaffenheit der Menge M gestatten.

§ 2.

In diesem Paragraph werde ich zeigen, was man aus der Struktur der Folge $a_1, a_2, \ldots$ auf den Modul M schließen kann. Dazu sind zuerst einige Begriffe notwendig, die mit dem infinitären Verhalten dieser Folge zusammenhängen.

Definition von α. Es sei $n > 0$ und ganz; ich betrachte die kleinste unter den Zahlen

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)^{2)} \tag{15}$$

(eine solche gibt es, da die Zahlen (15) mit $p \to \infty$ gegen $+\infty$ streben) und bezeichne sie mit $-\alpha_n$; also ist $\alpha_n \geqq 0$. Ich setze $\alpha = \limsup_{n=\infty} \alpha_n$.[3])

Ich werde folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *Wenn $\alpha = 0$, so läßt sich die Reihe (6) zu jedem reellen Wert s umordnen.*

Wenn $\alpha > 0$ (worin auch der Fall $\alpha = +\infty$ enthalten ist), führe ich eine neue Konstante β folgendermaßen ein:

Definition von β. Es sei $n > 0$ und ganz, $k > 1$. Ich betrachte alle Quotienten

$$\frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu} \qquad (p > 0 \text{ ganz}), \tag{16}$$

---

[1]) Ob dann M mit der Menge aller reeller Zahlen identisch sein muß, d. h. ob die Menge M immer abgeschlossen ist, weiß ich nicht. Vgl. allerdings besonders den folgenden Satz 4.

[2]) $\sum\limits_{n+1}^{n}$ bedeutet immer Null.

[3]) Für lim sup und lim wird im folgenden auch der Wert $+\infty$ zugelassen.

für welche

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu > k. \tag{17}$$

Die obere Grenze der Zahlen (16), wenn p alle positiven ganzen Zahlen mit (17) durchläuft, bezeiche ich mit $\beta_{k,n}^*$ und setze

$$\beta_k = \limsup_{n=\infty} \beta_{k,n}^*,$$

$$\beta = \lim_{k=\infty} \beta_k. \text{[4]}$$

(Der letztgenannte Limes existiert, da $\beta_{k,n}^*$, und also auch β_k, mit wachsendem k nicht zunimmt.)

Satz 5. *Es sei* $\alpha > 0$, β *endlich; dann ist auch* α *endlich. Wenn* $\beta = 1$, *so läßt sich* (6) *zu keiner anderen Summe als zu Null umordnen; wenn* $\beta > 1$, *so läßt sich* (6) *zu keiner positiven Summe umordnen, die kleiner als* $\frac{2\alpha}{\beta - 1}$ *ist.*

Dieser Satz versagt in dem Fall $\beta = +\infty$. Um auch in diesem Fall einen brauchbaren Satz zu bekommen, führe ich folgende Konstante γ ein, deren Definition leider nicht ganz einfach ist.

Definition von γ. Es sei $n > 0$ und ganz, $k > 1$. Ich betrachte wieder die Folge

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots); \tag{15}$$

es sei p_1 die kleinste positive Zahl, für welche

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p_1} a_\nu > 0.$$

Dann bezeichne ich mit t die kleinste der Zahlen

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \qquad (p = 0, 1, \ldots, p_1 - 1).$$

Wenn $t \leqq -\frac{1}{k}$, setze ich $\alpha_{k,n} = -t$; wenn $t > -\frac{1}{k}$, definiere ich $\alpha_{k,n}$ überhaupt nicht.

Nun führe ich noch eine Konstante $\beta_{k,n}$ ein. Ich betrachte alle ganzen positiven p, für welche

$$k < \sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu < 2k; \tag{18}$$

entweder gibt es kein solches p[5]; dann definiere ich $\beta_{k,n}$ überhaupt nicht.

---

[4]) Offenbar ist $1 \leqq \beta \leqq +\infty$.

[5]) Das kann, wegen $k > 1$, $a_n \to 0$, nur für endlich viele n der Fall sein.

Oder es gibt mindestens ein solches p (und dann notwendig nur endlich viele). Dann betrachte ich den Quotienten

$$\frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu}$$

für alle p, die (18) erfüllen; den größten Wert dieses Quotienten setze ich gleich $\beta_{k,n}$.[6])

Ich behaupte noch: Wenn für ein Wertepaar k, n die Größen $\alpha_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ beide definiert sind, so ist $\beta_{k,n} > 1$. Denn, wenn $\alpha_{k,n}$ definiert ist, so ist die erste von Null verschiedene Zahl der Folge

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots$$

negativ; also treten in jeder Summe $\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu$, für welche (18) gilt, sowohl negative wie positive Glieder auf, also ist $\beta_{k,n} > 1$. Also hat folgende Definition einen Sinn:

Wenn für ein Wertepaar k, n sowohl $\alpha_{k,n}$ als $\beta_{k,n}$ definiert sind, so sei

$$\gamma_{k,n} = \frac{2\,\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n} - 1};$$

sonst sei

$$\gamma_{k,n} = 0.$$

Endlich sei

$$\gamma_k = \limsup_{n=\infty} \gamma_{k,n}, \qquad \gamma = \limsup_{k=\infty} \gamma_k.$$

Dann lautet der

Satz 6. *Es sei* $\alpha > 0$. *Wenn* $\gamma = +\infty$, *so läßt sich* (6) *zu keiner anderen Summe als zu Null umordnen. Wenn* γ *endlich, so läßt sich* (6) *zu keiner positiven Summe umordnen, die kleiner als* γ *ist.*

Ehe ich zu den Beweisen dieser Sätze übergehe, werde ich zeigen, *daß Satz* 5 *aus Satz* 6 *folgt.* Dazu genügt es, zweierlei zu zeigen:

1. Wenn $\alpha = +\infty$, so ist auch $\beta = +\infty$.

2. Wenn $\beta = 1$, so ist $\gamma = +\infty$; wenn β endlich, $\beta > 1$, so ist $\gamma \geqq \frac{2\alpha}{\beta - 1}$ (alles unter der Voraussetzung $\alpha > 0$).

Beweis von 1. Es genügt folgendes zu zeigen: Es sei $\alpha = +\infty$; dann gibt es zu jedem $R > 0$, zu jedem $k > 1$ und zu jedem ganzen $n_0 > 0$ ein $n > n_0$ und ein $p > 0$ (n, p ganz), so daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu > k, \qquad \frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu} > R.$$

[6]) Offenbar ist $1 \leqq \beta_{k,n} \leqq \beta^*_{k,n}$.

Denn daraus folgt $\beta^*_{k,n} > R$, also

$$\beta_k = \limsup_{n=\infty} \beta^*_{k,n} \geqq R$$

für jedes $R > 0$ und jedes $k > 1$. Also ist $\beta_k = +\infty$ für alle $k > 1$, also $\beta = +\infty$.

Es sei also ein $R > 0$, ein $k > 1$ und ein ganzes $n_0 > 0$ gegeben. Es sei n_1 so gewählt, daß $|a_n| < 1$ für alle $n > n_1$. Wegen $\alpha = +\infty$ kann ich ein $n > \operatorname{Max}(n_0, n_1)$ und ein $p_1 > 0$ so finden, daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p_1} a_\nu < -R(k+1).$$

Es sei p die kleinste positive ganze Zahl, für welche gilt

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu > k, \qquad p > p_1.$$

Dann ist $\sum_{\nu=n+1}^{n+p-1} a_\nu \leqq k$, also $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu < k+1$; weiter ist aber

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu| \geqq -\sum_{\nu=n+1}^{n+p_1} a_\nu > R(k+1),$$

also

$$\frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|}{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu} > R,$$

w. z. b. w.

B e w e i s v o n 2. Es genügt, folgendes zu zeigen: Es sei $\alpha > 0$, β endlich; es sei eine Zahl ε gegeben, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$. Dann gibt es eine Zahl $k_0 > 1$ mit folgender Eigenschaft:

Wenn ein $k > k_0$ und ein ganzes $n_0 > 0$ gegeben sind, so läßt sich eine ganze Zahl $n' > n_0$ so finden, daß

$$\frac{\alpha_{k,n'}}{\beta_{k,n'} - 1} > \frac{\alpha - \varepsilon}{\beta + 2\varepsilon - 1}.$$

Denn daraus folgt

$$\gamma_{k,n'} > \frac{2(\alpha - \varepsilon)}{\beta + 2\varepsilon - 1}, \qquad \gamma_k = \limsup_{n=\infty} \gamma_{k,n} \geqq \frac{2(\alpha-\varepsilon)}{\beta + 2\varepsilon - 1}$$

für alle $k > k_0$, also

$$\gamma = \limsup_{k=\infty} \gamma_k \geqq \frac{2(\alpha-\varepsilon)}{\beta+2\varepsilon-1},$$

und daraus, für $\varepsilon \to 0$:

$$\gamma \geqq \frac{2\alpha}{\beta - 1}, \quad \text{falls } \beta > 1,$$
$$\gamma = +\infty, \quad \text{falls } \beta = 1.$$

Es sei also ein ε mit $0<\varepsilon<1$, $\varepsilon<\frac{\alpha}{2}$ gegeben; ich setze $k_1=\frac{2}{\varepsilon}$ und wähle ein $k_2>1$ so, daß $\beta_k<\beta+\varepsilon$ für $k>k_2$; dann setze ich $k_0=\operatorname{Max}(k_1,k_2)$. Nun sei ein $k>k_0$ und ein $n_0>0$ gegeben; ich wähle ein n_1 so, daß erstens $n_1>n_0$, zweitens $\beta^*_{k,n}<\beta_k+\varepsilon$ für alle $n>n_1$, drittens $|a_n|<1$ für $n>n_1$. Dann gibt es ein $n_2>n_1$ mit $\alpha_{n_2}>\alpha-\varepsilon$; d. h. es gibt eine ganze Zahl $p>0$, so daß

$$\sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+p} a_\nu<-\alpha+\varepsilon.$$

Ich betrachte alle Zahlen

$$\sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+p'} a_\nu \quad \text{mit} \quad p'=0,1,\ldots,p-1;$$

es sei $\sum\limits_{\nu=n_2+1}^{n_2+q} a_\nu$ die größte unter ihnen; diese Zahl ist nicht negativ $\left(\text{weil } \sum\limits_{\nu=n_2+1}^{n_2} a_\nu=0\right)$ und keine der Zahlen $\sum\limits_{\nu=n_2+q+1}^{n_2+q'} a_\nu$ mit $q'=q+1,\,q+2,\ldots,p$ ist positiv $\left(\text{sonst wäre } \sum\limits_{\nu=n_2+1}^{n_2+q'}>\sum\limits_{\nu=n_2+1}^{n_2+q}\right)$; endlich ist

$$\sum_{\nu=n_2+q+1}^{n_2+p} a_\nu \leqq \sum_{\nu=n_2+1}^{n_2+p} a_\nu<-\alpha+\varepsilon.$$

Wegen $\alpha-\varepsilon>\varepsilon>\frac{1}{k}$ ist also α_{k,n_2+q} definiert und größer als $\alpha-\varepsilon$.

Weil $|a_n|<1$ für $n>n_1$, so ist auch β_{k,n_2+q} definiert, und zwar ist

$$\beta_{k,n_2+q}\leqq\beta^*_{k,n_2+q}<\beta_k+\varepsilon<\beta+2\varepsilon.$$

Daher ist (mit $n'=n_2+q$)

$$\frac{\alpha_{k,n'}}{\beta_{k,n'}-1}=\frac{\alpha_{k,n_2+q}}{\beta_{k,n_2+q}-1}>\frac{\alpha-\varepsilon}{\beta+2\varepsilon-1},$$

w. z. b. w.

Nach dem eben Gesagten genügt es also, die Sätze 4 und 6 zu beweisen.

Beweis des Satzes 4. Der Beweis ist vollkommen analog dem üblichen Beweise des Riemannschen Satzes. Nach Satz 3 genügt es, den Beweis für positive s zu führen.

Es sei n_1 die kleinste Zahl, für welche $\sum\limits_{\nu=1}^{n_1} a_\nu>s$ ist; es sei n_1' die kleinste Zahl, für welche $\sum\limits_{\nu=1}^{n_1} a_\nu-\sum\limits_{\nu=1}^{n_1'} a_\nu<s$ ist; dann sei n_2 die kleinste Zahl, die größer als n_1 ist, und für welche $\sum\limits_{\nu=1}^{n_2} a_\nu-\sum\limits_{\nu=1}^{n_1'} a_\nu>s$ ist; dann sei

n_2' die kleinste Zahl, die größer als n_1' ist, und für welche $\sum_{\nu=1}^{n_2} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_2'} a_\nu < s$ ist. So fahre ich fort und bekomme eine Umordnung der Reihe (6)

$$(19)\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} - a_1 - \ldots - a_{n_1'} + a_{n_1+1} + \ldots \\ + a_{n_2} - a_{n_1'+1} - \ldots - a_{n_2'} + \ldots .$$

Nach der Wahl der Zahlen n_k, n_k' ist wegen $a_n \to 0$ klar, daß

$$(20)\qquad \sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu \to s,$$

$$(21)\qquad \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu \to s$$

bei $k \to \infty$.

Jede Partialsumme von (19) hat entweder die Form

$$\sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{m'} a_\nu,$$

wo $n_k' \leqq m' \leqq n_{k+1}'$, oder die Form

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu,$$

wo $n_k < m \leqq n_{k+1}$.

Es ist aber

$$(22)\qquad \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{m'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu - \sum_{\nu=n_k'+1}^{m'} a_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu + \alpha_{n_k'},$$

$$(23)\qquad \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{m'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}'} a_\nu + \sum_{\nu=m'+1}^{n_{k+1}'} a_\nu \geqq \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}'} a_\nu - \alpha_{m'},$$

$$(24)\qquad \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n_{k+1}} a_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n_{k+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu + \alpha_m,$$

$$(25)\qquad \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu + \sum_{\nu=n_k+1}^{m} a_\nu \geqq \sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_k'} a_\nu - \alpha_{n_k}.$$

Aus (22), (23), (24), (25) folgt aber wegen (20), (21) und wegen $\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0$, daß (19) konvergiert, und zwar zur Summe s, w. z. b. w.

Dem Beweise des Satzes 6 schicke ich folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Voraussetzung: Es sei eine Umordnung der Reihe* (6) (*in bezug auf* (7), (8)) *vorgelegt, die zu einer positiven Summe a konvergiert. Es sei* $\varphi(n)$ *die A-Funktion, welche angibt, wie viele Glieder* a_ν *der Folge* (7) *vor dem Glied* $-a_n$ *der Folge* (8) *in dieser Anordnung stehen.*

Behauptung: Es gibt ein n^*, so daß für jedes $n > n^*$ (n ganz) gil

$$\varphi(n) > n.$$

Beweis. Nach der Definition von $\varphi(n)$ läßt sich eine Zahl n_1 sc finden, daß für alle ganzen n, m mit $n > n_1$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ gilt

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - a\right| < \frac{a}{2},$$

also insbesondere

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(n)} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu > \frac{a}{2} \tag{26}$$

für alle $n > n_1$.

Wir wählen dann eine Zahl $A > 0$ so, daß $A > \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ für alle $n \leqq n_1$; dann gibt es $\left(\text{wegen } \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty\right)$ eine ganze Zahl $n^* > n_1$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n^*} a_\nu \geqq A,$$

aber $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < A$ für alle $n < n^*$. Wegen $n^* > n_1$ ist nach (26) $\sum_{\nu=1}^{\varphi(n^*)} a_\nu > \sum_{\nu=1}^{n^*} a_\nu \geqq A$, also $\varphi(n^*) > n^*$. Es sei nun $n > n^*$, und es sei per absurdum $\varphi(n) \leqq n$.

Es sei n' die erste der Zahlen

$$n^*,\ n^*+1,\ \ldots,\ n,$$

für welche $\varphi(n') \leqq n'$ ist. Dann ist $n' > n^*$, also $n' - 1 \geqq n^*$; nach der Definition von n' ist also $\varphi(n'-1) > n'-1$. Weil $\varphi(n)$ nicht abnimmt, ist also

$$n' \geqq \varphi(n') \geqq \varphi(n'-1) > n'-1,$$

also $\varphi(n') = n'$, also

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(n')} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n'} a_\nu = 0,$$

was mit (26) im Widerspruch steht.

Beweis des Satzes 6. Um Satz 6 zu beweisen, genügt es, folgendes zu zeigen: Wenn eine Umordnung der Reihe (6) vorliegt, die zu einer positiven Summe a konvergiert, so gilt folgendes:

Zu jeder Zahl ε mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ läßt sich eine Zahl $k_0 = k_0(\varepsilon) > 1$ finden mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $k > k_0$ gibt es eine Zahl $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$, so daß für jedes ganze $n > n_0$ gilt

$$a \geqq (1 - 2\varepsilon)\gamma_{k,n} - \varepsilon.$$

Daraus folgt nämlich

$$a \geqq (1-2\varepsilon) \limsup_{n=\infty} \gamma_{k,n} - \varepsilon = (1-2\varepsilon)\gamma_k - \varepsilon$$

für jedes $k > k_0$, also

$$a \geqq (1-2\varepsilon) \limsup_{k=\infty} \gamma_k - \varepsilon = (1-2\varepsilon)\gamma - \varepsilon,$$

also entweder ein Widerspruch, wenn $\gamma = +\infty$, oder (durch $\varepsilon \to 0$) $a \geqq \gamma$, wenn γ endlich. Das sind aber genau die Behauptungen des Satzes 6.

Es sei also eine Umordnung von (6) vorgelegt, die gegen eine positive Zahl a konvergiert; $\varphi(n)$ sei die A-Funktion, die angibt, wie viele a_ν in dieser Umordnung vor $-a_n$ stehen. Dann gibt es nach dem eben bewiesenen Hilfssatz ein n^*, so daß $\varphi(n) > n$ für $n > n^*$.

Es sei weiter eine Zahl ε gegeben; $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Ich wähle zunächst eine Zahl $k_0 > 1$, so daß es für jedes $k > k_0$ eine ganze Zahl $r > 1$ gibt, für welche

$$k < \frac{3}{4} a r < \frac{5}{4} a r < 2k \tag{27}$$

gilt[7]).

Es sei nun ein $k > k_0$ gegeben; ich nehme eine ganze Zahl $r = r(k) > 1$, die (27) erfüllt, und halte sie im Verlauf des Beweises fest. Dann wähle ich eine Zahl $\delta = \delta(k, \varepsilon) > 0$, so daß

$$\delta < a, \quad k r \delta < \varepsilon. \tag{28}$$

Nun wähle ich eine Zahl $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$, so daß für jedes ganze $n > n_0$ gilt:

$$\varphi(n) > n, \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{\varphi(n)} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - a \right| < \delta. \tag{29}$$

Ich behaupte nun: für jedes ganze $n > n_0$ ist

$$a \geqq (1-2\varepsilon)\gamma_{k,n} - \varepsilon. \tag{30}$$

Beweis: a) Entweder ist $\gamma_{k,n} = 0$; dann ist (30) trivial.

b) Oder sind die beiden Zahlen $\alpha_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ definiert, also $\gamma_{k,n} = \frac{2\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n} - 1}$. Dannn ist (nach der Definition von $\alpha_{k,n}$) erstens

$$\alpha_{k,n} \geqq \frac{1}{k}. \tag{31}$$

---

[7]) Eine solche Zahl k_0 gibt es, da die Bedingung besagt: Auf der offenen Strecke $\frac{4}{3} \cdot \frac{k}{a} \ldots \frac{8}{5} \cdot \frac{k}{a}$ soll es mindestens eine ganze Zahl $r > 1$ geben; das ist sicher erfüllt, wenn $\frac{4}{3} \cdot \frac{k}{a} > 1$, $\left(\frac{8}{5} - \frac{4}{3}\right) \frac{k}{a} > 1$; also kann ich — sogar unabhängig von ε — z. B. setzen $k_0 = \operatorname{Max}\left(\frac{15}{4} a, 2\right)$.

Zweitens gibt es eine ganze Zahl $n' > n$, so daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} a_\nu = -\alpha_{k,n} \tag{32}$$

und

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} a_\nu \leqq 0 \quad \text{für} \quad m = n, n+1, \ldots, n'. \tag{33}$$

Ich setze nun

$$\begin{aligned} n_1 &= n, \quad n_2 = \varphi(n_1), \quad n_3 = \varphi(n_2), \quad \ldots, \quad n_{r+1} = \varphi(n_r); \\ n_1' &= n', \quad n_2' = \varphi(n_1'), \quad n_3' = \varphi(n_2'), \quad \ldots, \quad n_r' \quad = \varphi(n_{r-1}'). \end{aligned}$$

Wegen $n' > n_0$, $n > n_0$ ist nach (29)

$$\left\{\begin{aligned} n &= n_1 < n_2 < \ldots < n_r \quad < n_{r+1}, \\ n' &= n_1' < n_2' < \ldots < n_{r-1}' < n_r' \end{aligned}\right. \tag{34}$$

und

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n_{i+1}} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_i} a_\nu - a \right| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{35}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n_{i+1}'} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_i'} a_\nu - a \right| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1.) \tag{36}$$

Insbesondere ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n_2} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_1} a_\nu = \sum_{\nu=n_1+1}^{n_2} a_\nu > a - \delta > 0$$

(nach (28)), woraus wegen (33) folgt

$$n_1' < n_2.$$

Wegen der Monotonie der Funktion $\varphi(n)$ und wegen (34) folgt daraus

$$n_1 < n_1' < n_2 \leqq n_2' \leqq n_3 \leqq \ldots \leqq n_r \leqq n_r' \leqq n_{r+1}.$$

Aus (35) folgt für $i = 2, 3, \ldots, r+1$

$$(a-\delta)(i-1) < \sum_{\nu=n_1+1}^{n_i} a_\nu < (a+\delta)(i-1) \tag{37}$$

und aus (36) für $i = 2, 3, \ldots, r$

$$(a-\delta)(i-1) < \sum_{\nu=n_1'+1}^{n_i'} a_\nu < (a+\delta)(i-1). \tag{38}$$

Daraus folgt erstens für $i = 1, 2, \ldots, r$:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=n_i+1}^{n_i'} a_\nu = \sum_{\nu=n_1'+1}^{n_i'} a_\nu - \sum_{\nu=n_1+1}^{n_i} a_\nu + \sum_{\nu=n_1+1}^{n_1'} a_\nu = \\ &\leqq (a+\delta)(i-1) - (a-\delta)(i-1) - \alpha_{k,n} = 2\delta(i-1) - \alpha_{k,n} \end{aligned}\right. \tag{39}$$

(für $i = 1$ ist (39) trivial wegen (32)), also

$$(40) \qquad \sum_{\nu=n_i+1}^{n_i'} |a_\nu| \geqq \alpha_{k,n} - 2\delta(i-1);$$

und zweitens für $i = 1, 2, \ldots, r$

$$\sum_{\nu=n_i'+1}^{n_{i+1}} a_\nu = \sum_{\nu=n_i+1}^{n_{i+1}} a_\nu - \sum_{\nu=n_i+1}^{n_i'} a_\nu \geqq a - \delta + \alpha_{k,n} - 2\delta(i-1)$$

(nach (35) und (39)), also

$$(41) \qquad \sum_{\nu=n_i'+1}^{n_{i+1}} |a_\nu| \geqq a + \alpha_{k,n} - \delta(2i-1).$$

Nach (40), (41) ist

$$(42) \qquad \sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} |a_\nu| \geqq ra + 2r\alpha_{k,n} - 2\delta \sum_{i=1}^{r}(i-1) - \delta \sum_{i=1}^{r}(2i-1)$$
$$= ra + 2r\alpha_{k,n} - r(2r-1)\delta.$$

Andererseits gibt (37), auf $i = r + 1$ angewandt,

$$(43) \qquad (a-\delta)r < \sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} a_\nu < (a+\delta)r.$$

Wegen (28) ist $\delta < \frac{1}{4}$ (weil $k > 1$, $r \geqq 2$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$), also ist nach (27)

$$k < \frac{3}{4}ar < \sum_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} a_\nu < \frac{5}{4}ar < 2k.$$

Also muß gelten

$$\frac{\sum\limits_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} |a_\nu|}{\sum\limits_{\nu=n_1+1}^{n_{r+1}} a_\nu} \leqq \beta_{k,n}.$$

Nach (42), (43) ist also um so mehr

$$\beta_{k,n} > \frac{a + 2\alpha_{k,n} - (2r-1)\delta}{a+\delta},$$

also

$$a > \frac{2\alpha_{k,n} - (2r-1)\delta - \delta \cdot \beta_{k,n}}{\beta_{k,n} - 1};$$

also

$$(44) \qquad a > \frac{2(\alpha_{k,n} - r\delta)}{\beta_{k,n} - 1} - \delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n} - 1}.$$

Nach (31) ist $\alpha_{k,n} \geqq \frac{1}{k}$, also wegen (28) $r\delta < \frac{\varepsilon}{k} \leqq \varepsilon\alpha_{k,n}$.

Andererseits ist aber für $\beta_{k,n} > 2$: $\delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1} < 2\delta < \varepsilon$; für $1 < \beta_{k,n} \leqq 2$ ist aber $\delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1} < \frac{2\delta}{\beta_{k,n}-1} < \frac{2\varepsilon\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n}-1}$, jedenfalls ist also $\delta \frac{\beta_{k,n}}{\beta_{k,n}-1} < \varepsilon + \frac{2\varepsilon\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n}-1}$, woraus nach (44)

$$a > \frac{2\,\alpha_{k,n}(1-2\varepsilon)}{\beta_{k,n}-1} - \varepsilon = (1-2\varepsilon)\gamma_{k,n} - \varepsilon$$

folgt, w. z. b. w.

Ich will noch zeigen, daß die Schranke $\frac{2\alpha}{\beta-1}$ im Satz 5 und die Schranke γ im Satz 6 im Falle $\gamma > 0$ die „wahren Schranken" sind [8]). Das wird durch folgende zwei Sätze geleistet:

Satz 7. *Es seien α_0, β_0 zwei endliche Zahlen, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 1$. Dann läßt sich eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit*

$$(45) \qquad a_n \to 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$$

und mit $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ konstruieren, so daß sich die Reihe (6) *in bezug auf* (7), (8) *zur Summe $\frac{2\alpha_0}{\beta_0-1}$ umordnen läßt.*

Satz 8. *Es sei γ_0 eine endliche Zahl, $\gamma_0 > 0$, dann läßt sich eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit*

$$(45) \qquad a_n \to 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$$

und mit $\gamma = \gamma_0$ konstruieren, so daß sich die Reihe (6) *in bezug auf* (7), (8) *zur Summe γ_0 umordnen läßt.*

Der Satz 8 *folgt aus dem Satz* 7. Denn es sei $0 < \gamma_0 < +\infty$, und es sei β_0 durch die Gleichung $\gamma_0 = \frac{2}{\beta_0-1}$ bestimmt (also $1 < \beta_0 < +\infty$). Nach Satz 7 gibt es eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, für welche (45) gilt, mit $\alpha = 1$, $\beta = \beta_0$, so daß sich die Reihe $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \ldots$ zum Wert $\frac{2}{\beta_0-1} = \gamma_0$ umordnen läßt.

Nach dem, was gesagt wurde, als wir den Satz 5 aus dem Satz 6 gefolgert haben, ist für diese Folge notwendig $\gamma \geqq \frac{2}{\beta_0-1} = \gamma_0$. Weil sich aber unsere Reihe nach Satz 6 zu keinem kleineren Wert als zu γ umordnen läßt, so muß $\gamma = \gamma_0$ sein; damit ist also Satz 8 aus Satz 7 abgeleitet.

---

[8]) Auch im Fall $\gamma = 0$ kann man gewissermaßen sagen, daß Satz 6 die wahre Schranke liefert; denn nach Satz 4 gibt es Reihen (6), die sich zu *jeder* reellen Summe umordnen lassen; für solche Reihen muß aber nach Satz 6 $\gamma = 0$ sein (man kann sich auch leicht direkt überzeugen, daß aus $\alpha = 0$ folgt $\gamma = 0$).

Beweis des Satzes 7. Ich setze $\delta_0 = \alpha_0 \frac{\beta_0 + 1}{\beta_0 - 1}$; dann wähle ich für $a_1, a_2, a_3, \ldots$ diese Folge:

$$a_1 = \delta_0; \qquad a_2 = -\alpha_0; \qquad a_3 = a_4 = \frac{\delta_0}{2}; \qquad a_5 = a_6 = -\frac{\alpha_0}{2};$$

$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = \frac{\delta_0}{4}; \qquad a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = -\frac{\alpha_0}{4};$$

usw. Allgemein sei für jedes ganze $m \geqq 0$:

$$a_{2^{m+1}-1} = a_{2^{m+1}} = \ldots = a_{2^{m+1}+2^m-2} = \frac{\delta_0}{2^m};$$

$$a_{2^{m+1}+2^m-1} = a_{2^{m+1}+2^m} = \ldots = a_{2^{m+2}-2} = -\frac{\alpha_0}{2^m}.$$

Es kommen also immer nacheinander 2^m Glieder $\frac{\delta_0}{2^m}$, dann 2^m Glieder $-\frac{\alpha_0}{2^m}$. Es ist $a_n \to 0$; wegen $\delta_0 > \alpha_0$ ist offenbar $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$ und $\alpha = \limsup_{n=\infty} \alpha_n = \alpha_0$; weiter sieht man fast unmittelbar, daß $\beta = \frac{\delta_0 + \alpha_0}{\delta_0 - \alpha_0} = \beta_0$ ist; endlich läßt sich aber die Reihe $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \ldots$ zur Summe $\delta_0 - \alpha_0$ umordnen. Man nehme nämlich zuerst die beiden Elemente δ_0, $-\alpha_0$ der Folge

$$(7) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots;$$

dann immer zwei Elemente der Folge (7) und nach ihnen ein Element der Folge

$$(8) \qquad -a_1, -a_2, -a_3, \ldots;$$

dadurch bekommt man folgende Umordnung:

$$\delta_0 - \alpha_0 + \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} - \delta_0 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_0 + \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{2}$$
$$+ \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{2} - \frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0}{4} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_0}{2} + \ldots,$$

und es ist klar, daß diese Reihe gegen $\delta_0 - \alpha_0$ konvergiert. Es ist aber $\delta_0 - \alpha_0 = \frac{2\alpha_0}{\beta_0 - 1}$, womit der Satz 7 bewiesen ist.

Schlußbemerkungen.

I. Die Untersuchungen des § 1 hängen gar nicht davon ab, daß

$$(4a) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to +\infty$$

vorausgesetzt wurde. Daher kann diese Bedingung ohne weiteres fortgelassen werden, und die Sätze 1, 2, 3 bleiben richtig. Eine unmittelbare Folge dieser Bemerkung ist folgender

Satz 9. *Es sei*

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = s \tag{46}$$

eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern;

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{47}$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \tag{48}$$

seien zwei Teilfolgen der Folge

$$c_1, c_2, c_3, \ldots,$$

die allen am Anfang des § 1 *ausgesprochenen Bedingungen genügen, bis auf die Bedingung* (4a); *im Gegenteil, es soll jetzt zwei endliche Zahlen* (A, B) *geben, so daß für alle ganzen* $n \geqq 1$ *ist*

$$A < \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < B. \tag{49}$$

Behauptung. *Die Reihe* (46) *läßt sich in bezug auf* (47), (48) *zu keiner anderen Summe als zu* s *umformen.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s = 0$. Wegen (46) und (49) gibt es zwei Zahlen C, D, so daß für alle ganzen $n \geqq 1$

$$C < \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu < D.$$

Also liegen bei jeder Umordnung von (46) in bezug auf (47), (48) alle Partialsummen zwischen $A + C$ und $B + D$. Also gilt für alle Zahlen s', zu welchen sich (46) in bezug auf (47), (48) umordnen läßt,

$$A + C \leqq s' \leqq B + D. \tag{50}$$

Die Zahlen s' bilden aber nach Satz 3 einen Modul, der also nach (50) aus der einzigen Zahl Null besteht, w. z. b. w.

II. Endlich ist klar, daß auch die Realität der Glieder der betrachteten Reihen bei den Untersuchungen des § 1 keine Rolle spielt.

(Eingegangen am 31. 1. 1925.)