Vojtěch Jarník

O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, přičemž zůstává zachována derivabilita funkce

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXII (1923), No. 15, 15 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500494

ROČNÍK XXXII. TŘÍDA II. ČÍSLO 15.

O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, při němž zůstává zachována derivabilita funkce.

Napsal

Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 25. května 1923.

V theorii reálných funkcí řeší se tento problém: Budiž dána n-rozměrná množina bodová $\mathfrak{E}$ a množina $\mathfrak{A}$, obsažená v $\mathfrak{E}$ a uzavřená v $\mathfrak{E}$. Budiž dána dále na množině $\mathfrak{A}$ funkce $f(P)$ bodu P prostoru n-rozměrného (t. j. funkce n proměnných); nalézti funkci $F(P)$, definovanou v $\mathfrak{E}$ takovou, aby $F(P) = f(P)$ v množině $\mathfrak{A}$ a aby funkce $F(P)$ byla spojitá ve všech bodech množiny $\mathfrak{E}$, vyjma v těch bodech množiny $\mathfrak{A}$, v nichž je funkce $f(P)$ nespojitá. Specielně tedy: je-li $f(P)$ spojitá v množině $\mathfrak{A}$, požadujeme, aby $F(P)$ byla spojitá v množině $\mathfrak{E}$.*)

Zde chci se zabývati obdobným úkolem, jejž v hrubých rysech možno formulovati takto: Jest dána konečná funkce $f(x)$ jedné proměnné x v uzavřené množině $\mathfrak{A}$, obsažené v intervalu $< a, b >$. Doplniti definici funkce $f(x)$ v ostatních bodech intervalu $< a, b >$ tak, aby tato doplněná funkce měla v bodech množiny $\mathfrak{A}$ stejná derivovaná čísla jako funkce $f(x)$, a aby v bodech mimo množinu $\mathfrak{A}$ měla konečnou derivaci.

Tento úkol nutno formulovati přesněji; různou formulací dospějeme k několika problémům příbuzným, jež mají řešení zcela odlišná.

Budiž v dalším $\mathfrak{A}$ lineární množina uzavřená, ohraničená; následkem toho obsahuje množina $\mathfrak{A}$ jistou nejmenší hodnotu a a největší b.

*) Literární odkazy viz H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, I. Bd., str. 137.

Uvažujme interval $< a, b >$;*) ten, jak známo, jest možno složiti ze dvou množin, z množiny $\mathfrak{A}$ a z množiny komplementární $\mathfrak{A}'$; při tom množina $\mathfrak{A}'$ skládá se z jednoduše spočetné posloupnosti intervalů otevřených, jež se navzájem nepřekrývají. Tyto otevřené intervaly nazvu „styčnými intervaly (vzhledem k množině $\mathfrak{A}$)"; n-tý interval této posloupnosti, srovnané jistým způsobem, označím J_n, jeho levý a pravý koncový bod resp. x_n^l, x_n^p. Jest tedy $J_n = (x_n^l, x_n^p)$. Je patrno: všechny body množiny $\mathfrak{A}$ jsou body zhuštění množiny $\mathfrak{A}$ z prava, mimo body b a x_n^l, jež jsou isolované z prava. Obdobně body a a x_n^p jsou jediné body množiny $\mathfrak{A}$, jež jsou isolovány z leva.

Budiž v dalším $f(x)$ funkce jedné proměnné x, konečná, definovaná v $\mathfrak{A}$. Je-li x, bod množiny $\mathfrak{A}$, bodem zhuštění z prava, definuji derivovaná čísla funkce $f(x)$ v bodě x z prava vztahy

$$D^+ f(x) = \lim_{x' = x} sup \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}, \quad D_+ f(x) = \lim_{x' = x} inf \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

při čemž bod x' blíží se bodu x po množině $\mathfrak{A}$ z prava. Je-li naproti tomu x bod isolovaný z prava, nejsou čísla $D^+ f(x)$, $D_+ f(x)$ vůbec definována. Obdobné definice platí, pokud se týče čísel derivovaných $D^- f(x)$, $D_- f(x)$ z leva. O funkci $f(x)$ budu říkati, že má v bodě x množiny $\mathfrak{A}$ derivaci, je-li x bodem zhuštění množiny $\mathfrak{A}$ a jestliže ona čísla derivovaná, jež jsou v bodě x definována, jsou stejná.**)

Poznamenávám ještě tolik: v dalším budeme se snažiti vždy, doplniti definici funkce $f(x)$ na interval $< a, b >$, neboť doplnění funkce z tohoto intervalu na interval širší nepůsobí již potíží. Je patrno zároveň z důkazů následujících, že podmínka, aby množina $\mathfrak{A}$ byla ohraničená, rovněž není podstatná.

V důkazech následujících užívám pro větší přehlednost a stručnost často názvosloví geometrického; nečiní ovšem potíží, vyjádřiti příslušné operace ryze arithmeticky.

Přistupme nyní k různým formulacím našeho problému.

Problém I.

Nalézti funkci konečnou $F(x)$, definovanou v intervalu $< a, b >$, jež má tyto vlastnosti:

a) ve všech bodech množiny $\mathfrak{A}$ je $F(x) = f(x)$,

b) v množině komplementární $\mathfrak{A}'$ má $F(x)$ konečnou derivaci,

*) $< a, b >$ značím množinu bodů x, pro něž $a \leq x \leq b$ (t. zv. interval uzavřený); naproti tomu (a, b) značím množinu bodů x, pro něž $a < x < b$ (t. zv. interval otevřený). V obojím případě nazývám a, b koncovými body intervalu. Předpokládám vždy $a < b$.

**) Pokud není zvláště poznamenáno, připouštím v dalším derivovaná čísla i derivace konečné i nekonečné.

c) v bodech množiny $\mathfrak{A}$ jsou ta derivovaná čísla funkce $f(x)$, jež jsou definována, rovna příslušným číslům derivovaným funkce $F(x)$.

Věta I. *Taková funkce $F(x)$ vždy existuje.* Její konstrukce je skoro samozřejmá: stačí voliti $F(x)$ v styčných intervalech lineární, t. j. pro $x_n^l < x < x_n^p$ volím

$$F(x) = f(x_n^l) + (x - x_n^l) \frac{f(x_n^p) - f(x_n^l)}{x_n^p - x_n^l}.$$

Že funkce $F(x)$ takto definovaná má vlastnost c), plyne okamžitě z toho, že, je-li x' v J_n a x v $\mathfrak{A}$, leží $\frac{F(x') - F(x)}{x' - x}$ mezi $\frac{f(x_n^l) - f(x)}{x_n^l - x}$ a $\frac{f(x_n^p) - f(x)}{x_n^p - x}$.

Problém II.

Triviální řešení problému I. v mnohém ohledu nevyhovuje; má-li na př. funkce $f(x)$ v množině $\mathfrak{A}$ všude derivaci, potom se její derivabilita onou lineární interpolací obecně poruší v bodech x_n^l a x_n^p. Tuto závadu odstraníme tím, že pozměníme formulaci problému tímto způsobem:

Budiž množina $\mathfrak{A}$ dokonalá, a budiž na ní dána konečná funkce $f(x)$, jež má v koncových bodech styčných intervalů derivaci $\left(\text{t. j. } D^- f(x_n^l) = D_- f(x_n^l),\ D^+ f(x_n^p) = D_+ f(x_n^p)\right)$. Nalézti funkci $F(x)$, definovanou v $< a, b >$, jež má tyto vlastnosti:

a) $F(x) = f(x)$ v $\mathfrak{A}$,

b) v bodech množiny $\mathfrak{A}'$ má $F(x)$ konečnou derivaci,

c) v bodech x_n^l, x_n^p má $F(x)$ derivaci (a ovšem jest potom v těchto bodech $F'(x) = f'(x)$),

d) v ostatních bodech množiny $\mathfrak{A}$ jsou derivovaná čísla funkce $F(x)$ rovna příslušným derivovaným číslům funkce $f(x)$.

Věta II. *Taková funkce $F(x)$ vždy existuje.* Důkaz provedeme tím, že takovou funkci $F(x)$ vskutku sestrojíme. Abych se vyhnul zbytečným komplikacím, budu předpokládati, že čísla $D^+ f(x), D_+ f(x), D^- f(x), D_- f(x)$ jsou vesměs konečná (příslušné změny v důkazu pro případ nekonečných čísel derivovaných provede čtenář snadno sám).

Budiž tedy dána funkce $f(x)$ na $\mathfrak{A}$. Volme čísla $\varepsilon_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) jednak menší než $\sqrt{\frac{x_n^p - x_n^l}{n}}$, jednak již tak malá, že

$$f'(x_n^l) - \frac{1}{n} < \frac{f(x) - f(x_n^l)}{x - x_n^l} < f'(x_n^l) + \frac{1}{n} \tag{1}$$

pro všechna x z $\mathfrak{A}$, pro něž $x_n^l - \varepsilon_n \leq x < x_n^l$ a

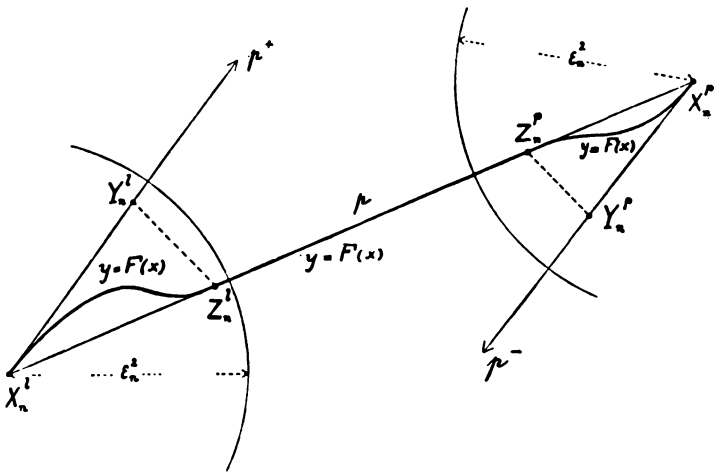
$$f'(x_n^p) - \frac{1}{n} < \frac{f(x) - f(x_n^p)}{x - x_n^p} < f'(x_n^p) + \frac{1}{n} \tag{2}$$

pro všechna x z $\mathfrak{A}$, pro něž $x_n^p < x \leq x_n^p + \varepsilon_n$.

Funkci $F(x)$ volím v $\mathfrak{A}$ rovnou $f(x)$, v intervalu J_n pak ji definuji takto:

Spojme body $X_n^l = [x_n^l, f(x_n^l)]$, $X_n^p = [x_n^p, f(x_n^p)]$*) úsečkou p a sestrojme z bodu X_n^l polopaprsek p^+, směřující v pravo, o směrnici $f'(x_n^l)$ a z bodu X_n^p polopaprsek p^-, směřující v levo, o směrnici $f'(x_n^p)$. Na polopaprscích p^+, p^- zvolím body Y_n^l resp. Y_n^p, na spojnici p body Z_n^l, Z_n^p tak, aby vzdálenosti bodů Y_n^l, Z_n^l od X_n^l a vzdálenosti bodů Y_n^p, Z_n^p od X_n^p byly menší než ε_n^l. Funkci $F(x)$ volím pak pro $x_n^l < x < x_n^p$ tak, aby hověla těmto požadavkům:

1. $D^+ F(x_n^l) = D_+ F(x_n^l) = f'(x_n^l)$,
2. $D^- F(x_n^p) = D_- F(x_n^p) = f'(x_n^p)$,
3. $F(x)$ má konečnou derivaci pro $x_n^l < x < x_n^p$,
4. Pokud křivka $y = F(x)$ neleží v jednom z trojúhelníků $X_n^l\, Y_n^l\, Z_n^l$, $X_n^p\, Y_n^p\, Z_n^p$, nechť splývá se spojnicí p bodů X_n^l, X_n^p.



Takovou funkci $F(x)$ je patrně možno sestrojiti (viz obrazec).

Tím je funkce $F(x)$ definována v intervalu $< a, b >$; zbývá dokázati, že podává řešení problému II. Především je patrno, že funkce $F(x)$ hoví podmínkám *a*), *b*). Pokud se týče podmínek *c*) a *d*), omezím se na vyšetřování derivovaných čísel z prava; derivovaná čísla z leva lze vyšetřovati obdobně. V bodech x_n^l je dle konstrukce funkce $F(x)$ $D^+ F(x_n^l) = D_+ F(x_n^l) = f'(x_n^l)$. Zbývá tedy vyšetřovati body x množiny $\mathfrak{A}$, jež jsou body zhuštění z prava, a dokázati, že pro ně platí $D^+ F(x) = D^+ f(x)$, $D_+ F(x) = D_+ f(x)$. Ježto pak samozřejmě $D^+ F(x) \geq D^+ f(x)$, $D_+ F(x) \leq D_+ f(x)$, stačí dokázati, že

$$D^+ F(x) \leq D^+ f(x), \quad D_+ F(x) \geq D_+ f(x). \tag{3}$$

To je především samozřejmě splněno v bodech vnitřních množiny $\mathfrak{A}$

*) Symbolem $[x, y]$ značím bod v rovině o pravoúhlých souřadnicích x, y.

z prava,*) ježto $F(x) = f(x)$ v $\mathfrak{A}$. Zbývá tedy, dokázati vztahy (3) v bodech x, jež jsou body zhuštění z prava jak množiny $\mathfrak{A}$, tak množiny $\mathfrak{A}'$.**) Budiž tedy x takový bod, a vyšetřujme největší a nejmenší z limit výrazu

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x}, \tag{4}$$

blíží-li se bod x' bodu x z prava, při čemž patrně stačí omeziti se na ty body x', jež leží v množině $\mathfrak{A}'$.

Rozdělme nyní množinu všech bodů x' z množiny $\mathfrak{A}'$, jež leží v pravo od x, v součet čtyř množin $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ takto: každý takový bod x' leží v jednom ze styčných intervalů, třeba v intervalu J_n. Potom nastává jeden z těchto případů:

a) buď bod $[x', F(x')]$ leží v trojúhelníku $X_n^l\, Y_n^l\, Z_n^l$,

b) nebo leží v trojúhelníku $X_n^p\, Y_n^p\, Z_n^p$,

c) nebo neleží v žádném z těchto trojúhelníků; potom dle konstrukce funkce $F(x)$ leží na spojnici bodů X_n^l a X_n^p.

Nastává-li případ *a*, může býti buď

$$a\,\alpha)\quad x_n^l - \varepsilon_n > x,$$

nebo

$$a\,\beta)\quad x_n^l - \varepsilon_n < x.$$

Nyní množina $\mathfrak{L}_1$ budiž souhrn všech bodů x', pro něž nastává $a\,\alpha$), množiny $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ buďtež definovány jako souhrny oněch bodů x', pro něž nastává resp. $a\,\beta$), *b*), *c*).

Budu nyní vyšetřovati výraz (4) pro každou z množin $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ zvlášť. Poznamenávám ještě tolik: z toho, že bod x je bodem zhuštění z prava množin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$, plyne téměř bezprostředně: blíží-li se x' jakýmkoliv způsobem bodu x z prava po množině $\mathfrak{A}'$ a značí-li J_n styčný interval, v němž leží x', roste n jistým způsobem do nekonečna.

Nechť je nyní především x' bod z množiny $\mathfrak{L}_1$. Potom $\dfrac{F(x') - F(x)}{x' - x}$ leží mezi

$$\frac{F(x_n^l) - F(x)}{x_n^l - x} = \frac{f(x_n^l) - f(x)}{x_n^l - x}$$

a

$$\frac{F(x_n^p) - F(x)}{x_n^p - x} = \frac{f(x_n^p) - f(x)}{x_n^p - x}.$$

---

*) Bod x nazvu bodem vnitřním množiny $\mathfrak{A}$ z prava, existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že interval $< x, x + \varepsilon >$ náleží celý k množině $\mathfrak{A}$.

**) Potom leží v každém intervalu $< x, x + \varepsilon >$, kde ε je libovolné číslo kladné, nekonečně mnoho styčných intervalů.

Blíží-li se x' ku x po množině $\mathfrak{L}_4$, blíží se x_n^l i x_n^p ku x, a tedy jistě platí

$$(5)\quad D_+ f(x) \leq \lim_{x'=x} \inf \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leq \lim_{x'=x} \sup \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leq D^+ f(x),$$

při čemž x' blíží se bodu x z prava po množině $\mathfrak{L}_4$.

Budiž za druhé x' bod množiny $\mathfrak{L}_3$. Potom vzdálenost bodu $[x', F(x')]$ od $[x_n^p, f(x_n^p)]$ je menší než ε_n^2, kdežto vzdálenost bodu $[x, f(x)]$ od $[x_n^p, f(x_n^p)]$ je větší než $x_n^p - x_n^l$; ale $\varepsilon_n^2 < \frac{x_n^p - x_n^l}{n}$, dle definice čísla ε_n. Tedy úhel, jejž svírají přímky $A = [x, f(x)]\,[x', F(x')]$ *) a $B = [x, f(x)]\,[x_n^p, f(x_n^p)]$, jest menší než polovina zorného úhlu, pod nímž je viděti kružnici o poloměru $\frac{x_n^p - x_n^l}{n}$ ze vzdálenosti $x_n^p - x_n^l$ od jejího středu (čili kružnici o poloměru $\frac{1}{n}$ ze vzdálenosti 1). Blíží-li se nyní x' ku x z prava po množině $\mathfrak{L}_3$, roste n do nekonečna a x_n^p blíží se ku x. Tedy především úhel přímek A a B konverguje k nule; následkem toho (a v důsledku předpokladu, že derivovaná čísla jsou konečná) i rozdíl jejich směrnic, t. j. výraz

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} - \frac{f(x_n^p) - f(x)}{x_n^p - x}$$

konverguje k nule. Z toho však okamžitě plyne, že (5) platí i tehdy, blíží-li se x' ku x po $\mathfrak{L}_3$.

Budiž za třetí x' bod množiny $\mathfrak{L}_1$. Zde je vzdálenost bodu $[x, f(x)]$ od $[x_n^l, f(x_n^l)]$ větší než ε_n, ale vzdálenost $[x', F(x')]$ od $[x_n^l, f(x_n^l)]$ je menší než ε_n^2; následkem toho úhel, sevřený spojnicemi $[x, f(x)]\,[x_n^l, f(x_n^l)]$, $[x, f(x)]\,[x', F(x')]$ je menší než polovina zorného úhlu kružnice o poloměru ε_n^2, pozorované ze vzdálenosti ε_n (čili o poloměru ε_n ze vzdálenosti 1). Když x' konverguje ku x, roste n do nekonečna, ε_n konverguje k nule; z toho jako dříve plyne (5) pro případ, že x' se blíží ku x po $\mathfrak{L}_1$.

Budiž konečně x' bod množiny $\mathfrak{L}_2$. Potom platí $0 < x_n^l - x \leq \varepsilon_n$, a platí tedy nerovniny (1). Bod $[x', F(x')]$ leží v pravo od bodu X_n^l v trojúhelníku $X_n^l\, Y_n^l\, Z_n^l$. Směrnice spojnice $[x, f(x)]\,[x', F(x')]$ — čili výraz $\frac{F(x') - F(x)}{x' - x}$ — je jistě obsažena mezi krajními dvěma ze směrnic spojnic bodu $[x, f(x)]$ s body X_n^l, Y_n^l, Z_n^l; označme směrnice těchto spojnic resp. k_1, k_2, k_3. Platí: $k_1 = \frac{f(x_n^l) - f(x)}{x_n^l - x}$; k_3 leží mezi $\frac{f(x_n^l) - f(x)}{x_n^l - x}$ a $\frac{f(x_n^p) - f(x)}{x_n^p - x}$. Jak odhadnu k_2? Bod $[x, f(x)]$ leží v levo od X_n^l a tento

*) Symbolem $[x, y]\,[x', y']$ značím spojnici bodů $[x, y]$ a $[x', y']$.

bod opět v levo od Y^l_n. V důsledku toho leží k_2 mezi směrnicí spojnice $[x, f(x)]\ X^l_n$ a směrnicí spojnice $X^l_n\ Y^l_n$, t. j. mezi k_1 a $f'(x^l_n)$. Ale ježto $k_1 = \frac{f(x) - f(x^l_n)}{x - x^l_n}$, a ježto platí nerovniny (1), jest

$$k_1 - \frac{1}{n} < f'(x^l_n) < k_1 + \frac{1}{n}$$

a tedy

$$k_1 - k_2 < \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Konverguje-li nyní x' ku x po množině $\mathfrak{L}_2$, roste n do nekonečna, x^l_n, x^p_n konvergují ku x; z toho je patrno, že k_1, k_3 a dle (6) i k_2 se mění tak, že jejich největší a nejmenší z limit jsou obsaženy mezi $D^+ f(x)$ a $D_+ f(x)$. Ježto pak výraz $\frac{F(x') - F(x)}{x' - x}$ leží stále mezi krajními dvěma z hodnot k_1, k_2, k_3, platí i pro body x' množiny $\mathfrak{L}_2$ vztahy (5). Platí tedy vztahy (5), ať se bod x' blíží ku x z prava libovolným způsobem, t. j. platí nerovniny (3):

$$D^+ F(x) < D^+ f(x),\quad D_+ F(x) > D_+ f(x),$$

čímž věta II. jest dokázána.

Jako zvláštní případ věty II. sluší vytknouti **větu IIa:**

Je-li v dokonalé množině $\mathfrak{A}$ dána funkce $f(x)$, jež má v $\mathfrak{A}$ všude derivaci, existuje funkce $F(x)$, definovaná v $<a, b>$, jež má všude v $<a, b>$ derivaci (v bodech množiny komplementární $\mathfrak{A}'$ dokonce derivaci konečnou) *a taková, že v množině $\mathfrak{A}$ je $F(x) = f(x)$.*

Poznámka. Je-li derivace $f'(x)$ nad to konečná v $\mathfrak{A}$, je $F'(x)$ též konečné a tedy $F(x)$ spojité v $<a, b>$. Tedy je, jak známo, funkce $F'(x)$ funkcí první třídy Baireovy v $<a, b>$. Tím spíše je $f'(x)$ funkcí první třídy v $\mathfrak{A}$. Tak dostávám větu: *Má-li $f(x)$ v $\mathfrak{A}$ konečnou derivaci $f'(x)$, je $f'(x)$ funkce první Baireovy třídy v $\mathfrak{A}$*, větu, kterou jsem za předpokladů obecnějších odvodil v pojednání „O derivaci funkcí jedné proměnné", Rozpravy Č. Ak., sv. 32, č. 5.

Problém III.

Problém II. lišil se od problému I. tímto:

a) množina $\mathfrak{A}$ byla předpokládána dokonalá,

b) předpokládali jsme $D^- f(x^l_n) = D_- f(x^l_n) = f(x^l_n)$, $D^+ f(x^p_n) = D_+ f(x^p_n) = f'(x^p_n)$,

c) předepsali jsme funkci $F(x)$ derivovaná čísla $D^+ F(x^l_n)$, $D_+ F(x^l_n)$, $D^- F(x^p_n)$, $D_- F(x^p_n)$ požadavkem, aby funkce $F(x)$ měla v bodech x^l_n, x^p_n derivaci.

Pozměníme nyní podmínky problému II. tak, že opustíme požadavky *a*) a *b*), a derivovaná čísla, vypsaná sub *c*), předepíšeme *libovolným* způsobem. Tak dostáváme **Problém III.:** Budiž opět $\mathfrak{A}$ množina uzavřená, a $f(x)$ funkce konečná, definovaná na $\mathfrak{A}$. Zvolme si libovolně čísla, jež označím

$$(7) \qquad D^+ f(x_n^l),\ D_+ f(x_n^l),\ D^- f(x_n^p),\ D_- f(x_n^p),\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

s jediným omezením, že má býti

$$8) \qquad D^+ f(x_n^l) \geqq D_+ f(x_n^l),\quad D^- f(x_n^p) \geqq D_- f(x_n^p).$$

Tím jsou každému bodu x z $\mathfrak{A}$ přiřazena čtyři čísla $D^+ f(x)$, $D_+ f(x)$, $D^- f(x)$, $D_- f(x)$, vyjma body $x = a$, $x = b$, jimž je přiřazeno pouze po dvou číslech: $D^+ f(a)$, $D_+ f(a)$, $D^- f(b)$, $D_- f(b)$. Jest nalézti funkci $F(x)$, definovanou v $< a, b >$ a konečnou takovou, aby pro každé x z $\mathfrak{A}$ ($x \neq a$, $x \neq b$) bylo $F(x) = f(x)$, $D^+ F(x) = D^+ f(x)$, $D_+ F(x) = D_+ f(x)$, $D^- F(x) = D^- f(x)$, $D_- F(x) = D_- f(x)$, a dále $F(a) = f(a)$, $D^+ F(a) = D^+ f(a)$, $D_+ F(a) = D_+ f(a)$; $F(b) = f(b)$, $D^- F(b) = D^- f(b)$, $D_- F(b) = D_- f(b)$.

Abychom tento problém rozřešili, seřaďme nějakým způsobem styčné intervaly v posloupnost

$$J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$$

Je-li x bod množiny $\mathfrak{A}$, označme znakem $\varphi(x, n)$ vzdálenost bodu x od intervalu J_n *). Zavedu nyní definici:

Množinu $\mathfrak{A}$ *nazvu množinou pravidelnou* (vzhledem ke zvolenému seřazení styčných intervalů),**) *jestliže lze zvoliti funkci kladnou* $\chi(n)$ *celistvého kladného argumentu* n *tak, že ke každému* x *množiny* $\mathfrak{A}$ *existuje jisté číslo* n_x *takové, že*

$$(9) \qquad \chi(n) < \varphi(x, n)$$

pro všechna $n > n_x$.

Budiž nyní množina $\mathfrak{A}$ pravidelná (vzhledem ke zvolenému seřazení styčných intervalů) a budiž na ní dána konečná funkce $f(x)$, jakož i čísla (7). Funkci $F(x)$ definujeme takto: v $\mathfrak{A}$ budiž $F(x) = f(x)$; v J_n volme $F(x)$ tak, aby $D^+ F(x_n^l) = D^+ f(x_n^l)$, $D_+ F(x_n^l) = D_+ f(x_n^l)$, $D^- F(x_n^p) = D^- f(x_n^p)$, $D_- F(x_n^p) = D_- f(x_n^p)$; dále tak, aby $F(x)$ měla v J_n konečnou derivaci a aby

$$F(x) - \left[f(x_n^l) + (x - x_n^l) \frac{f(x_n^p) - f(x_n^l)}{x_n^p - x_n^l} \right] < \frac{\chi(n)}{n}$$

*) Tedy $\varphi(x, n)$ je menší z čísel $x - x_n^l$, $x - x_n^p$.

**) Ukáže se později, že lze uzávorkovanou část z definice vynechati, t. j. že pravidelnost množiny $\mathfrak{A}$ závisí pouze na povaze množiny $\mathfrak{A}$ samotné a ne na způsobu seřazení posloupnosti styčných intervalů; což by se ostatně snadno dalo dokázati přímo.

p o $x_n^l < x < x_n^p$. Takovou funkci evidentně lze sestrojiti. Tvrdím, že tato funkce $F(x)$ řeší problém III. Omezím se opět na vyšetřování derivovaných čísel z prava.

V bodech x množiny $\mathfrak{A}$, jež jsou buď body isolované z prava (t. j. v bodech x_n^l) nebo jež jsou body vnitřní z prava, je samozřejmě

$$D^+ F(x) = D^+ f(x), \quad D_+ F(x) = D_+ f(x).$$

Zbývá dokázati tyto rovnosti v bodech x, jež jsou body zhuštění z prava i množiny $\mathfrak{A}$ i množiny komplementární $\mathfrak{A}'$. Budiž x' libovolný bod z $\mathfrak{A}'$ v pravo od x; ten leží v jistém intervalu J_n, a platí:

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} = \frac{F(x') - \left[f(x_n^l) + (x' - x_n^l)\dfrac{f(x_n^p) - f(x_n^l)}{x_n^p - x_n^l}\right]}{x' - x} + \frac{\left[f(x_n^l) + (x' - x_n^l)\dfrac{f(x_n^p) - f(x_n^l)}{x_n^p - x_n^l}\right] - f(x)}{x' - x}$$

Druhý sčítanec v pravo značí směrnici spojnice bodu $[x, f(x)]$ s jistým bodem úsečky, spojující body $[x_n^l, f(x_n^l)]$ a $[x_n^p, f(x_n^p)]$. Jest tedy tento sčítanec obsažen mezi směrnicemi spojnic $[x, f(x)]$ $[x_n^l, f(x_n^l)]$ a $[x, f(x)]$ $[x_n^p, f(x_n^p)]$, t. j. mezi $\dfrac{f(x_n^l) - f(x)}{x_n^l - x}$ a $\dfrac{f(x_n^p) - f(x)}{x_n^p - x}$. Blíží-li se nyní bod x' bodu x po množině $\mathfrak{A}'$ z prava, roste n jistým způsobem do nekonečna, x_n^l a x_n^p blíží se ku x. Jest tedy — když $x' - x$ je již dosti malé — jistě $n > n_x$, a tedy čitatel prvního sčítance menší než $\dfrac{\chi(n)}{n}$, jmenovatel jeho pak větší než $\varphi(x, n)$ a tím spíše tedy dle (9) větší než $\chi(n)$; t. j. první sčítanec konverguje k nule, blíží-li se x' ku x, a druhý sčítanec má svou největší a nejmenší z limit obsaženu mezi $D^+ f(x)$ a $D_+ f(x)$. Platí tedy i pro tyto body

$$D^+ F(x) = D^+ f(x), \quad D_+ F(x) = D_+ f(x).$$

Tedy naše funkce $F(x)$ vskutku řeší problém III.

Mějme nyní množinu $\mathfrak{A}$, jež není pravidelná a zvolme $f(x) = 0$ v $\mathfrak{A}$, a dále volme

$$(10) \qquad \begin{cases} D^+ f(x_n^l) = D_+ f(x_n^l) = 2, \\ D^+ f(x_n^p) = D_+ f(x_n^p) = 2, \\ \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Tvrdím: v tomto případě nelze nalézti funkci $F(x)$, jež by řešila problém III. Předpokládejme, že bychom takovou funkci $F(x)$ našli; v $\mathfrak{A}$ musí býti $F(x) = 0$; v bodech x_n^l musí míti $F(x)$ derivaci z prava rovnou 2, a v bodech x_n^p derivaci z leva rovnou 2 [dle (10)]. Lze tedy ke každému n zvoliti číslo $\tau(n) > 0$ takové, že jednak $\tau(n) < \frac{1}{n}$, jednak že platí:

$$(11)\qquad \begin{cases} F(x) > x - x_n^l \text{ pro } x_n^l < x \leqq x_n^l + \tau(n) \\ F(x) > x_n^p - x \text{ pro } x_n^p - \tau(n) \leqq x < x_n^p \end{cases}$$

Ježto množina $\mathfrak{A}$ není pravidelná, lze nalézti x_0 z $\mathfrak{A}$ tak, že

$$(12)\qquad \varphi(x_0, n) < \tau(n)$$

pro nekonečně mnoho n, třeba pro $n = n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ Ježto $\lim\limits_{n=\infty} \tau(n) = 0$, je patrno, že v každém okolí bodu x_0 leží nekonečně mnoho z intervalů $J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots, J_{n_i}, \ldots$ Tedy také aspoň z jedné strany bodu x_0 leží v každém okolí nekonečné množství těchto intervalů, předpokládejme na př., že v pravém okolí. Následkem toho leží v každém pravém okolí bodu x_0 nekonečně mnoho bodů x_n^l, x_n^p, t. j. bod x_0 je bodem zhuštění množiny $\mathfrak{A}$ z prava. Ježto pak $f(x) = 0$ v $\mathfrak{A}$, jest

$$(13)\qquad D\ f(x_0) = D\ f(x_0) = 0.$$

Vyberme nyní z posloupnosti $J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots, J_{n_i}, \ldots$ jistou částečnou posloupnost intervalů $J_{m_1}, J_{m_2}, J_{m_3}, \ldots$ takovou, že J_{m_i} leží v pravo od x_0, a že body $x_{m_i}^p$ konvergují s rostoucím i ku x_0, což je možno, ježto v každém pravém okolí bodu x_0 leží nekonečně mnoho intervalů J_{n_i}. V bodě x_0 je $F(x_0) = 0$, v bodě $x_i' = x_{m_i}^l + \tau(m_i)$ je $F(x_i') > x_i' - x_{m_i}^l = \tau(m_i)$ (podle (11)). Mimo to pro $n = m_i$ je splněno (12), a tedy

$$x_i' - x_0 = (x_i' - x_{m_i}^l) + (x_{m_i}^l - x_0) = \tau(m_i) + \varphi(x_0, m_i) < 2\,\tau(m_i).$$

Tedy $\dfrac{F(x_i') - F(x_0)}{x_i' - x_0} > \dfrac{1}{2}$. Ježto pak s rostoucím i blíží se x_i' z prava ku x_0, musilo by býti

$$(14)\qquad D^+ F(x_0) \geqq \frac{1}{2}.$$

Ale dle (13) musilo by býti — kdyby funkce $F(x)$ dávala řešení problému III. —

$$(15)\qquad D^- F(x_0) = 0.$$

Ježto (14) a (15) jsou ve sporu, nemá vskutku problém III. v tomto případě řešení.

Platí tedy **věta III.**: *Budiž dána množina uzavřená $\mathfrak{A}$; aby problém III. měl řešení, ať $f(x)$ je libovolná funkce konečná, definovaná na $\mathfrak{A}$, a ať si jakkoliv volím čísla* (7) (ovšem s omezením (8)), *je nutno a stačí, aby množina $\mathfrak{A}$ byla pravidelná.*

Dodatek: *Je-li množina $\mathfrak{A}$ pravidelná, mohu mimo to požadovati, aby funkce $F(x)$, řešící problém III., měla v bodech komplementární množiny $\mathfrak{A}'$ konečnou derivaci.*

Ježto řešitelnost problému III. nezávisí patrně na způsobu, jakým seřazujeme posloupnost intervalů styčných, závisí vlastnost „býti pravidelnou" pouze na množině $\mathfrak{A}$ a ne na způsobu seřazení styčných intervalů (viz pozn. na str. 8.).

O množinách pravidelných.

V následujícím chci podati některé jednoduché podmínky — částečně nutné, částečně postačující k tomu, aby množina uzavřená byla pravidelná.

Věta A: *Každá množina uzavřená $\mathfrak{A}$, jejíž ohraničení je jednoduše spočetné, je pravidelná.*

Buďtež $x_1, x_2, x_3, \ldots$ body ohraničení množiny $\mathfrak{A}$. Je patrno, že při pevném i je $\varphi(x_i, n) = 0$ nejvýše pro dvě hodnoty n, a při pevném n je $\varphi(x_i\ n) = 0$ pouze pro dvě hodnoty i (totiž pro $x_i = x_n^l$ a $x_i = x_n^p$). Z toho je vidět, že funkce $\chi(n)$ je jednoznačně stanovena pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ touto definicí:

$$\chi(1) = 1, \chi(2) = \frac{1}{2}, \chi(n) = \text{nejmenšímu } \textit{kladnému} \text{ číslu z čísel } \frac{1}{2}\varphi(x_1, n), \frac{1}{2}\varphi(x_2, n), \ldots, \frac{1}{2}\varphi(x_n, n), \frac{1}{n} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Potom platí při libovolném m:

$$\varphi(x_m, n) > \chi(n) \tag{16}$$

pro všechna $n \geq m$, vyjma snad pro $n = 1, 2$ a pro ty dvě hodnoty n, pro něž snad $\varphi(x_m, n) = 0$.

Je-li za druhé x vnitřní bod $\mathfrak{A}$, je $\varphi(x, n) > d(x)$ pro všechna n, kde $d(x)$ je jisté číslo kladné, závislé na x. Volím-li $n_x = \frac{1}{d(x)}$, je dle definice funkce $\chi(n)$:

$$\varphi(x, n) > \chi(n) \text{ pro } n > n_x. \tag{17}$$

Z (16) a (17) plyne však ihned platnost věty A.

Věta B. *Protněme množinu $\mathfrak{A}$ libovolným otevřeným intervalem J; je-li uzavřená obálka tohoto průseku*) množina dokonalá nehustá, není množina $\mathfrak{A}$ pravidelná.*

Abychom tuto větu dokázali, uvažme, že v okolí každého bodu množiny $J\mathfrak{A}$ leží nekonečně mnoho styčných intervalů množiny $\mathfrak{A}$, jestliže ovšem uzavřená obálka průseku $J\mathfrak{A}$ je množina dokonalá nehustá. Budiž nyní $\chi(n)$ libovolná kladná funkce celistvého kladného argumentu n.

*) Uzavřená obálka průseku $J\mathfrak{A}$ jest množina $J\mathfrak{A}$ sama, zvětšená o ty z koncových bodů intervalu J, jež jsou body zhuštění množiny $J\mathfrak{A}$.

Vezměme jistý interval styčný J_{n_1}, jehož levý koncový bod $x^l_{n_1}$ leží v intervalu J. Ježto v levém okolí bodu $x^l_{n_1}$ leží nekonečně mnoho styčných intervalů, je možno jistě nalézti styčný interval J_{n_2}, ležící jednak v J, jednak v intervalu $\left(x^l_{n_1} - \frac{1}{2}\chi(n_1),\ x^l_{n_1}\right)$, jednak v interv. $\left(x^l_{n_1} - \frac{1}{2},\ x^l_{n_1}\right)$.

Obdobně v pravo od bodu $x^p_{n_2}$ lze nalézti interval J_{n_3}, obsažený cele jednak v intervalu $(x^p_{n_2}, x^l_{n_1})$, jednak v intervalu $\left(x^p_{n_2},\ x^p_{n_2} + \frac{1}{2}\chi(n_2)\right)$, jednak v intervalu $\left(x^p_{n_2},\ x^p_{n_2} + \frac{1}{3}\right)$. Tak postupujíce dále, dospíváme obecně k intervalu $J_{n_{2i}}$, jenž leží jednak v intervalu $(x^p_{n_{2(i-1)}}, x^l_{n_{2i-1}})$, jednak v intervalu $\left(x^l_{n_{2i-1}} - \frac{1}{2}\chi(n_{2i-1}),\ x^l_{n_{2i-1}}\right)$, jednak v intervalu $\left(x^l_{n_{2i-1}} - \frac{1}{2i},\ x^l_{n_{2i-1}}\right)$ a k intervalu $J_{n_{2i+1}}$, jenž leží jednak v intervalu $(x^p_{n_{2i}}, x^l_{n_{2i-1}})$, jednak v intervalu $\left(x^p_{n_{2i}},\ x^p_{n_{2i}} + \frac{1}{2}\chi(n_{2i})\right)$, jednak v intervalu $\left(x^p_{n_{2i}},\ x^p_{n_{2i}} + \frac{1}{2i+1}\right)$. Z toho snadno plyne, že existuje jediný bod x, jenž leží v pravo ode všech $J_{n_{2i}}$ a v levo ode všech $J_{n_{2i+1}}$. Bod tento patří ku $\mathfrak{A}$, a platí ovšem

$$x^p_{n_{2i}} < x < x^l_{n_{2j+1}}, \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ježto

$$x^l_{n_{2i+1}} - x^p_{n_{2i}} < \frac{1}{2}\chi(n_{2i}),$$

je tím spíše

(18) $$\varphi(x, n_{2i}) < \frac{1}{2}\chi(n_{2i}) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

a ježto

$$x^l_{n_{2i+1}} - x^p_{n_{2i+2}} < \frac{1}{2}\chi(n_{2i+1}),$$

je tím spíše

(19) $$\varphi(x, n_{2i+1}) < \frac{1}{2}\chi(n_{2i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Z (18) a (19) však ihned plyne, že množina $\mathfrak{A}$ není pravidelná, čímž věta B dokázána.

Budiž nyní $\mathfrak{A}$ množina dokonalá, pravidelná. Vytkněme libovolný bod x z $\mathfrak{A}$, a sestrojme interval $J = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, kde ε jest libovolné číslo kladné. Uzavřená obálka pruseku $J\,\mathfrak{A}$ jest množina dokonalá, obsažená v intervalu uzavřeném $< x - \varepsilon, x + \varepsilon >$. Dle věty B není tato množina nehustá; existuje tedy uvnitř $< x - \varepsilon, x + \varepsilon >$ jistý částečný interval, v němž je tato množina hustá; ježto pak je tato množina uzavřená, vyplňuje celý tento částečný interval. Ježto pak ε je libovolné číslo kladné, jest bod x buď sám bodem jistého uzavřeného intervalu, obsaženého v množině $\mathfrak{A}$, nebo leží v libovolném jeho okolí nekonečný počet uzavřených intervalů, obsažených v množině $\mathfrak{A}$. Ježto pak bod x byl libovolný bod z $\mathfrak{A}$, lze vysloviti **větu C**:

Každou množinu dokonalou pravidelnou lze vytvořiti jako součet jednoduše spočetné posloupnosti uzavřených intervalů (bez společných bodů) *a jejich bodů zhuštění.**)

Věta D: *Je-li ohraničení $\mathfrak{G}$ množiny uzavřené $\mathfrak{A}$ množina pravidelná, je i $\mathfrak{A}$ množina pravidelná.*

Buďtež $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ styčné intervaly množiny $\mathfrak{A}$. Množina $\mathfrak{A}$ skládá se jednak z množiny bodů vnitřních, jednak z bodů ohraničení. Množina bodů vnitřních je otevřená, a dá se tedy vyjádřiti jako součet jednoduše spočetné posloupnosti otevřených intervalů $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$

Množina $\mathfrak{G}$ je, jak známo, uzavřená. Je patrno, že J_n a K_n jsou styčné intervaly množiny $\mathfrak{G}$; neboť žádný jejich bod nepatří ku $\mathfrak{G}$, jejich koncové body však patří ku $\mathfrak{G}$. Naopak, jiné styčné intervaly ku $\mathfrak{G}$ než J_n a K_n neexistují; neboť každý styčný interval množiny $\mathfrak{G}$ skládá se buď pouze z vnitřních bodů množiny $\mathfrak{A}$ nebo pouze z bodů množiny komplementární $\mathfrak{A}'$ (jinak by totiž obsahoval nutně bod z $\mathfrak{G}$), jeho koncové body pak patří ku $\mathfrak{G}$; splývá tedy tento interval nutně s jedním z intervalů J_n, K_n. Seřaďme nyní tyto styčné intervaly množiny $\mathfrak{G}$ tímto způsobem: $J_1, K_1, J_2, K_2, \ldots, J_n, K_n, J_{n+1}, \ldots$

Ježto množina $\mathfrak{G}$ je dle předpokladu pravidelná, existuje funkce $\psi(n) > 0$ taková, že ke každému x z $\mathfrak{G}$ lze nalézti n_x tak, že $\psi(2n-1) < \varphi(x, n)$, $\psi(2n) < \varphi_1(x, n)$ pro $n > n_x$. Při tom značí $\varphi(x, n)$ resp. $\varphi_1(x, n)$ vzdálenost bodu x od intervalu J_n resp. K_n. Položme $\chi(n) =$ menšímu z čísel $\frac{1}{n}$, $\psi(2n-1)$, a budiž x libovolný bod z $\mathfrak{A}$; je-li x bodem ohraničení, je $\varphi(x, n) > \chi(n)$ pro $n > n_x$, je-li x bodem vnitřním, je $\varphi(x, n) \geqq d(x) > 0$ pro všechna n, a tedy $\varphi(x, n) > \chi(n)$ pro $n > \frac{1}{d(x)}$. Je tedy množina $\mathfrak{A}$ vskutku pravidelná.

Věta E: *Rozložme množinu uzavřenou* $\mathfrak{A}$ (dle věty Cantor-Bendixsonovy) *na množinu dokonalou $\mathfrak{P}$ a spočetnou $\mathfrak{D}$* : $\mathfrak{A} = \mathfrak{P} + \mathfrak{D}$. Potom, *je-li množina $\mathfrak{P}$ pravidelná, je i množina $\mathfrak{A}$ pravidelná.*

Důkaz: každý styčný interval množiny $\mathfrak{A}$ je obsažen v jistém styčném intervalu množiny $\mathfrak{P}$, neboť množina $\mathfrak{P}$ je částí množiny $\mathfrak{A}$.**) Označme K_n n-tý styčný interval množiny $\mathfrak{P}$, a $J_n^1, J_n^2, \ldots, J_n^m, \ldots$ konečný nebo

*) Čili — což je totéž — jako uzavřenou obálku jisté jednoduše spočetné posloupnosti uzavřených intervalů bez společných bodů.

**) A naopak: Každý styčný interval K_n množiny $\mathfrak{P}$ obsahuje *aspoň jeden* styčný interval množiny $\mathfrak{A}$, ježto v K_n leží nejvýše jednoduše spočetné množství bodů množiny $\mathfrak{A}$.

nekonečný počet styčných intervalů množiny $\mathfrak{A}$, jež jsou obsaženy v K_n. Je-li množina $\mathfrak{P}$ pravidelná, existuje $\psi(n) > 0$ takové, že pro každé x z $\mathfrak{P}$ existuje n_x takové, že $\psi(n) < \varphi_1(x, n)$ pro $n > n_x$, značí-li $\varphi_1(x, n)$ vzdálenost bodu x od K_n. Volme nyní $\chi_1(n) =$ nejmenšímu z čísel $\psi(1)$, $\psi(2), \ldots, \psi(n), \frac{1}{n}$. Srovnejme pak intervaly styčné J_n^m množiny $\mathfrak{A}$ v tomto pořadí:

$$J_1, J_2, J_3, \ldots, J_l, \ldots \equiv J_1^1, J_2^1, J_1^2, J_3^1, J_2^2, J_1^3, \ldots, J_n^m, \ldots$$

Libovolný bod x množiny $\mathfrak{A}$ je

a) buď bodem $\mathfrak{D}$,

b) nebo bodem $\mathfrak{P}$, a potom je

b 1. buď vnitřním bodem $\mathfrak{P}$ z obou stran,

b 2. nebo vnitřním bodem $\mathfrak{P}$ pouze z jedné strany,

b 3. nebo bodem zhuštění (ale ne vnitřním, ani z jedné strany) množiny $\mathfrak{P}$ z jedné strany a isolovaným z druhé strany,

b 4. nebo bodem zhuštění $\mathfrak{P}$ (ale ne vnitřním, ani z jedné strany) z obou stran.

Značme v dalším opět $\varphi(x, l)$ vzdálenost bodu x od intervalu J_l.

Je-li x bod z *b* 1., potom x je též vnitřním bodem množiny $\mathfrak{A}$, a tedy $\varphi(x, l) \geq d(x) > 0$ pro všechna l, a tedy

$$\varphi(x, l) > \chi_1(l) \text{ pro } l > \frac{1}{d(x)}. \tag{20}$$

Body sub *a*) a sub *b* 3. tvoří jednoduše spočetnou množinu (neboť body z *b* 3. jsou koncové body intervalů K_n). Ale i body z *b* 2. tvoří jednoduše spočetnou množinu; uvažujme na př. množinu $\mathfrak{B}$ bodů z $\mathfrak{P}$, jež jsou vnitřní body pouze z levé strany. Potom, je-li x libovolný bod z $\mathfrak{B}$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že interval $(x - \varepsilon, x)$ obsahuje samé vnitřní body množiny $\mathfrak{P}$, a tedy žádný bod množiny $\mathfrak{B}$; je tedy každý bod množiny $\mathfrak{B}$ isolován z leva, a tedy množina $\mathfrak{B}$ je dle známé věty*) jednoduše spočetná; obdobně se to dokáže pro množinu bodů, jež jsou vnitřní body $\mathfrak{P}$ pouze z prava. Tedy množina bodů, uvedených sub. *a*), *b* 2., *b* 3., jest jednoduše spočetná. Způsobem obdobným, jako při důkazu věty *A*, sestrojím kladnou funkci $\chi_2(l)$ takovou, že ke každému x této množiny lze nalézti l_x takové, že

$$\varphi(x, l) > \chi_2(l) \quad \text{pro } l > l_x. \tag{21}$$

Budiž konečně x bod z *b* 4. Potom existuje n_x takové, že $\varphi_1(x, n) > \psi(n)$ pro $n > n_x$, a tím spíše $\varphi_1(x, n) > \chi_1(l)$, je-li $l > n > n_x$, ježto $\chi_1(l) \leq \psi(n)$ pro $l \geq n$. Ježto interval $J_l = J_n^m$ leží v K_n, je tím spíše

*) Viz třeba H. Hahn, l. c. str. 177.

$\varphi(x, l) > \chi_1(l)$, je-li $l \geq n > n_x$. Ale dle způsobu seřazení posloupnosti $J_1, J_2, \ldots, J_l, \ldots$ je vždy $l > n$, a tedy platí

$$(22) \qquad \varphi(x, l) > \chi_1(l), \quad \text{je-li } J_l = J_n^m \text{ a } n > n_x,$$

t. j. jakmile interval J_l leží v intervalu K_n, pro nějž $n > n_x$. Zbývá vyšetřovati $\varphi(x, l)$ pro hodnoty l takové, že interval J_l leží v jednom z intervalů $K_1, K_2, \ldots, K_{n_x}$. My víme však, že bod x (jakožto bod z b 4.) je bodem zhuštění množiny $\mathfrak{P}$ z obou stran; v důsledku toho není koncovým bodem žádného z intervalů K_n. Následkem toho mají intervaly $K_1, K_2, \ldots, K_{n_x}$ od bodu x vzdálenost větší než jisté kladné číslo $d'(x)$, a tedy tím spíše $\varphi(x, l) > d'(x)$, je-li $J_l = J_n^m$ a $n < n_x$. Platí tedy

$$(23) \qquad \varphi(x, l) > \chi_1(l), \quad \text{je-li } l > \frac{1}{d'(x)},$$

a to dle (22) i tehdy, je-li příslušné n větší než n_x. Volme nyní funkci $\chi(l) =$ = menšímu z čísel $\chi_1(l)$, $\chi_2(l)$. Potom z (20), (21), (23) plyne: ať je x jakýkoliv bod z $\mathfrak{A}$, lze nalézti l_x tak, že platí $\varphi(x, l) > \chi(l)$ pro $l > l_x$. Tím jest věta E dokázána.

Poznámka. Ke konci chci ještě poznamenati, co by plynulo z toho, kdyby se věty D a E daly obrátit. Potom totiž, kdyby $\mathfrak{A}$ byla pravidelná, bylo by i ohraničení její $\mathfrak{G}$ pravidelné. Rozložím-li pak $\mathfrak{G}$ na množinu dokonalou nebo prázdnou $\mathfrak{P}$ a spočetnou $\mathfrak{T}$, bylo by i $\mathfrak{P}$ pravidelné. Ale $\mathfrak{G}$, jakožto ohraničení uzavřené množiny, je množina nehustá, a tím spíše je $\mathfrak{P}$ nehustá. $\mathfrak{P}$ nemůže však býti dokonalá množina nehustá, ježto má býti množinou pravidelnou (věta B). Musila by tedy množina $\mathfrak{P}$ býti prázdná, t. j. ohraničení $\mathfrak{G}$ bylo by jednoduše spočetné, a měli bychom tak větu: nutná (a jak dle věty A víme, i postačující) podmínka, aby uzavřená množina $\mathfrak{A}$ byla pravidelná, jest, aby její ohraničení bylo jednoduše spočetné. Zda tato věta je správná, není mně známo.