Über die simultanen diophantischen Approximationen.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Definitionen und Resultate.

Wir wollen uns in dieser Abhandlung mit zwei Problemen aus der Theorie der simultanen diophantischen Approximationen beschäftigen, und zwar hat das erste von diesen beiden Problemen einen mengentheoretischen, das andere einen elementaren Charakter.

Wir führen zunächst folgende Ausdrucksweise ein: Es sei s ganz, $s \geqq 1$; $\omega(x)$ sei eine für $x \geqq 1$ definierte und positive Funktion. Es sei $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein System von s reellen Zahlen; man kann dieses System auch als einen Punkt P (mit den Koordinaten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$) in einem s-dimensionalen kartesischen Raume R_s deuten. Wir wollen sagen, daß das System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ (oder der Punkt P) die Approximation $\omega(x)$ zuläßt, wenn es zu jedem $c > 0$ ein System von $s+1$ ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit $q > c$ gibt, welches den folgenden s Ungleichungen genügt:

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \omega(q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Bekanntlich läßt jedes System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ die Approximation $\dfrac{1}{x^{1+\frac{1}{s}}}$ zu (es sind noch etwas schärfere Resultate bekannt[1])). Es drängt sich also folgende Frage auf: Es sei (bei gegebenem ganzem $s \geqq 1$) für $x \geqq 1$ eine positive Funktion $\omega(x)$ gegeben, die kleiner als $x^{-1-\frac{1}{s}}$ ist; wie „groß" ist dann die Menge derjenigen Punkte des Raumes R_s, welche die Approxi-

[1]) Nach H. Minkowski (Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, S. 112) darf man $x^{-1-\frac{1}{s}}$ durch $\dfrac{s}{s+1} x^{-1-\frac{1}{s}}$ ersetzen.

mation $\omega(x)$ zulassen? Dabei muß man freilich den Ausdruck „wie groß" noch präzisieren; wir verstehen diesen Ausdruck zunächst im Sinne der Lebesgueschen Maßtheorie und formulieren daher unsere Frage genauer folgendermaßen:

Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ sei für $x \geqq 1$ definiert und positiv; dann wollen wir in dieser ganzen Abhandlung mit

$$M(\omega(x); s)$$

die Menge derjenigen Systeme (Punkte) $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$0 \leqq \theta_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

bezeichnen, welche die Approximation $\omega(x)$ zulassen. Wenn A eine Punktmenge in R_s ist, so wollen wir mit $L(A)$ das äußere (s-dimensionale) Lebesguesche Maß von A bezeichnen. Und wir fragen: Wie groß ist $L(M(\omega(x); s))$?[2]) Diese Frage wurde von Herrn A. Khintchine[3]) folgendermaßen beantwortet:

Es sei $\omega(x)$ für $x \geqq 1$ stetig und positiv; $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ sei für $x \geqq 1$ abnehmend, $\omega^s(x)\, x^{s+1} \to 0$ für $x \to \infty$. Dann ist $L(M(\omega(x); s))$ gleich Null oder gleich Eins, je nachdem das Integral

$$\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$$

konvergiert oder divergiert[4]).

Dieses schöne Ergebnis gibt also eine sehr vollständige Antwort auf unsere Frage; bei einer näheren Betrachtung bieten sich jedoch Fragen dar, die durch den Khintchineschen Satz nicht beantwortet werden. Es sei z. B. $s = 2$; dann ist $L(M(x^{-\alpha}; 2)) = 0$ für $\alpha > \frac{3}{2}$; man wird aber trotzdem vermuten, daß z. B. die Menge $M(x^{-\frac{7}{4}}; 2)$ wesentlich „größer" ist als $M(x^{-2}; 2)$. Weil hier das Lebesguesche Maß versagt, muß man zu einem anderen Maßbegriff greifen, der insbesondere die Mengen vom Lebesgueschen Maß Null noch weiter zu klassifizieren gestattet. Und zwar

---

[2]) Übrigens ist $M(\omega(x); s)$, wie leicht einzusehen, eine Borelsche Menge, also meßbar; die Einschränkung $0 \leqq \theta_i < 1$ ist nur aus Bequemlichkeitsgründen gemacht worden und verletzt offenbar keineswegs die Allgemeinheit der Fragestellung.

[3]) Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 706—714. Fragen dieser Art gehen auf E. Borel zurück (Contribution à l'analyse arithmétique du continu, Journal de mathématiques pures et appliquées (5), 9 (1903), S. 329—375.)

[4]) $M(\omega(x); s)$ wird offenbar nicht geändert, wenn man $\omega(x)$ irgendwie abändert, aber so, daß für hinreichend große x die Funktion $\omega(x)$ ungeändert bleibt; es würde daher genügen, z. B. die Monotonie von $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ erst für $x > a$ $(a \geqq 1)$ vorauszusetzen. Man beachte diese triviale Bemerkung auch im folgenden.

eignet sich zu diesem Zweck ein von Herrn F. Hausdorff eingeführter Maßbegriff. Dieser wird folgendermaßen eingeführt[5]):

Es sei $f(x)$ eine für $x > 0$ definierte, stetige, positive und wachsende Funktion; $f(x) \to 0$ für $x \to 0$. Es sei R_s $(s \geqq 1)$ ein s-dimensionaler kartesischer Raum. Unter einem s-dimensionalen Würfel verstehen wir stets einen Würfel in R_s, dessen Kanten mit den Koordinatenachsen parallel sind, und zwar, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, einen offenen Würfel. A sei eine Punktmenge aus R_s; ϱ sei eine positive Zahl.

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein höchstens abzählbares System von s-dimensionalen Würfeln $W_1, W_2, \ldots$, deren Kanten $d_1, d_2, \ldots$ sämtlich kleiner als ϱ sind; $\mathfrak{S}$ sei ein Überdeckungssystem von A (d. h. jeder Punkt von A sei in mindestens einem Würfel aus $\mathfrak{S}$ enthalten). Wir setzen

$$\Lambda(\mathfrak{S}) = \sum_i f(d_i)$$

(die rechte Seite soll $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum_i f(d_i)$ divergiert). Die untere Grenze von $\Lambda(\mathfrak{S})$ für alle solchen höchstens abzählbaren Überdeckungssysteme $\mathfrak{S}$ von A, die der Bedingung $d_i < \varrho$ genügen, möge mit $L_\varrho(A; f(x))$ bezeichnet werden. Wenn ϱ abnimmt, so verschärft sich die Bedingung $d_i < \varrho$, also nimmt $L_\varrho(A; f(x))$ nicht ab, also existiert der Grenzwert

$$L(A; f(x)) = \lim_{\varrho=0} L_\varrho(A; f(x)), \qquad (0 \leqq L(A; f(x)) \leqq \infty)\ ^{6)}.$$

Diese Mengenfunktion $L(A; f(x))$ erfüllt (bei gegebenem s und $f(x)$) die fünf Postulate der Carathéodoryschen Maßtheorie. Wir werden davon aber keinen Gebrauch machen; wir benutzen nur die folgenden trivialen Folgerungen der Definition:

[5]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, Math. Annalen **79** (1919), S. 157 bis 179. Der Leser braucht von der Hausdorffschen Theorie nichts zu kennen.

[6]) Unsere Definition weicht ein wenig von der Hausdorffschen Definition 2 (a. a. O. [5]), S. 166) ab; Herr Hausdorff überdeckt nämlich A mit Kugeln, deren Durchmesser $d_1, d_2, \ldots$ heißen; für unsere Zwecke sind die Würfel bequemer. Alle Hausdorffschen Schlüsse gelten auch für unsere Definition. Übrigens werden wir uns bei unserer Hauptuntersuchung (Satz 4) auf solche $f(x)$ beschränken, für welche $f(x)\,x^{-s}$ nicht wächst; also $f(x) \geqq f\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) \geqq s^{-\frac{s}{2}} f(x)$ für $x > 0$. Da jede Kugel vom Durchmesser d einen Würfel von der Kante $\frac{d}{\sqrt{s}}$ enthält und in einem Würfel von der Kante d enthalten ist, so besagt die Gleichung $L(A; f(x)) = 0$ offenbar dasselbe, ob wir sie in unserem (Würfel) oder im Hausdorffschen Sinne (Kugel) verstehen; dasselbe gilt von der Gleichung $L(A; f(x)) = \infty$. Und nur solche Mengen A kommen in unseren Hauptsätzen vor. In verschiedenen Fragen vom geometrischen Charakter könnte jedoch die Hausdorffsche Definition vorteilhafter sein, da sie gegenüber den euklidischen Bewegungen invariant ist.

1. Aus $A \subset B$ folgt $L(A; f(x)) \leqq L(B; f(x))$.

2. Wenn $V_1, V_2, \ldots$ höchstens abzählbar viele Mengen aus R_s sind, V ihre Vereinigungsmenge, so ist

$$L(V; f(x)) \leqq \sum_i L(V_i; f(x)).$$

3. Wenn auch $f_1(x)$ eine für $x > 0$ definierte, stetige, positive und wachsende Funktion ist ($f_1(x) \to 0$ für $x \to 0$) und wenn

$$\liminf_{x=0} \frac{f_1(x)}{f(x)} \geqq 1,$$

so ist

$$L(A; f_1(x)) \geqq L(A; f(x)).$$

Wir bemerken noch: erstens, daß $L(A; f(x))$ nur von dem Verhalten von $f(x)$ für *kleine* $x > 0$ abhängt; zweitens, daß $L(A; x^s)$ offenbar das äußere Lebesguesche Maß von A ist.

Dieser Maßbegriff $L(A; f(x))$ erlaubt uns in der Tat, die Vermutung, daß einer „schwächeren" Approximation $\omega(x)$ eine „größere" Menge $M(\omega(x); s)$ entspricht als einer „schärferen" Approximation, genau zu formulieren und in ziemlich allgemeinen Fällen zu beweisen; dies geschieht durch die Sätze 3 und 4. Um aber den Sinn dieser etwas komplizierten Sätze dem Leser deutlicher zu machen, führen wir an dieser Stelle zunächst ein einfaches Korollar derselben — nämlich den Satz 1 — an. Vorher aber noch eine kleine Bemerkung.

Unter den reellen Systemen $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ verdienen offenbar diejenigen Systeme eine besondere Beachtung, die keiner Gleichung

$$\sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i + k_0 = 0$$

mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $k_0, k_1, \ldots, k_s$ genügen; wir wollen solche Systeme „eigentliche Systeme" nennen und mit $M_e(\omega(x); s)$ die Menge aller eigentlichen Systeme aus $M(\omega(x); s)$ bezeichnen. Der Satz 1 lautet nun:

Satz 1. *Für* $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$ *ist*

$$L(M(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = L(M_e(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = 0 \quad \textit{für} \quad \gamma > \frac{s+1}{\alpha};$$

$$L(M(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = L(M_e(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = \infty \quad \textit{für} \quad 0 < \gamma \leqq \frac{s+1}{\alpha}.$$

Man könnte — ähnlich, aber nicht genau so wie Herr Hausdorff — sagen, daß eine Menge A aus R_s die Dimension σ besitzt, wenn σ die untere Grenze derjenigen Zahlen $\gamma > 0$ ist, für welche $L(A; x^\gamma) = 0$. Nach dieser Ausdrucksweise wäre also z. B. die Dimension von $M(x^{-\alpha}; s)$ gleich $\frac{s+1}{\alpha}$

$\left(\text{für } \alpha > 1 + \frac{1}{s}\right)$. Der Satz 1 und die weiter unten angeführten Sätze 3 und 4 bilden unseren Beitrag zu der ersten, mengentheoretischen Frage.

Die andere, elementare Frage lautet — roh gesagt — folgendermaßen: Es sei s ganz, $s \geqq 1$; $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ seien zwei für $x \geqq 1$ positive Funktionen, $x^{-1-\frac{1}{s}} \geqq \omega_1(x) > \omega_2(x)$; gibt es dann s-gliedrige Systeme (schärfer: eigentliche Systeme), die zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen? Für $s = 1$ liefert die Theorie der Kettenbrüche in sehr allgemeinen Fällen eine bejahende Antwort auf diese Frage[7]; dagegen aber scheint für $s > 1$ noch recht wenig darüber bekannt zu sein. Wir führen zunächst folgendes wichtige Resultat an, welches in einem Satz des Herrn O. Perron[8]) enthalten ist:

Zu jedem ganzen $s \geqq 1$ gibt es eine Zahl $c(s) > 0$, so daß es eigentliche s-gliedrige Systeme gibt, die zwar die Approximation $\frac{s}{s+1} x^{-1-\frac{1}{s}}$, nicht aber die Approximation $c(s)\, x^{-1-\frac{1}{s}}$ zulassen.

Auch der angeführte Satz des Herrn Khintchine gibt einen Beitrag zu diesem Problem: Es sei s ganz, $s \geqq 1$; $\omega_i(x)$ $(i = 1, 2)$ seien für $x \geqq 1$ stetig und positiv; $\omega_i^s(x)\, x^{s+1}$ sei abnehmend für $x \geqq 1$ und $\to 0$ für $x \to \infty$; weiter sei

$$\int_1^\infty \omega_1^s(x)\, x^s\, dx \quad \text{divergent},$$

$$\int_1^\infty \omega_2^s(x)\, x^s\, dx \quad \text{konvergent}.$$

$$\left(\text{Z. B. } \omega_1(x) = x^{-1-\frac{1}{s}} \log^{-\frac{1}{s}}(x+1); \qquad \omega_2(x) = x^{-1-\frac{1}{s}} \log^{-\frac{2}{s}}(x+1)\right);$$

dann gibt es eigentliche s-gliedrige Systeme, welche zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen. Denn nach dem Khintchineschen Satz ist einerseits $L(M(\omega_1(x); s)) = 1$, also auch $L(M_e(\omega_1(x); s)) = 1$ (denn die uneigentlichen Systeme bilden offenbar eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null, nämlich eine Vereinigungsmenge von abzählbar vielen $(s-1)$-dimensionalen Hyperebenen); andererseits ist $L(M(\omega_2(x); s)) = 0$ — daraus folgt aber, daß es Punkte gibt, die zwar zu $M_e(\omega_1(x); s)$, nicht aber zu $M(\omega_2(x); s)$ gehören.

Wir wollen weiter (Satz 5) unsere Frage unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen beantworten; zunächst führen wir aber folgenden einfacheren Satz an:

---

[7]) Vgl. auch den § 8, Satz 6 und die Bemerkungen dazu.

[8]) Über diophantische Approximationen, Math. Annalen **83** (1921), S. 77—84. Vgl. auch Ph. Furtwängler, Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen, Math. Annalen **96** (1926), S. 169—175 und **99** (1928), S. 71—83; A. Scholz, Zur simultanen Approximation von Irrationalzahlen, Math. Annalen **103** (1930), S. 48—51.

Satz 2. *Es sei s ganz, $s \geqq 1$, $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$. Dann gibt es eigentliche Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, welche zwar die Approximation $x^{-\alpha}$, aber keine Approximation $x^{-\beta}$ mit konstantem $\beta > \alpha$ zulassen.*

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 1; wir haben nämlich nur zu zeigen, daß es Punkte gibt, die zwar in $M_e(x^{-\alpha}; s)$, aber in keiner Menge $M_e\left(x^{-\alpha-\frac{1}{n}}; s\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ liegen. Dies ist aber klar, da nach Satz 1

$$L\left(M_e(x^{-\alpha}; s); x^{\frac{s+1}{\alpha}}\right) = \infty,$$

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_e\left(x^{-\alpha-\frac{1}{n}}; s\right); x^{\frac{s+1}{\alpha}}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} L\left(M_e\left(x^{-\alpha-\frac{1}{n}}; s\right); x^{\frac{s+1}{\alpha}}\right) = 0.$$

Wir führen nun die Hauptsätze (Satz 3, 4, 5) an:

Satz 3. Voraussetzungen. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ stetig, positiv und abnehmend für $x \geqq 1$; $f(x)$ stetig, positiv und wachsend für $x > 0$; $\omega(x) \to 0$ für $x \to \infty$; $f(x) \to 0$ für $x \to 0$;*

$$\int_1^{\infty} f(2\,\omega(x))\, x^s\, dx$$

konvergent.

Behauptung. $L(M(\omega(x); s); f(x)) = 0$. (*Also um so mehr* $L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = 0$.)

Satz 4. Voraussetzungen. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ stetig und positiv für $x \geqq 1$; $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ monoton*[9]) *für $x \geqq 1$;*

$$\int_1^{\infty} \omega^s(x)\, x^s\, dx$$

konvergent (also ist $\omega^s(x)\, x^{s+1} \to 0$, $\omega(x) \to 0$ für $x \to \infty$, $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ nicht wachsend, $\omega(x)$ abnehmend für $x \geqq 1$).

Weiter sei $f(x)$ positiv, stetig und wachsend für $x > 0$; $f(x) \to 0$ für $x \to 0$; $\frac{f(x)}{x^s}$ monoton für $x > 0$; $f(2\,\omega(x))\, x^{s+1}$ monoton für $x \geqq 1$;

$$\int_1^{\infty} f(2\,\omega(x))\, x^s\, dx$$

divergent $\left(\text{also } \frac{f(2\,\omega(x))}{\omega^s(x)} \to \infty \text{ für } x \to \infty, \text{ d. h. } \frac{f(x)}{x^s} \to \infty \text{ für } x \to 0, \frac{f(x)}{x^s} \text{ nicht wachsend für } x > 0\right)$.

---

9) Das Wort „monoton" wird im schwächeren Sinn: nicht wachsend oder nicht abnehmend gebraucht.

Behauptung. $L(M_\varepsilon(\omega(x); s); f(x)) = \infty$ (*also um so mehr* $L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty$).

Der Satz 1 ist eine unmittelbare Folge der Sätze 3 und 4; es genügt, $\omega(x) = x^{-\alpha}$, $f(x) = x^\gamma$ zu setzen.

Satz 5. *Es sei* $s \geqq 1$, *s ganz*; $\omega(x)$ *sei stetig und positiv,* $\omega^s(x) x^{s+1}$ *monoton für* $x \geqq 1$;

$$\int_1^\infty \omega^s(x) x^s \, dx$$

sei konvergent.

$\lambda(x)$ *sei für* $x \geqq 1$ *definiert und habe für* $x \geqq 1$ *eine stetige Ableitung*[10]; *es sei* $\frac{\lambda(x)}{x}$ *monoton und* $\geqq 1$ *für* $x \geqq 1$, $\frac{\lambda(x)}{x} \to \infty$ *für* $x \to \infty$.

Behauptung. *Es gibt eigentliche s-gliedrige Systeme, welche zwar die Approximation* $\omega(x)$, *nicht aber die Approximation* $\omega(\lambda(x))$ *zulassen.*

Es wäre noch verschiedenes zu den Sätzen 3, 4, 5 zu bemerken; um aber den Gedankengang nicht zu unterbrechen, verschiebe ich diese Bemerkungen in die beiden letzten Paragraphen, wo sich auch noch ein Satz (Satz 6) befindet, der in gewissen Fällen den Satz 5 ersetzen kann.

Wir sollen also die Sätze 3, 4, 5 beweisen. Der Satz 3 ist fast trivial, der Satz 5 ist eine leichte Folge der Sätze 3 und 4. Die ganze Schwierigkeit liegt im Beweis des Satzes 4, dem die Paragraphen 3, 4, 5 gewidmet sind.

Ich habe im Falle $s = 1$ bereits einen Spezialfall der Sätze 3 und 4 bewiesen, nämlich den Satz:

$$L(M(x^{-\alpha}; 1); x^\gamma) = 0 \quad \text{für } \gamma > \frac{2}{\alpha},$$

$$L(M(x^{-\alpha}; 1); x^\gamma) = \infty \quad \text{für } 0 < \gamma < \frac{2}{\alpha}$$

$$(\alpha > 2).$$ [11]

Der heutige Beweis des Satzes 4 ist mit dem damaligen Beweis verwandt, ist aber wesentlich komplizierter. Dies hat seinen Grund einerseits in der Willkürlichkeit der Funktionen $f(x)$, $\omega(x)$, hauptsächlich aber in den Schwierigkeiten, die im Fall $s > 1$ auftreten. Die wichtigsten Punkte des Beweises sind der Hilfssatz 3, der einem Hilfssatz des Herrn Khintchine[12] nachgebildet ist, dann der Übergang von den Überdeckungssystemen zu Systemen, die ich „Überschlagungssysteme" nenne, und endlich der Hilfssatz 6.

---

[10]) Für $x = 1$ meine ich die rechtsseitige Ableitung.

[11]) Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß, Recueil mathématique de la Société mathématique de Moscou (im Druck).

[12]) A. a. O. [3]), Hilfssatz 3.

§ 2.
Beweis des Satzes 3.

Es seien die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt. Für ganzes $q > 1$ ist dann

$$f(2\omega(q))\,q^s \leqq 2^s f(2\omega(q))\,(q-1)^s \leqq 2^s \int\limits_{q-1}^{q} f(2\omega(x))\,x^s\,dx;$$

also ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} f(2\omega(q))\,q^s$$

konvergent.

Es sei $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$. Wir wählen eine ganze Zahl $Q > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\omega(Q) < 1, \qquad 2\omega(Q) < \varrho, \qquad \sum_{q=Q}^{\infty} f(2\omega(q))\,q^s < \frac{\varepsilon}{3^s}.$$

Jeder Punkt von $M(\omega(x); s)$ muß in einem s-dimensionalen Würfel $W(P)$ enthalten sein, dessen Mittelpunkt P die Koordinaten

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q} \qquad (p_1, p_2, \ldots, p_s, q \text{ ganz}, \; q \geqq Q) \tag{1}$$

hat und dessen Kante $2\omega(q)$ ist. Weil $M(\omega(x); s)$ im abgeschlossenen Einheitswürfel liegt und $\omega(q) < 1$ für $q \geqq Q$, so kommen nur diejenigen $W(P)$ in Betracht, deren Mittelpunktkoordinaten (1) den Ungleichungen

$$-1 < \frac{p_i}{q} < 2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$

genügen; die Anzahl derartiger Würfel bei festem q ist $(3q-1)^s$. Bilden wir also alle Würfel $W(P)$, wo P die Koordinaten (1) mit der Nebenbedingung (2) hat, so überdeckt ihre Gesamtheit der Menge $M(\omega(x); s)$. Da ihre Kanten kleiner als ϱ sind, so ist also

$$L_\varrho(M(\omega(x); s); f(x)) \leqq \sum_{q=Q}^{\infty} f(2\omega(q))\,(3q-1)^s < \varepsilon;$$

da aber ε und ϱ zwei beliebige positive Zahlen sind, so ist damit gezeigt, daß

$$L(M(\omega(x); s); f(x)) = 0,$$

w. z. b. w.

§ 3.
Zurückführung des Satzes 4 auf einen einfacheren Satz.

Hilfssatz 1. *Für $x \geqq 1$ seien $u(x)$, $l(x)$ stetig; weiter sei $u(x) > 0$, $u(x)\,x$ monoton, $l(x) \to 0$ für $x \to \infty$, $\int\limits_1^\infty u(x)\,dx$ konvergent (also $u(x)\,x \to 0$ für $x \to \infty$, $u(x) \cdot x$ nicht wachsend).*

Dann gibt es eine für $x \geqq 1$ stetige und positive Funktion $v(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\frac{v(x)}{u(x)}$, $v(x)x$ *sind monoton für* $x \geqq 1$.
2. $v(x)x \to 0$ *für* $x \to \infty$ *(also ist* $v(x) \cdot x$ *nicht wachsend).*
3. $\int\limits_1^\infty v(x)\,dx$ *divergiert (also ist* $\frac{v(x)}{u(x)}$ *nicht abnehmend,* $\frac{v(x)}{u(x)} \to \infty$ *für* $x \to \infty$*).*
4. $\int\limits_1^\infty v(x)\,l(x)\,dx$ *konvergiert.*

Beweis. Wir wählen eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(1 < x_1 < x_2 < \ldots)$, so daß

$$x_n > e^{n^2}, \qquad |l(x)| \leqq \frac{1}{2^n} \text{ für } x \geqq x_n.$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein: Wenn $f(x)$ eine für $x \geqq 1$ stetige Funktion ist, die für $x \geqq \beta$ $(\beta \geqq 1)$ mit $c\,u(x)$ zusammenfällt, wo $c > 0$ von x unabhängig ist, so werde für $b \geqq a \geqq \beta$ mit $f(x; a, b)$ folgende Funktion von x bezeichnet:

$$\begin{aligned} f(x; a, b) &= f(x) && \text{für } 1 \leqq x \leqq a, \\ f(x; a, b) &= \frac{c_1}{x} && \text{für } a \leqq x \leqq b, \\ f(x; a, b) &= c_2 u(x) && \text{für } x \geqq b, \end{aligned}$$

wo c_1, c_2 Konstanten sind; also ist

$$c\,u(a) = \frac{c_1}{a}, \qquad \text{d. h. } c_1 = c\,a\,u(a) = a\,f(a) > 0,$$

$$\frac{c_1}{b} = c_2 u(b), \text{ d. h. } c_2 = c\frac{a\,u(a)}{b\,u(b)} > 0.$$

$f(x; a, b)$ ist offenbar stetig für $x \geqq 1$; weiter ist

$$\begin{aligned} f(x; a, b) &= f(x) \text{ für } 1 \leqq x \leqq a, \\ f(x; a, b) &= c\frac{a\,u(a)}{x} \geqq c\,u(x) = f(x) \text{ für } a \leqq x \leqq b, \\ f(x; a, b) &= c\frac{a\,u(a)}{b\,u(b)}u(x) \geqq c\,u(x) = f(x) \text{ für } x \geqq b, \end{aligned}$$

also

$$f(x; a, b) \geqq f(x) \text{ für } x \geqq 1.$$

Endlich ist

$$k_{a,b} = \int\limits_1^\infty f(x; a, b)\,dx = \int\limits_1^a f(x)\,dx + c\,a\,u(a)\log\frac{b}{a} + \frac{a\,u(a)}{b\,u(b)}\int\limits_b^\infty f(x)\,dx;$$

also ist, bei festem a, $k_{a,b}$ eine stetige Funktion von b für $b \geqq a$, und zwar ist

$$k_{a,a} = \int\limits_1^\infty f(x)\,dx, \qquad k_{a,b} \to \infty \text{ für } b \to \infty.$$

Wir bilden nun eine Folge von $v_1(x), v_2(x), \ldots$ folgendermaßen: Es sei $\int\limits_1^\infty u(x)\,dx = A > 0$; dann sei: $a_1 = b_1 = 1$, $v_1(x) = u(x) = u(x; a_1, b_1)$; $v_2(x) = v_1(x; a_2, b_2)$, wo $a_2 = \max(b_1, x_1)$ und $b_2 > a_2$ so gewählt wird, daß $\int\limits_1^\infty v_2(x)\,dx = \int\limits_1^\infty v_1(x; a_2, b_2)\,dx = 2A$; und allgemein $(n \geqq 2)$ sei $v_n(x) = v_{n-1}(x; a_n, b_n)$, wo $a_n = \max(b_{n-1}, x_{n-1})$ und $b_n > a_n$ so gewählt wird, daß

$$\int\limits_1^\infty v_n(x)\,dx = \int\limits_1^\infty v_{n-1}(x; a_n, b_n)\,dx = nA.$$

Es ist $a_{n+1} \geqq x_n > e^{n^2}$ und für $m > n$ ist $v_m(x) \geqq v_n(x)$ für $x \geqq 1$, und zwar $v_m(x) = v_n(x)$ für $1 \leqq x \leqq a_{n+1}$. Also existiert $\lim\limits_{n=\infty} v_n(x) = v(x)$, und zwar ist $v(x)$ positiv und stetig für $x \geqq 1$ und $\int\limits_1^\infty v(x)\,dx$ ist divergent.

Ich behaupte: $\frac{v(x)}{u(x)}$ ist nicht abnehmend, $v(x)x$ nicht wachsend für $x \geqq 1$. Denn für $a_n \leqq x \leqq b_n$ ist $v(x) = v_n(x) = \frac{\alpha}{x}$, wo α eine positive Konstante ist, also

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \frac{\alpha}{x\,u(x)}, \qquad v(x)\,x = \alpha;$$

ebenso für $b_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ ist $v(x) = v_n(x) = \alpha u(x)$, wo α wiederum eine positive Konstante ist, also

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \alpha, \qquad v(x)\,x = \alpha\,u(x)\,x.$$

Weiter ist $v(x)x \to 0$ für $x \to \infty$, denn aus $v(x)x \to t$ $(0 < t \leqq \infty)$ würde folgen

$$\int\limits_1^{a_{n+1}} v_n(x)\,dx = \int\limits_1^{a_{n+1}} v(x)\,dx = \Omega \int\limits_1^{a_{n+1}} \frac{dx}{x} = \Omega(\log a_{n+1}) = \Omega(n^2),$$

im Widerspruch gegen

$$\int\limits_1^{a_{n+1}} v_n(x)\,dx < \int\limits_1^\infty v_n(x)\,dx = nA.$$

Endlich ist $\int\limits_1^\infty v(x)\,l(x)\,dx$ konvergent, da

$$\int\limits_1^{a_{n+1}} v(x)\,|l(x)|\,dx = \int\limits_{a_1}^{a_2} v_1(x)\,|l(x)|\,dx + \int\limits_{a_2}^{a_3} v_2(x)\,|l(x)|\,dx + \ldots + \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} v_n(x)\,|l(x)|\,dx$$
$$\leqq \int\limits_{a_1}^{a_2} v_1(x)\,|l(x)|\,dx + A\left(\frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}}\right).$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir wollen nun den Satz 4 auf den folgenden einfacheren Satz 7 zurückführen:

Satz 7. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes* 4 *erfüllt*; *dazu sei noch*

$$f(2\omega(x))\,x^{s+1} \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to \infty;$$

dann ist

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty.$$

Wir sollen zeigen, daß Satz 4 aus Satz 7 folgt; es sei also der Satz 7 wahr und die Voraussetzungen des Satzes 4 seien erfüllt; dann existiert

$$\lim_{x=\infty} f(2\omega(x))\,x^{s+1} = t \qquad (0 \leqq t \leqq \infty). \tag{3}$$

Wenn $t = 0$, so ist nichts zu beweisen; es sei also $t > 0$. Wir setzen im Hilfssatz 1

$$u(x) = \omega^s(x)\,x^s, \qquad l(x) = \frac{1}{x}$$

und bekommen eine Funktion $v(x)$ mit den im Hilfssatz 1 angegebenen Eigenschaften.

Es sei $\tau(x)$ die zu $2\omega(x)$ inverse Funktion; also ist $\tau(x)$ für $0 < x \leqq 2\omega(1)$ definiert, stetig und abnehmend, $\tau(2\omega(1)) = 1$, $\tau(x) \to \infty$ für $x \to 0$. Wir setzen nun

$$f_1(x) = \frac{v(\tau(x))}{\tau^s(x)} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 2\omega(1),$$

$$f_1(x) = c\,x^s \qquad \text{für} \quad x \geqq 2\omega(1) \qquad (c \text{ konstant}).$$

Dann ist $f_1(x)$ für $x > 0$ stetig und positiv; für $x \geqq 2\omega(1)$ ist $f_1(x)$ wachsend. Aber auch für $0 < x \leqq 2\omega(1)$ ist $f_1(x)$ wachsend. Denn es ist, $\tau(x) = y$ gesetzt, für $0 < x \leqq 2\omega(1)$

$$f_1(x) = \frac{v(y)}{y^s} = \frac{v(y)\,y}{y^{s+1}}$$

und $v(y)\,y$ ist nicht wachsend, also ist $\frac{v(y)\,y}{y^{s+1}}$ abnehmend, wenn y wächst, d. h. wenn $x = 2\omega(y)$ abnimmt. Für $x \to 0$, d. h. für $y \to \infty$, ist $v(y)\,y \to 0$, also um so mehr $f_1(x) \to 0$.

Weiter ist $\frac{f_1(x)}{x^s}$ für $x \geqq 2\omega(1)$ nicht wachsend; dasselbe gilt aber auch für $0 < x \leqq 2\omega(1)$, denn dort ist $(\tau(x) = y)$

$$\frac{f_1(x)}{x^s} = \frac{v(y)}{2^s\,\omega^s(y)\,y^s} = \frac{v(y)}{2^s u(y)}.$$

Weiter ist für $x \geqq 1$

$$f_1(2\omega(x))\,x^{s+1} = \frac{v(x)}{x^s}\,x^{s+1} = v(x)\cdot x$$

monoton, und zwar

$$f_1(2\omega(x))\,x^{s+1} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty. \tag{3a}$$

Endlich ist

$$\int_1^\infty f_1(2\,\omega(x))\,x^s\,dx = \int_1^\infty v(x)\,dx$$

divergent; nach Satz 7 ist also

$$L(M_e(\omega(x); s); f_1(x)) = \infty;$$

nach (3), (3a) ist (wegen $t > 0$)

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to 0,$$

also ist um so mehr

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty,$$

w. z. b. w.

Wir wollen nun den Satz 7 noch weiter auf einen einfacheren Satz zurückführen, nämlich auf den folgenden

Satz 8. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt; dazu sei noch*

$$f(2\,\omega(x))\,x^{s+1} \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to \infty; \tag{4}$$

dann ist

$$L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty.$$

Es sei also der Satz 8 wahr; die Voraussetzungen des Satzes 7 (d. h. die Voraussetzungen des Satzes 8) seien erfüllt; dann ist also $L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty$ und wir sollen noch $L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty$ beweisen. Es sei $M_u(\omega(x); s)$ die Menge aller uneigentlichen Systeme aus $M(\omega(x); s)$; wegen

$$L(M(\omega(x); s); f(x)) \leqq L(M_e(\omega(x); s); f(x)) + L(M_u(\omega(x); s); f(x))$$

genügt es, wenn wir

$$L(M_u(\omega(x); s); f(x)) = 0 \tag{5}$$

beweisen.

Für $s = 1$ sind die uneigentlichen Systeme mit rationalen Zahlen identisch, also ist $M_u(\omega(x); s)$ höchstens abzählbar und (5) ist trivial. Es sei also $s > 1$. Wir wählen irgendein System von $s+1$ ganzen Zahlen $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_s$ mit $k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_s^2 > 0$ und bezeichnen mit $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$ die Menge aller Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ aus $M(\omega(x); s)$, welche der Gleichung

$$k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i = 0$$

genügen. Offenbar ist $M_u(\omega(x); s)$ die Vereinigungsmenge der abzählbar vielen Mengen $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$; es genügt daher,

$$L(M(k_0, k_1, \ldots, k_s); f(x)) = 0 \tag{5a}$$

zu beweisen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei etwa $k_s \neq 0$. Es sei

$$t = \frac{s-1}{|k_s|} \operatorname{Max}(|k_1|, |k_2|, \ldots, |k_s|),$$

also $t \geqq 1$. Wenn ein System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ zu $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$ gehört, so läßt dieses System, also um so mehr das System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ die Approximation $\omega(x)$ zu, also gehört $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ zu $M(\omega(x); s-1)$.

Nun ist wegen (4) das Integral

$$\int_1^\infty f(2\omega(x))\, x^{s-1}\, dx$$

konvergent, also ist nach Satz 3

$$L(M(\omega(x); s-1); f(x)) = 0. \tag{6}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon t^{-s}$, $\varrho_1 = \frac{\varrho}{t}$.

Wegen (6) läßt sich ein höchstens abzählbares System $\mathfrak{S}$ von $(s-1)$-dimensionalen Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ finden, deren Kanten $2d_1, 2d_2, \ldots$ sämtlich kleiner als ϱ_1 sind, so daß $\mathfrak{S}$ die Menge $M(\omega(x), s-1)$ überdeckt und $\sum_i f(2d_i) < \varepsilon_1$ ist. Wir bilden nun ein System $\mathfrak{S}'$ von s-dimensionalen Würfeln $W_1', W_2', \ldots$ nach folgender Vorschrift: Es sei $(t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{s-1,i})$ der Mittelpunkt von W_i; dann habe W_i' den Mittelpunkt $(t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{s-1,i}, t_{s,i})$, wo $t_{s,i} = \frac{-1}{k_s}\left(k_0 + \sum_{n=1}^{s-1} k_n t_{n,i}\right)$ und die Kante $2t d_i$ (es ist $2t d_i < t\varrho_1 = \varrho$). Weil $\frac{f(x)}{x^s}$ für $x > 0$ monoton ist und weil $\int_1^\infty 2^s \omega^s(x)\, x^s\, dx$ konvergiert und $\int_1^\infty f(2\omega(x))\, x^s\, dx$ divergiert, so ist notwendig $\frac{f(x)}{x^s} \to \infty$ für $x \to 0$, also $\frac{f(x)}{x^s}$ nicht wachsend; also ist (wegen $t \geqq 1$) $f(tx) \leqq t^s f(x)$ für $x > 0$, also

$$\sum_i f(2t d_i) \leqq t^s \sum_i f(2d_i) < t^s \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Endlich behaupte ich, daß $\mathfrak{S}'$ die Menge $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$ überdeckt. Es sei nämlich $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$; dann ist

$$\theta_s = -\frac{1}{k_s}\left(k_0 + \sum_{n=1}^{s-1} k_n \theta_n\right)$$

und der Punkt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ liegt in $M(\omega(x); s-1)$; also liegt er in einem Würfel W_i aus $\mathfrak{S}$, also ist

$$|\theta_n - t_{n,i}| < d_i \leqq t d_i \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, s-1;$$

daraus folgt aber

$$|\theta_s - t_{s,i}| = \left| \frac{\sum_{n=1}^{s-1} k_n(\theta_n - t_{n,i})}{k_s} \right| < t\, d_i;$$

also liegt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ in W_i', w. z. b. w. Wegen der Willkürlichkeit der positiven Zahlen ϱ und ε ist damit (5a) bewiesen.

§ 4.
Hilfssätze.

Für ganzes $k > 0$ sei $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion, d. h. die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, k-1$, die zu k teilerfremd sind. Wenn $\varphi(k) > \frac{k}{8}$, so heiße die Zahl k „normal".

Hilfssatz 2. *Es gibt eine ganze positive Zahl c_1, so daß für jedes ganze $n \geqq c_1$ sich unter den Zahlen $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ mindestens $\frac{n}{5}$ normale Zahlen befinden.*

Beweis. Bekanntlich ist[13])

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \log n);$$

wegen $\frac{1}{4} < \frac{3}{\pi^2} < \frac{1}{3}$ gibt es also eine ganze Zahl $c_1 > 0$, so daß für jedes ganze $n \geqq c_1$ gilt

$$\frac{1}{4} n^2 < \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) < \frac{1}{3} n^2,$$

also auch

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(k) > \frac{1}{4}(2n)^2 - \frac{1}{3} n^2 = \frac{2}{3} n^2. \tag{7}$$

Wäre nun die Behauptung für ein ganzes $n \geqq c_1$ falsch, so wäre (wegen $\varphi(k) \leqq k$)

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(k) < \frac{n}{5} \cdot 2n + \frac{1}{8} \cdot 2n \cdot n = \frac{13}{20} n^2 < \frac{2}{3} n^2,$$

im Widerspruch zu (7).

Hilfssatz 3. Voraussetzungen. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $F(x)$ sei für $x \geqq 1$ positiv und stetig; $F(x) \cdot x^{s+1}$ sei für $x \geqq 1$ monoton. Weiter sei*

$$F(x) \cdot x^{s+1} \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to \infty$$

(also $F(x) \cdot x^{s+1}$ nicht wachsend für $x \geqq 1$),

$$\sum_{q=1}^{\infty} F(q)\, q^s \quad \textit{divergent.}$$

---

[13]) F. Mertens, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 77 (1874), S. 289–338, insbes. S. 289–291.

Endlich sei

$$\text{entweder } \mathfrak{q} = 1$$
$$\text{oder } \mathfrak{q} \text{ eine Primzahl, } \mathfrak{q} > 32.$$

Behauptung. *Zu jeder ganzen Zahl $\beta > 0$ und zu jedem System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ von s ganzen Zahlen gibt es eine endliche Menge A von untereinander verschiedenen s-gliedrigen Systemen von rationalen Zahlen*

(8) $$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q} \quad {}^{14})$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $$q \geqq \beta \mathfrak{q}; \quad \frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}} \leqq \frac{p_i}{q} < \frac{\alpha_i + 1}{\mathfrak{q}}; \quad (p_i, q) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

2. *Für je zwei verschiedene Systeme*[15]

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}, \qquad \frac{p'_1}{q'}, \frac{p'_2}{q'}, \ldots, \frac{p'_s}{q'}$$

der Menge A gilt mindestens eine von den s Ungleichungen $(i = 1, 2, \ldots, s)$

$$\left| \frac{p_i}{q} - \frac{p'_i}{q'} \right| > \frac{1}{2} F^{1/s}(q) + \frac{1}{2} F^{1/s}(q').$$

3. $$\sum_A F(q) > \lambda \frac{1}{\mathfrak{q}^s},$$

wo (wie auch stets im folgenden)[16]

$$\lambda = \frac{1}{60 \cdot 2^s \cdot 32^{2s}}.$$

(Dabei wird über alle Systeme (8) aus A summiert; wenn also für jedes ganze $q > 0$ die Anzahl derjenigen Systeme (8) aus A, die q im Nenner haben, mit $a(q)$ bezeichnet wird, so ist

$$\sum_A F(q) = \sum_{q=1}^{\infty} a(q) F(q).)$$

---

[14]) Zwei solche Systeme $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$; $\frac{p'_1}{q'}, \ldots, \frac{p'_s}{q'}$ sollen als verschieden gelten, wenn mindestens eine von den s Ungleichungen $\frac{p_i}{q} \neq \frac{p'_i}{q'}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ erfüllt ist.

[15]) Wenn ich in diesem oder im folgenden Paragraphen ein System von s rationalen Zahlen mit $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$ oder mit $\frac{p'_1}{q'}, \ldots, \frac{p'_s}{q'}$ bezeichne, verstehe ich darunter, daß $q > 0$, $(p_i, q) = 1$ bzw. $q' > 0$, $(p'_i, q') = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Es kommen nur solche Systeme vor, die eine solche Darstellung zulassen.

[16]) Der Punkt bedeutet stets das Multiplikationszeichen; $60 \cdot 2^s$ bedeutet also 60 mal 2^s und nicht $\left(\frac{602}{10}\right)^s$.

Beweis. s, $F(x)$, $\mathfrak{q}$, β, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ seien gemäß den Voraussetzungen gegeben; c_1 sei die Konstante aus Hilfssatz 2. Wir wählen eine ganze Zahl b so groß, daß

$$(9) \qquad b > c_1, \quad b \geqq \mathfrak{q}, \quad b \geqq \beta,$$

$$(10) \qquad F(x)\, x^{s+1} < \frac{1}{8 \cdot 32^s} \quad \text{für} \quad x \geqq b\,\mathfrak{q}.$$

Nun bilden wir die Menge B aller Systeme

$$(8) \qquad \frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q},$$

wo

$$(11) \qquad q = \mathfrak{q}\,\bar{q}, \quad \bar{q} \text{ ganz}, \quad \bar{q} \geqq b,$$

$$(12) \qquad \alpha_i \bar{q} \leqq p_i < (\alpha_i + 1)\,\bar{q}; \quad (p_i, q) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Diese Systeme erfüllen die Forderung 1 der Behauptung. Für ein festes $q = \bar{q}\,\mathfrak{q}$ und ein festes i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ist die Anzahl der Zahlen p_i, die den Bedingungen (12) genügen, für $\mathfrak{q} = 1$ gleich $\varphi(\bar{q})$, sonst mindestens gleich $\varphi(\bar{q}) - \frac{\bar{q}}{16}$ $\Bigl($denn die Anzahl der durch $\mathfrak{q}$ teilbaren Zahlen unter $\bar{q}$ konsekutiven ist wegen $\bar{q} \geqq b \geqq \mathfrak{q} > 32$ höchstens $\frac{\bar{q}}{\mathfrak{q}} + 1 \leqq 2\frac{\bar{q}}{\mathfrak{q}} < \frac{\bar{q}}{16}\Bigr)$. Jedenfalls ist also diese Anzahl größer als $\frac{\bar{q}}{16}$, wenn $\bar{q}$ normal ist. Daher ist die Anzahl derjenigen Systeme aus B, die in der Darstellung (8) bei gegebenem $q = \bar{q}\,\mathfrak{q}$ ($\bar{q}$ ganz, $\bar{q} \geqq b$) im Nenner eben diese Zahl q haben, größer als

$$(13) \qquad \frac{\bar{q}^s}{16^s},$$

wenn $\bar{q}$ normal ist.

Wir greifen nun aus B eine Teilmenge C folgendermaßen heraus: Wenn (8) ein System aus B ist (für welches also (11), (12) gilt), so rechnen wir (8) dann und nur dann *nicht* zu C, wenn es in B ein System

$$\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$$

mit $q' < q$ gibt, welches die s Ungleichungen

$$(14) \qquad \left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| \leqq \frac{1}{2} F^{1/s}(q) + \frac{1}{2} F^{1/s}(q') \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

erfüllt. Jede Teilmenge von C erfüllt auch die Forderung 2 der Behauptung; denn wenn

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}; \qquad \frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$$

zwei verschiedene Systeme aus C sind, so ist für $q \neq q'$ die Forderung 2 nach der Definition von C trivialerweise erfüllt (aus Symmetriegründen darf man $q' < q$ annehmen); wenn aber $q = q'$, so ist $p_i \neq p_i'$ für mindestens ein i, also (nach (10))

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| \geqq \frac{1}{q} > \sqrt[s]{8} \cdot 32\, F^{1/s}(q)\, q^{1/s} > \frac{1}{2} F^{1/s}(q) + \frac{1}{2} F^{1/s}(q').$$

Es sei nun t_q bei gegebenem q ($q = \bar{q}\,\mathfrak{q} \geqq b\,\mathfrak{q}$, $\bar{q}$ ganz) die Anzahl derjenigen Systeme (8) mit dem Nenner q, die bei dem Übergang von B zu C weggelassen werden. Wir wählen noch eine Zahl $q' = \bar{q}'\mathfrak{q}$ ($\bar{q}'$ ganz, $b \leqq \bar{q}' < \bar{q}$)[17]) und eine ganze Zahl i ($1 \leqq i \leqq s$) und bezeichnen mit $w(i, q', q)$ die Anzahl derjenigen Zahlen p_i mit $(p_i, q) = 1$, $\alpha_i \bar{q} \leqq p_i < (\alpha_i + 1)\bar{q}$, für welche die i-te Ungleichung (14) durch eine geeignete Zahl p_i' mit $(p_i', q') = 1$ erfüllt wird. Dann ist offenbar

$$(15)\qquad t_q \leqq \sum_{\bar{q}'=b}^{\bar{q}-1} w(1, q', q)\, w(2, q', q) \ldots w(s, q', q)$$

$$\left(\sum_{m}^{m-1} \text{ soll stets Null bedeuten}\right).$$

Aus (14) folgt wegen $q = \bar{q}\,\mathfrak{q}$, $q' = \bar{q}'\mathfrak{q}$, $q' < q$

$$|p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q}| < F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}.$$

Es sei $(\bar{q}, \bar{q}') = d$; der Ausdruck $p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q}$ soll also gleich $a\,d$ sein, wo

$$a \text{ ganz}, \qquad |a| < \frac{F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}}{d}, \qquad a \neq 0$$

(denn $p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q} = 0$, d. h. $\frac{p_i}{\bar{q}} = \frac{p_i'}{\bar{q}'}$ ist wegen $(p_i, \bar{q}) = 1$, $(p_i', \bar{q}') = 1$, $0 < \bar{q}' < \bar{q}$ ausgeschlossen). Dies gibt höchstens

$$2\left[\frac{F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}}{d}\right]$$

Möglichkeiten für a. Soll aber $p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q} = a\,d$ sein, wo a fest gewählt ist, so muß p_i die Kongruenz

$$p_i \frac{\bar{q}'}{d} \equiv a \left(\operatorname{mod} \frac{\bar{q}}{d}\right)$$

erfüllen; und diese Kongruenz hat im Intervall $\alpha_i \bar{q} \leqq p_i < (\alpha_i + 1)\bar{q}$ genau d Lösungen. Also ist

$$w(i, q', q) \leqq 2d\left[\frac{F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}}{d}\right] \leqq 2F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q};$$

also ist nach (15)

$$(16)\qquad t_q \leqq 2^s \bar{q}^s \sum_{\bar{q}'=b}^{\bar{q}-1} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}'^s \mathfrak{q}^s.$$

---

[17]) Für $\bar{q} = b$ ist offenbar $t_q = 0$.

Weil $F(x)x^s$ für $x \geqq 1$ abnimmt, so ist

$$F(\bar{q}'\mathfrak{q})\,\bar{q}'^s\mathfrak{q}^s \geqq \frac{1}{\mathfrak{q}} \sum_{q=\bar{q}'\mathfrak{q}}^{\bar{q}'\mathfrak{q}+\mathfrak{q}-1} F(q)\,q^s;$$

also ist die Reihe

$$\sum_{\bar{q}'=1}^{\infty} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\,\bar{q}'^s\mathfrak{q}^s$$

divergent. Wir können daher eine ganze Zahl $b' \geqq b$ wählen, so daß

$$\sum_{\bar{q}'=b}^{b'} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\,\bar{q}'^s\mathfrak{q}^s \geqq \frac{1}{2\cdot 32^s} > \sum_{\bar{q}'=b}^{b'-1} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\,\bar{q}'^s\mathfrak{q}^s. \tag{17}$$

Wegen (10) ist $b' \geqq 4b$, denn

$$\sum_{\bar{q}'=b}^{4b-1} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\,\bar{q}'^s\mathfrak{q}^s < \frac{1}{8\cdot 32^s} \sum_{\bar{q}'=b}^{4b-1} \frac{1}{\bar{q}'\mathfrak{q}} < \frac{1}{2\cdot 32^s}.$$

Wir wählen nun für A die Menge aller derjenigen Systeme (8) aus C, für welche $b\mathfrak{q} \leqq q \leqq b'\mathfrak{q}$. Die Anzahl $a(q)$ aller Systeme (8) aus A, die im Nenner die Zahl q haben ($q = \bar{q}\mathfrak{q}$, $\bar{q}$ ganz, $b \leqq \bar{q} \leqq b'$), ist nach (13), (16), (17) größer als

$$\frac{\bar{q}^s}{16^s} - 2^s\bar{q}^s \sum_{\bar{q}'=b}^{\bar{q}-1} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\,\bar{q}'^s\mathfrak{q}^s > \frac{\bar{q}^s}{2\cdot 16^s},$$

falls $\bar{q}$ normal ist. Daher ist

$$\sum_{A} F(q) = \sum_{q=1}^{\infty} a(q)\,F(q) \geqq \frac{1}{2\cdot 16^s} \sum_{\bar{q}=b}^{b'}{}' F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s;$$

dabei soll der Strich in der letzten Summe (und auch im folgenden) andeuten, daß nur über normale $\bar{q}$ summiert wird.

Wir wählen ein ganzes r so, daß $2^r b - 1 \leqq b' < 2^{r+1}b - 1$; es ist $r \geqq 2$. Für ganzes $t \geqq 0$ ist nach Hilfssatz 2 (da $b > c_1$)

$$\sum_{\bar{q}=2^t b}^{2^{t+1}b-1}{}' F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s \geqq F(2^{t+1}b\mathfrak{q})(2^t b)^s \frac{1}{5} 2^t b \geqq \frac{1}{5\cdot 2^{2s+1}} \sum_{\bar{q}=2^{t+1}b}^{2^{t+2}b-1} F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s.$$

Also ist (man beachte (17) und (10))

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cdot 16^s} \sum_{\bar{q}=b}^{b'}{}' F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s &\geqq \frac{1}{5\cdot 2^{2s+2}\cdot 16^s} \sum_{\bar{q}=2b}^{2^{r+1}b-1} F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s \\
&\geqq \frac{1}{5\cdot 2^{2s+2}\cdot 16^s}\,\frac{1}{\mathfrak{q}^s}\Big(\sum_{\bar{q}=b}^{b'} F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s\mathfrak{q}^s - \sum_{\bar{q}=b}^{2b-1} F(\bar{q}\mathfrak{q})\,\bar{q}^s\mathfrak{q}^s\Big) \\
&\geqq \frac{1}{5\cdot 4\cdot 2^{2s}\cdot 16^s}\cdot\frac{1}{\mathfrak{q}^s}\Big(\frac{1}{2\cdot 32^s} - \frac{1}{8\cdot 32^s}\Big) > \frac{1}{60\cdot 2^s\cdot 32^{2s}\cdot\mathfrak{q}^s}, \quad \text{w. z. b. w.}
\end{aligned}$$

§ 5.

Beweis des Satzes 8.

In diesem Beweise liegt die Hauptschwierigkeit. Wir schreiben den Satz 8 noch einmal ausführlich auf:

Satz 8. Voraussetzungen. *Es sei* $s \geqq 1$, s *ganz*; $\omega(x)$ *sei stetig und positiv für* $x \geqq 1$; $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ *sei monoton für* $x \geqq 1$;

$$\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$$

sei konvergent (*also ist* $\omega^s(x)\, x^{s+1} \to 0$ *für* $x \to \infty$, $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ *nicht wachsend*, $\omega(x)$ *abnehmend für* $x \geqq 1$).

Weiter sei $f(x)$ *positiv, stetig und wachsend für* $x > 0$; $f(x) \to 0$ *für* $x \to 0$; $\frac{f(x)}{x^s}$ *monoton für* $x > 0$, $f(2\,\omega(x))\, x^{s+1}$ *monoton für* $x \geqq 1$; $f(2\,\omega(x))\, x^{s+1} \to 0$ *für* $x \to \infty$ (*also ist* $f(2\,\omega(x))\, x^{s+1}$ *nicht wachsend für* $x \geqq 1$); *endlich sei*

$$\int_1^\infty f(2\,\omega(x))\, x^s\, dx \tag{18}$$

divergent $\left(\textit{also } \frac{f(x)}{x^s} \to \infty \textit{ für } x \to 0,\ \frac{f(x)}{x^s} \textit{ nicht wachsend für } x > 0\right)$.

Behauptung. $L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty$.

Wir bemerken zunächst, daß aus der Monotonie von $f(2\,\omega(x))\, x^s$ und der Divergenz von (18) bekanntlich auch die Divergenz der Reihe

$$\sum_{q=1}^\infty f(2\,\omega(q))\, q^s \tag{19}$$

folgt.

Wir werden im folgenden zeigen: Wenn die Voraussetzungen des Satzes 8 erfüllt sind, so läßt sich zu jedem $\eta > 0$ eine perfekte Teilmenge

$$N = N(\eta,\, \omega(x),\, s,\, f(x))$$

von $M(\omega(x), s)$ konstruieren, so daß

$$L(N; f(x)) \geqq \eta .$$

Damit wird offenbar der Satz 8 bewiesen sein.

Es seien also s, $\omega(x)$, $f(x)$ gemäß den Voraussetzungen des Satzes 8 gegeben und es sei η eine positive Zahl. Wir deuten die Menge $M(\omega(x); s)$ als eine Punktmenge in einem kartesischen Raume R_s (wobei jedem reellen System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ der Punkt mit den Koordinaten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ entsprechen soll). Unter einem Würfel werden wir in diesem Paragraphen stets einen Würfel in R_s verstehen, dessen Kanten mit den Koordinatenachsen parallel sind, und zwar, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, einen offenen Würfel. Wir werden oft von Punkten P sprechen, deren Koordinaten sich in der Form

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q} \qquad (q > 0,\ (p_i, q) = 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, s)$$

schreiben lassen; wir werden dann mit $J(P)$ den Würfel mit dem Mittelpunkt P und der Kantenlänge $2\,\omega(q)$ bezeichnen; das Zeichen $\omega(P)$ soll die Zahl $\omega(q)$ bedeuten (ein Mißverständnis ist nicht zu befürchten). Die abgeschlossene Hülle einer Menge, z. B. der Mengen $J(P)$, W, V_n, soll durch einen Querschnitt gekennzeichnet werden, also z. B. $\bar{J}(P)$, $\overline{W}$, $\overline{V}_n$.

Wir führen für den Rest dieses Paragraphen folgende Bezeichnungen ein:

$$(20) \qquad \lambda = \frac{1}{60 \cdot 2^s \cdot 32^{2s}}; \qquad \tau = \frac{\lambda}{2 \cdot 16^s}, \qquad \mu = \frac{\lambda \tau}{16^s};$$

also

$$(21) \qquad \mu^2 < \frac{1}{2 \cdot 32^s}.$$

Wir konstruieren nun die gesuchte Menge $N = N(\eta, \omega(x), s, f(x))$ folgendermaßen.

Wir wählen erstens eine ganze Zahl $\beta_0 > 1$ so groß, daß für $x \geqq \beta_0$ folgendes gilt:

$$\text{I.} \qquad \omega(x) < \frac{1}{x};$$

$$\text{II.} \qquad \frac{\mu^{1/s} \lambda^{1/s}}{\eta^{1/s}} f^{1/s}(2\,\omega(x)) > 4\,\omega(x);$$

$$\text{III.} \qquad f(2\,\omega(x)) < \frac{\eta}{\mu}.$$

IV. Es gibt mindestens eine Primzahl $p > 32$, so daß $\frac{1}{\omega(x)} < p < \frac{2}{\omega(x)}$.

Nun wenden wir den Hilfssatz 3 mit

$$F(x) = \frac{\mu \lambda}{\eta} f(2\,\omega(x)), \quad \mathfrak{q} = 1, \quad \beta = \beta_0, \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

an und finden eine endliche Menge A von Punkten mit den Koordinaten

$$(22) \qquad \frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q},$$

wo folgendes gilt:

1. $q \geqq \beta_0$; $0 \leqq \frac{p_i}{q} < 1$; $(p_i, q) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$; wegen $q > 1$ ist dann sogar $0 < \frac{p_i}{q} < 1$.

2. Für je zwei verschiedene Punkte $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$; $\frac{p_1'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$ aus A ist mindestens eine von den s Ungleichungen

$$(23) \quad \left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| > \frac{1}{2} \frac{\mu^{1/s} \lambda^{1/s}}{\eta^{1/s}} f^{1/s}(2\,\omega(q)) + \frac{1}{2} \frac{\mu^{1/s} \lambda^{1/s}}{\eta^{1/s}} f^{1/s}(2\,\omega(q')) \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

erfüllt; wegen II folgt aus (23)

(24) $$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| > 2\,\omega(q) + 2\,\omega(q').$$

3. $$\frac{\mu\lambda}{\eta}\sum_A f(2\,\omega(q)) > \lambda,$$

also

(25) $$\sum_A f(2\,\omega(q)) > \frac{\eta}{\mu}.$$

Die Punkte der Menge A wollen wir „Punkte erster Ordnung" nennen; die Würfel $J(P)$, wo P ein beliebiger Punkt erster Ordnung ist, wollen wir „Würfel erster Ordnung" nennen. Aus III und (25) folgt, daß es mehr als einen Punkt erster Ordnung gibt. Aus I folgt, daß die *abgeschlossenen* Würfel erster Ordnung im Einheitswürfel E ($0 < \theta_i < 1$ für $i = 1, 2, \ldots, s$) liegen, und aus (24) folgt, daß sie paarweise punktfremd sind.

Nun definieren wir Punkte und Würfel n-ter Ordnung ($n > 1$ ganz) durch Induktion. Es sei also n ganz, $n \geqq 1$; für jedes ganze k mit $1 \leqq k \leqq n$ seien die Punkte und Würfel k-ter Ordnung definiert; ihre Anzahl sei endlich; und zwar sei jeder Punkt k-ter Ordnung ein Punkt mit rationalen Koordinaten, die sich in der Form $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$ schreiben lassen, wo $0 < p_i < q$, $(p_i, q) = 1$, $q \geqq \beta_0$. Die Würfel k-ter Ordnung seien genau alle Würfel $J(P)$, wo P ein beliebiger Punkt k-ter Ordnung ist. Für jedes feste k ($1 \leqq k \leqq n$) sollen alle *abgeschlossenen* Würfel k-ter Ordnung in E liegen und paarweise punktfremd sein.

Wir definieren nun Punkte und Würfel $(n+1)$-ter Ordnung wie folgt: Es sei

$$\bar{P} = \left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{q}}, \frac{\bar{p}_2}{\bar{q}}, \ldots, \frac{\bar{p}_s}{\bar{q}}\right) \qquad (0 < \bar{p}_i < \bar{q},\ (\bar{p}_i, \bar{q}) = 1)$$

ein beliebiger Punkt n-ter Ordnung. Wir wählen (was wegen $\bar{q} \geqq \beta_0$ und wegen IV möglich ist) eine Primzahl $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\bar{P}) > 32$ so, daß $\frac{\omega(\bar{P})}{2} < \frac{1}{\mathfrak{q}} < \omega(\bar{P})$. Dann gibt es (da $J(\bar{P})$ die Kantenlänge $2\,\omega(\bar{P})$ hat) sicher s ganze Zahlen $\alpha_i = \alpha_i(\bar{P})$ ($\alpha_i > 0$, $\alpha_i + 1 < \mathfrak{q}$ für $i = 1, 2, \ldots, s$) so, daß der durch die Ungleichungen $\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}} \leqq \theta_i \leqq \frac{\alpha_i + 1}{\mathfrak{q}}$ definierte abgeschlossene Würfel in $J(\bar{P})$ liegt. Wir wählen nun eine ganze Zahl $\beta = \beta(\bar{P})$ so, daß

V. $$\beta \geqq n + 1, \quad \beta \geqq \beta_0,$$

VI. $$\lambda^2 \mu^2 \frac{\omega^s(\bar{P})}{f(2\,\omega(\bar{P}))} > 4^s \frac{\omega^s(x)}{f(2\,\omega(x))} \quad \text{für} \quad x \geqq \beta\,\mathfrak{q},$$

VII. $$\omega(x) < \frac{1}{\mathfrak{q}\,x} \quad \text{für} \quad x \geqq \beta\,\mathfrak{q},$$

VIII. $$f(2\,\omega(x)) < \frac{1}{2^s \lambda \mu^2} f(2\,\omega(\bar{P})) \quad \text{für} \quad x \geqq \beta\,\mathfrak{q}.$$

Dann wenden wir den Hilfssatz 3 mit

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}(\bar{P}),\quad \alpha_i=\alpha_i(\bar{P}),\quad \beta=\beta(\bar{P}),\quad F(x)=\mu^2\lambda^2 f(2\,\omega(x))\frac{\omega^s(\bar{P})}{f(2\,\omega(\bar{P}))}$$

an und finden: Es gibt eine endliche Menge $A(\bar{P})$ von Punkten

$$P=\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\ldots,\frac{p_s}{q}\right) \tag{26}$$

mit folgenden Eigenschaften:

4. $q \geqq \beta\,\mathfrak{q}$; $\quad \frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}} \leqq \frac{p_i}{q} < \frac{\alpha_i+1}{\mathfrak{q}}$; $\quad (p_i, q)=1$ für $i=1,2,\ldots,s$;

wegen $q>\mathfrak{q}$ ist sogar $\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}} < \frac{p_i}{q} < \frac{\alpha_i+1}{\mathfrak{q}}$; also

$$\left|\frac{p_i}{q}-\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}}\right| \geqq \frac{1}{q\,\mathfrak{q}},\qquad \left|\frac{p_i}{q}-\frac{\alpha_i+1}{\mathfrak{q}}\right| \geqq \frac{1}{q\,\mathfrak{q}},$$

so daß wegen VII der abgeschlossene Würfel $\bar{J}(P)$ ganz in $J(\bar{P})$ liegt.

5. Für je zwei verschiedene Punkte

$$\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\ldots,\frac{p_s}{q}\right);\quad \left(\frac{p_1'}{q'},\frac{p_2'}{q'},\ldots,\frac{p_s'}{q'}\right)$$

aus $A(\bar{P})$ ist mindestens eine von den s Ungleichungen ($i=1,2,\ldots,s$)

$$\left|\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\right| > \frac{1}{2}\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\frac{\omega(\bar{P})}{f^{1/s}(2\,\omega(\bar{P}))}f^{1/s}(2\,\omega(q)) + \frac{1}{2}\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\frac{\omega(\bar{P})}{f^{1/s}(2\,\omega(\bar{P}))}f^{1/s}(2\,\omega(q')) \tag{27}$$

erfüllt; wegen VI folgt daraus

$$\left|\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\right| > 2\,\omega(q)+2\,\omega(q'). \tag{28}$$

6. $$\mu^2\lambda^2\frac{\omega^s(\bar{P})}{f(2\,\omega(\bar{P}))}\sum_{A(\bar{P})} f(2\,\omega(q)) > \frac{\lambda}{\mathfrak{q}^s},$$

also, da $\frac{1}{\mathfrak{q}} > \frac{\omega(\bar{P})}{2}$,

$$\sum_{A(\bar{P})} f(2\,\omega(q)) > \frac{1}{2^s\lambda\mu^2} f(2\,\omega(\bar{P})). \tag{29}$$

Diese Konstruktion führen wir für alle Würfel $J(\bar{P})$ n-ter Ordnung durch; die Vereinigungsmenge A_{n+1} aller zugehörigen Mengen $A(\bar{P})$ ist eine endliche Punktmenge; die Punkte, die zu A_{n+1} gehören, mögen „Punkte $(n+1)$-ter Ordnung" heißen. Die Würfel $J(P)$, wo P ein beliebiger Punkt $(n+1)$-ter Ordnung ist, mögen „Würfel $(n+1)$-ter Ordnung" heißen. Die Punkte $(n+1)$-ter Ordnung sind in der Tat endlich viele Punkte $\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\ldots,\frac{p_s}{q}\right)$, wo $0<p_i<q$, $(p_i,q)=1$ ($i=1,2,\ldots,s$), $q\geqq\beta_0$. Jeder

abgeschlossene Würfel $(n+1)$-ter Ordnung liegt in einem offenen Würfel n-ter Ordnung; je zwei abgeschlossene Würfel $(n+1)$-ter Ordnung sind daher und nach (28) punktfremd und alle abgeschlossenen Würfel $(n+1)$-ter Ordnung liegen in E.

Durch unsere Konstruktionsvorschrift sind also in der Tat Punkte und Würfel aller Ordnungen $n = 1, 2, \ldots$ definiert. Wegen (29) und VIII liegen in jedem Würfel n-ter Ordnung mindestens zwei Würfel $(n+1)$-ter Ordnung. Die Vereinigungsmenge aller Würfel n-ter Ordnung heiße V_n; offenbar ist $V_{n+1} < V_n$, ja sogar $\overline{V}_{n+1} < V_n$. Also ist

$$N = V_1 V_2 V_3 \ldots = \overline{V}_1 \overline{V}_2 \overline{V}_3 \ldots \quad (\text{also } N < E)$$

eine nichtleere abgeschlossene Menge. N ist sogar perfekt; denn wegen V und 4. ist die Kante eines Würfels n-ter Ordnung höchstens gleich $2\,\omega(n)$ und jeder Würfel n-ter Ordnung enthält mindestens zwei Würfel $(n+1)$-ter Ordnung, also mindestens zwei Punkte von N.

N ist weiter eine Teilmenge von $M(\omega(x); s)$; denn jeder Punkt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ von N liegt für jedes n in einem Würfel n-ter Ordnung $J(P_n)$; wenn also

$$P_n = \left(\frac{p_{1,n}}{q_n}, \frac{p_{2,n}}{q_n}, \ldots, \frac{p_{s,n}}{q_n}\right) \qquad (0 < p_{i,n} < q_n,\ (p_{i,n}, q_n) = 1),$$

so ist

$$q_n \geqq n, \qquad \left|\theta_i - \frac{p_{i,n}}{q_n}\right| < \omega(q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

N ist eben die gesuchte Menge; wir werden in der Tat zeigen, daß

$$L(N; f(x)) \geqq \eta.$$

Wir führen zunächst folgende Benennung ein: Wenn ein offener Würfel W Teilmenge eines Würfels n-ter Ordnung ist, aber mit mehr als einem Würfel $(n+1)$-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat, so heiße W ein „Würfel n-ter Art“. Durch diese Definition ist also nicht für jeden Würfel eine Art definiert; solche Würfel, welchen nach dieser Definition eine Art zukommt, wollen wir „normale Würfel“ nennen. Es ist klar, daß für einen normalen Würfel ihre Art eindeutig bestimmt ist: denn wenn ein Würfel W Teilmenge eines Würfels n-ter Ordnung ist, so kann W nicht mit zwei Würfeln l-ter Ordnung mit $l \leqq n$ gemeinsame Punkte haben; und ebenso, wenn W mit mindestens zwei Würfeln $(n+1)$-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat, so ist W sicher nicht Teilmenge eines Würfels l-ter Ordnung wo $l \geqq n+1$.

Wenn ein System $\mathfrak{U}$ von endlich oder abzählbar vielen (offenen) Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ mit den Kantenlängen $d_1, d_2, \ldots$ vorliegt, so werde

$$\Lambda(\mathfrak{U}) = \sum_i f(d_i)$$

gesetzt. Nach der Definition ist bei gegebenem $\varrho > 0$ die Zahl $L_\varrho(N; f(x))$ gleich der unteren Grenze der Zahlen $\Lambda(\mathfrak{U})$ für alle höchstens abzählbaren Systeme $\mathfrak{U}$, welche N überdecken und aus Würfeln bestehen, deren Kanten sämtlich kleiner als ϱ sind.

Wir wählen nun im Rest dieses Paragraphen $\varrho = \varrho_0$ fest, und zwar setzen wir $\varrho_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{s}}$, wo σ das Minimum des Abstandes von je zweien abgeschlossenen Würfeln erster Ordnung ist; σ ist in der Tat positiv, da die endlich vielen abgeschlossenen Würfel erster Ordnung paarweise punktfremd sind.

Es sei nun $\mathfrak{U}$ ein höchstens abzählbares Überdeckungssystem von N, welches aus Würfeln besteht, deren Kanten sämtlich kleiner als ϱ_0 sind. Da N beschränkt und abgeschlossen ist, so läßt sich nach dem Borelschen Überdeckungssatz aus $\mathfrak{U}$ ein endliches Teilsystem $\mathfrak{U}'$ von Würfeln herausgreifen, welches ebenfalls N überdeckt. Wenn wir noch aus $\mathfrak{U}'$ alle Würfel weglassen, welche überhaupt keinen Punkt von N enthalten, bekommen wir ein Teilsystem $\mathfrak{U}''$, welches wieder N überdeckt, und offenbar ist

$$\Lambda(\mathfrak{U}'') \leqq \Lambda(\mathfrak{U}') \leqq \Lambda(\mathfrak{U}).$$

Es sei W ein Würfel aus $\mathfrak{U}''$; jeder Punkt aus N liegt in einem Würfel erster Ordnung; W enthält mindestens einen Punkt von N; also hat W mit mindestens einem Würfel erster Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt; weil aber die Diagonale von W kleiner als $\varrho_0\sqrt{s} = \sigma$ ist, so hat W mit *genau* einem Würfel erster Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt. Weil aber der offene Würfel W einen Punkt von N enthält, weil jeder Punkt von N für jedes n in einem Würfel n-ter Ordnung liegt, weil endlich die Kantenlänge der Würfel n-ter Ordnung für $n \to \infty$ gegen Null strebt (nämlich höchstens $2\,\omega(n)$ ist), so gibt es ein n, so daß W einen *ganzen* Würfel n-ter Ordnung, also mindestens zwei Würfel $(n+1)$-ter Ordnung enthält. Es gibt also eine *kleinste* ganze Zahl $l \geqq 0$, so daß W mit mindestens zwei Würfeln $(l+1)$-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat; und zwar ist $l \geqq 1$ (offenbar hat dann W für jedes $n \leqq l$ mit genau einem Würfel n-ter Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt). Es sei J derjenige Würfel l-ter Ordnung, mit welchem W einen nichtleeren Durchschnitt hat; wir können dann

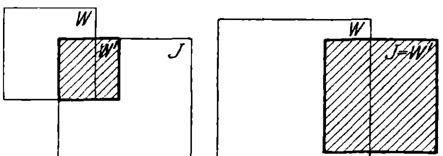

Fig. 1. Wenn zwei Würfel W und J einen nichtleeren Durchschnitt haben, so läßt sich ein Würfel W' (schraffiert) finden, dessen Kante nicht länger als diejenige von W ist, so daß $WJ \subset W' \subset J$. In dem Fall $s = 2$ sind neben den gezeichneten Fällen noch zwei typische Fälle möglich, nämlich $W \subset J$ (dann setze man $W' = W$) und $J \subset W$ (dann setze man $W' = J$).

offenbar (vgl. die Fig. 1, wo $s = 2$) einen Würfel W' finden, dessen Kante nicht größer als diejenige von W ist und für welchen

$$WJ \subset W' \subset J.$$

W' ist dann offenbar ein Würfel l-ter Art (er ist nämlich in J enthalten und wegen $WJ \subset W'J$ hat er mit mindestens zwei Würfeln $(l+1)$-ter Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt), also ein normaler Würfel. Wenn wir nun in $\mathfrak{U}''$ jeden Würfel W nach dieser Vorschrift durch den zugehörigen Würfel W' ersetzen, so bekommen wir ein System $\mathfrak{B}$ von endlich vielen normalen Würfeln, welches ebenfalls N überdeckt (denn es ist $NW = NWJ \subset NW'J = NW'$); und da die Kante von jedem Würfel W' höchstens gleich der Kante des entsprechenden Würfels W ist, so ist

$$\Lambda(\mathfrak{B}) \leqq \Lambda(\mathfrak{U}'') \leqq \Lambda(\mathfrak{U}).$$

Jedes System von endlich vielen normalen Würfeln, welches N überdeckt, wollen wir ein „normales Überdeckungssystem" nennen. Und wir sehen:

$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ ist mindestens gleich[18]) *der unteren Grenze von $\Lambda(\mathfrak{B})$, wenn $\mathfrak{B}$ alle normalen Überdeckungssysteme durchläuft.*

Wir wollen nun eine Abschätzung für die Kantenlänge eines Würfels l-ter Art angeben; dies geschieht durch den folgenden

Hilfssatz 4. *Es sei W ein Würfel l-ter Art; W ist also in einem Würfel l-ter Ordnung $J(P)$ enthalten, hat aber mit mehr als einem Würfel $(l+1)$-ter Ordnung — sagen wir mit den Würfeln $J(P_1), J(P_2), \ldots, J(P_t)$ $(t \geqq 2)$ — einen nichtleeren Durchschnitt.*

Behauptung. *Die Kantenlänge von W ist mindestens gleich*

$$\frac{1}{4}\,\frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\,\omega(P))}\,\mu^{2/s}\,\lambda^{2/s}\sqrt[s]{\sum_{n=1}^{t} f(2\,\omega(P_n))}.$$

Beweis. Wir konstruieren um jeden Punkt P_n $(n = 1, 2, \ldots, t)$ als Mittelpunkt einen Würfel $K(P_n)$ mit der Halbkante

$$k_n = \frac{1}{2}\,\frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))}\,\mu^{2/s}\,\lambda^{2/s}\,f^{1/s}(2\,\omega(P_n)).$$

Nach (27) (denn die Punkte $(l+1)$-ter Ordnung $P_1, P_2, \ldots, P_t$ gehören zu $A(P)$) sind je zwei Würfel $K(P_n)$ punktfremd. Nach VI ist

$$k_n > 2\,\omega(P_n).$$

[18]) Wir müssen sagen „*mindestens* gleich", da nach der Definition eines normalen Überdeckungssystems vielleicht auch solche normale Überdeckungssysteme existieren können, in welchen Würfel von der Kantenlänge $\geqq \varrho_0$ auftreten.

Weil also bei jedem n $(n = 1, 2, \ldots, t)$ der Würfel W mindestens einen Punkt im Würfel $J(P_n)$ (Mittelpunkt P_n, Halbkante $\omega(P_n)$) und mindestens einen Punkt außerhalb des Würfels $K(P_n)$ (Mittelpunkt P_n, Halbkante $k_n > 2\omega(P_n)$) hat, so enthält der Durchschnitt $W \cdot K(P_n)$ sicher einen Würfel von der Kante $\frac{1}{2} k_n$ (vgl. die Fig. 2, wo W schraffiert ist). Da je zwei Würfel $K(P_n)$ punktfremd sind, so ist das Volumen von W mindestens gleich

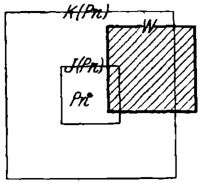

Fig. 2.

$$\frac{1}{2^s} \sum_{n=1}^{t} k_n^s,$$

also die Kante von W mindestens gleich

$$\frac{1}{2} \sqrt[s]{\sum_{n=1}^{t} k_n^s}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir wollen noch einen neuen Begriff „Überschlagungssystem" einführen, und zwar auf folgende Weise. Es sei J ein Würfel $(n+1)$-ter Ordnung, W ein Würfel n-ter Art; wir sagen, daß J von W *„getroffen"* wird, wenn

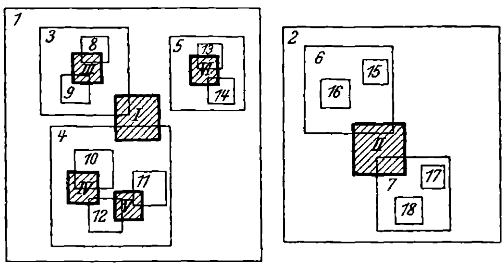

Fig. 3. Schematische Darstellung eines Überschlagungssystems (für $s = 2$). Die Quadrate 1 bis 18 sollen Würfel erster bis dritter Ordnung sein; und zwar 1 und 2 von erster, 3 bis 7 von zweiter, 8 bis 18 von dritter Ordnung; Würfel höherer Ordnung sind nicht gezeichnet. Die (schraffierten) Quadrate I bis VI sind normale Würfel, und zwar I und II von erster Art, die übrigen von zweiter Art.

$$\text{Der Würfel} \left\{\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array}\right\} \text{streift alle Punkte von } N\text{, die in} \left\{\begin{array}{l} \text{3 und 4 (oder in 8, 9, 10, 11, 12)} \\ \text{6 und 7 (oder in 15, 16, 17, 18)} \\ \text{8 und 9} \\ \text{10 und 12} \\ \text{11 und 12} \\ \text{13 und 14} \end{array}\right\}$$

liegen. Die Würfel I bis VI bilden also ein Überschlagungssystem, welches genau zwei irreduzible Teilsysteme (nämlich I, II, VI und II, III, IV, V, VI) enthält.

$J \cdot W$ nicht leer ist. Es sei nun P ein Punkt von N, W ein Würfel n-ter Art. P liegt in genau einem Würfel J $(n+1)$-ter Ordnung; wir sagen, daß P von W *„gestreift"* wird, wenn J von W getroffen wird (d. h. wenn

$J \cdot W$ nicht leer ist). Wenn insbesondere P in W liegt, so wird offenbar P von W gestreift. Ist $\mathfrak{S}$ ein System von normalen Würfeln und P ein Punkt von N, so sagen wir, daß P von $\mathfrak{S}$ gestreift wird, wenn P von mindestens einem Würfel aus $\mathfrak{S}$ gestreift wird.

Ein System von endlich vielen normalen Würfeln, von welchem jeder Punkt von N gestreift wird, heiße ein Überschlagungssystem. Offenbar ist jedes normale Überdeckungssystem zugleich auch ein Überschlagungssystem. Ein Überschlagungssystem, dessen kein echtes Teilsystem Überschlagungssystem ist, heiße ein irreduzibles Überschlagungssystem. Jedes Überschlagungssystem enthält offenbar mindestens ein Teilsystem, welches ein irreduzibles Überschlagungssystem ist[19]). Und es gilt offenbar folgendes:

$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ *ist mindestens gleich der unteren Grenze von* $\Lambda(\mathfrak{S})$, *wo* $\mathfrak{S}$ *alle Überschlagungssysteme* (*oder, was auf dasselbe hinausläuft, alle irreduziblen Überschlagungssysteme*) *durchläuft.*

Wenn in einem Überschlagungssystem $\mathfrak{S}$ mindestens ein Würfel l-ter Art, aber kein Würfel von höherer als l-ter Art vorkommt, so heiße $\mathfrak{S}$ „von l-ter Art". Es sei $\mathfrak{S}$ ein Überschlagungssystem l-ter Art; für $i = 1, 2, \ldots, l$ seien

$$d_{1,i},\, d_{2,i},\, \ldots,\, d_{n_i,i} \qquad (n_i \geqq 0)$$

die Kanten der Würfel i-ter Art aus $\mathfrak{S}$. Wir ordnen dann dem System $\mathfrak{S}$ die Zahl (τ ist in (20) eingeführt worden)

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{n_i} f(d_{k,i}) + \tau \sum_{k=1}^{n_l} f(d_{k,l})$$

zu (für $l = 1$ ist also

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) = \tau \sum_{k=1}^{n_1} f(d_{k,1})).$$

$\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ unterscheidet sich also von $\Lambda(\mathfrak{S})$ bloß dadurch, daß die Beiträge, die von den Würfeln der höchsten vorkommenden Art herrühren, nur mit dem Gewicht τ gerechnet werden. Wegen $\tau < 1$ ist also

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) < \Lambda(\mathfrak{S})$$

und wir haben also den

Hilfssatz 5. $L_{\varrho_0}(N; f(x))$ *ist mindestens gleich der unteren Grenze der Zahlen* $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$, *wo* $\mathfrak{S}$ *alle irreduziblen Überschlagungssysteme durchläuft.*

Den Kernpunkt des Beweises des Satzes 8 bildet nun folgender

Hilfssatz 6. *Es sei* $l > 1$; $\mathfrak{S}$ *sei ein irreduzibles Überschlagungssystem* l*-ter Art; dann gibt es ein irreduzibles Überschlagungssystem* $\mathfrak{S}''$ *von niedrigerer als* l*-ter Art, so daß*

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}'') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}).$$

---

[19]) Diese Verhältnisse sind auf der Fig. 3 für $s = 2$ schematisch dargestellt.

Beweis. Es genügt, wenn wir zeigen, daß es zu $\mathfrak{S}$ ein Überschlagungssystem $\mathfrak{S}'$ von $(l-1)$-ter Art gibt, so daß

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}).$$

Denn $\mathfrak{S}'$ enthält sicher ein irreduzibles Überschlagungssystem $\mathfrak{S}''$, welches dann sicher von höchstens $(l-1)$-ter Art ist. Nun enthält $\mathfrak{S}''$ keinen Würfel, der nicht in $\mathfrak{S}'$ enthalten wäre; wenn $\mathfrak{S}''$ vielleicht von niedrigerer als $(l-1)$-ter Art ist, sagen wir von k-ter Art, so kommen die Beiträge, die von den Würfeln k-ter Art herrühren, in $\mathsf{M}(\mathfrak{S}')$ mit dem Gewicht Eins, dagegen aber in $\mathsf{M}(\mathfrak{S}'')$ nur mit dem Gewicht $\tau < 1$ vor. Also ist

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}'') \leqq \mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}).$$

Wir wollen also die Existenz von $\mathfrak{S}'$ nachweisen. In $\mathfrak{S}$ kommen wirklich Würfel l-ter Art vor. Jeder Würfel l-ter Art ist in einem Würfel l-ter Ordnung, also auch in einem (eindeutig bestimmten) Würfel $(l-1)$-ter Ordnung enthalten. Es seien

$$J(P_1), J(P_2), \ldots, J(P_t) \qquad (t \geqq 1) \tag{30}$$

genau diejenigen Würfel $(l-1)$-ter Ordnung, die mindestens einen Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ enthalten; wir bilden aus $\mathfrak{S}$ ein neues System $\mathfrak{S}'$ von endlich vielen normalen Würfeln, indem wir aus $\mathfrak{S}$ alle Würfel $(l-1)$-ter und l-ter Art, die in den Würfeln (30) enthalten sind, weglassen und zu dem so entstehenden System von Würfeln die Würfel (30) hinzufügen. Jeder Punkt von N, der von einem weggelassenen Würfel gestreift wurde, liegt notwendig in einem von den Würfeln (30), also wird dieser Punkt auch von $\mathfrak{S}'$ gestreift, also ist $\mathfrak{S}'$ auch ein Überschlagungssystem[20]), und zwar offenbar von $(l-1)$-ter Art (denn jeder Würfel $(l-1)$-ter Ordnung enthält mindestens zwei Würfel l-ter Ordnung, also ist jeder Würfel $(l-1)$-ter Ordnung zugleich auch von $(l-1)$-ter Art); es bleibt also noch übrig,

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S})$$

zu beweisen.

Zu diesem Zweck betrachten wir einen Würfel $J(P_n)$ $(1 \leqq n \leqq t)$ und einen Punkt P von N, der in $J(P_n)$ liegt. P wird also von einem Würfel W aus $\mathfrak{S}$ gestreift. Ich behaupte: W ist entweder von $(l-1)$-ter oder von l-ter Art. Denn gesetzt, W sei von m-ter Art, wo $m < l-1$; es sei dann J derjenige Würfel $(m+1)$-ter Ordnung, in welchem P liegt (also $J(P_n) \subset J$, da $m+1 \leqq l-1$); dann würde also J von W getroffen, d. h. alle Punkte aus $N \cdot J$, also um so mehr alle Punkte aus $N \cdot J(P_n)$, würden von W gestreift. Wenn wir also aus $\mathfrak{S}$ diejenigen Würfel l-ter Art weglassen, die in $J(P_n)$ liegen (es gibt in $\mathfrak{S}$ mindestens einen solchen

[20]) Man könnte zeigen, daß bereits $\mathfrak{S}'$ irreduzibel ist, wir brauchen es aber nicht.

Würfel), so würden wir wieder ein Überschlagungssystem bekommen, also wäre $\mathfrak{S}$ nicht irreduzibel, gegen die Voraussetzung.

Also wird jeder Punkt von $N \cdot J(P_n)$ von einem Würfel $(l-1)$-ter oder l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ gestreift; dieser Würfel liegt dann offenbar in $J(P_n)$. Wir wollen nun den Beitrag derjenigen Würfel $(l-1)$-ter und l-ter Art aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P_n)$ liegen, zur Summe $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ abschätzen.

Wir bemerken zunächst: Da $\frac{f(x)}{x^s}$ für $x > 0$ nicht wächst, so ist für

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_c > 0 \qquad (c \geqq 1)$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_c) f(\sqrt[s]{x_i}) \geqq x_i f(\sqrt[s]{x_1 + x_2 + \ldots + x_c}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, c),$$

also (durch Addition)

$$\sum_{i=1}^{c} f(\sqrt[s]{x_i}) \geqq f(\sqrt[s]{x_1 + x_2 + \ldots + x_c}); \tag{31}$$

weiter ist für $x > 0,\ 0 < \xi < 1$

$$f(\xi x) \geqq \xi^s f(x). \tag{31a}$$

Es seien

$$U_1, U_2, \ldots, U_a \tag{32}$$

diejenigen Punkte l-ter Ordnung, die in $J(P_n)$ enthalten sind;

$$W_1, W_2, \ldots, W_m \tag{33}$$

seien diejenigen Würfel $(l-1)$-ter Art aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P_n)$ liegen (es kann auch $m = 0$ sein). Einige von den Würfeln $J(U_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, a)$ werden von den Würfeln (33) getroffen; die Numerierung in (32) sei so gewählt, daß genau die Würfel $J(U_i)$ mit $1 \leqq i \leqq \bar{a}$ von den Würfeln (33) getroffen werden, die übrigen aber nicht (für $m = 0$ ist $\bar{a} = 0$ zu setzen; es ist $\bar{a} \leqq a$ — man könnte sogar $\bar{a} < a$ zeigen, wir brauchen es aber nicht). Nach (29) ist

$$\sum_{i=1}^{a} f(2\omega(U_i)) > \frac{1}{2^s \lambda \mu^2} f(2\omega(P_n)).$$

Es sind also zwei Fälle möglich, die wir gesondert betrachten.

1. Fall:

$$\sum_{i=1}^{\bar{a}} f(2\omega(U_i)) > \frac{1}{2 \cdot 2^s \lambda \mu^2} f(2\omega(P_n)); \tag{34}$$

2. Fall: (34) ist nicht wahr, also

$$\sum_{i=\bar{a}+1}^{a} f(2\omega(U_i)) > \frac{1}{2 \cdot 2^s \lambda \mu^2} f(2\omega(P_n)). \tag{35}$$

Wir betrachten nun im ersten Falle den Beitrag, den ein Würfel W_k $(1 \leqq k \leqq m)$ zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ liefert; dieser Beitrag ist gleich $f(d_k)$, wo d_k die

Kante von W_k ist. Nach dem Hilfssatz 4 ist

$$d_k \geqq \frac{1}{4} \frac{\omega(P_n)}{f^{1/s}(2\omega(P_n))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(U_i))},$$

wo $\sum\limits_{(k)}$ bedeutet, daß über diejenigen i summiert wird, für welche $J(U_i)$ von W_k getroffen wird. Da aber jedes $J(U_i)$ mit $1 \leqq i \leqq \bar{a}$ mindestens von einem W_k getroffen wird, so ist wegen (31), (34), (31a)

$$\sum_{k=1}^{m} f(d_k) \geqq \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(P_n)}{f^{1/s}(2\omega(P_n))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(U_i))}\right)$$
$$\geqq f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(P_n)}{f^{1/s}(2\omega(P_n))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\bar{a}} f(2\omega(U_i))}\right)$$
$$> f\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^{1/s}} \cdot \omega(P_n) \cdot \lambda^{1/s}\right) \geqq \frac{\lambda}{2 \cdot 16^s} f(2\omega(P_n)) = \tau f(2\omega(P_n)).$$

Betrachten wir nun den zweiten Fall. Es sei $J(U_i)$ ein von den W_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ nicht getroffener Würfel l-ter Ordnung aus $J(P_n)$, also $\bar{a} < i \leqq a$. Jeder Punkt von $N \cdot J(U_i)$ muß dann also von einem Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ gestreift werden; also muß jeder Würfel $(l+1)$-ter Ordnung, der in $J(U_i)$ liegt, von einem Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ — der dann auch in $J(U_i)$ liegen muß — getroffen werden. Es seien

$$X_1, X_2, \ldots, X_v$$

die in $J(U_i)$ liegenden Punkte $(l+1)$-ter Ordnung,

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_w$$

die in $J(U_i)$ liegenden Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$. Die Kante d_k von Y_k $(1 \leqq k \leqq w)$ genügt nach dem Hilfssatz 4 der Ungleichung

$$d_k \geqq \frac{1}{4} \frac{\omega(U_i)}{f^{1/s}(2\omega(U_i))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(X_t))},$$

wo $\sum\limits_{(k)}$ bedeutet, daß über diejenigen Werte von t $(1 \leqq t \leqq v)$ summiert wird, für welche $J(X_t)$ von Y_k getroffen wird. Da jeder Würfel $J(X_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, v)$ von mindestens einem Y_k getroffen wird, so ist nach (31), (29), (31a)

$$\tau \sum_{k=1}^{w} f(d_k) \geqq \tau \sum_{k=1}^{w} f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(U_i)}{f^{1/s}(2\omega(U_i))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(X_t))}\right)$$
$$\geqq \tau f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(U_i)}{f^{1/s}(2\omega(U_i))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{t=1}^{v} f(2\omega(X_t))}\right)$$
$$> \tau f\left(\frac{1}{8} \lambda^{1/s} \omega(U_i)\right) \geqq \frac{\lambda \tau}{16^s} f(2\omega(U_i)).$$

Die Zahl $\tau\sum_{k=1}^{w} f(d_k)$ ist eben der Beitrag, den die in $J(U_i)$ enthaltenen Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ liefern. Der Beitrag, den alle in den Würfeln $J(U_i)$ $(\bar{a} < i \leqq a)$ enthaltenen Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ liefern, ist also nach (35), (21) größer als

$$\frac{\lambda\tau}{16^s}\sum_{i=\bar{a}+1}^{a} f(2\omega(U_i)) > \frac{\tau}{2\cdot 32^s\mu^2} f(2\omega(P_n)) > \tau f(2\omega(P_n)).$$

In beiden Fällen ist also der Beitrag der Würfel $(l-1)$-ter und l-ter Art aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P_n)$ liegen, zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ größer als $\tau f(2\omega(P_n))$. Dieser Beitrag geht bei dem Übergang von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{S}'$ verloren und wird durch den von $J(P_n)$ herrührenden Beitrag $\tau f(2\omega(P_n))$ ersetzt (denn $\mathfrak{S}'$ ist von $(l-1)$-ter Art); also ist in der Tat

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nach den Hilfssätzen 5 und 6 ist also folgendes klar:

$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ ist mindestens gleich der unteren Grenze von $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$, wo $\mathfrak{S}$ alle Überschlagungssysteme e r s t e r Art durchläuft.

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein Überschlagungssystem erster Art, in welchem also nur Würfel erster Art vorkommen. Es sei $J(P)$ ein Würfel erster Ordnung; $W_1, W_2, \ldots, W_m$ seien die Würfel (erster Art) aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P)$ liegen. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ seien die Punkte zweiter Ordnung, die in $J(P)$ liegen. Die Kante d_k von W_k genügt nach dem Hilfssatz 4 der Ungleichung

$$d_k \geqq \frac{1}{4}\,\frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))}\,\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(P_i))},$$

wo $\sum_{(k)}$ bedeutet, daß über diejenigen i summiert wird, für welche $J(P_i)$ von W_k getroffen wird. Da jedes $J(P_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ von mindestens einem W_k getroffen wird, so ist nach (31), (29), (31a)

$$\begin{aligned}
\tau\sum_{k=1}^{m} f(d_k) &\geqq \tau\sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{1}{4}\,\frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))}\,\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(P_i))}\right)\\
&\geqq \tau f\left(\frac{1}{4}\,\frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))}\,\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{n} f(2\omega(P_i))}\right)\\
&> \tau f\left(\frac{1}{8}\,\omega(P)\,\lambda^{1/s}\right) \geqq \frac{\lambda\tau}{16^s} f(2\omega(P)).
\end{aligned}$$

Daher ist (die folgende Summe ist über alle Punkte P erster Ordnung zu erstrecken) wegen (25), (20)

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) > \frac{\lambda\tau}{16^s}\sum_{P} f(2\omega(P)) > \frac{\eta\lambda\tau}{16^s\mu} = \eta.$$

Also ist

$$L_{\varrho_0}(N; f(x)) \geqq \eta;$$

und, da $L_\varrho(N; f(x))$ mit abnehmendem ϱ nicht abnimmt, um so mehr

$$L(N; f(x)) = \lim_{\varrho=0} L_\varrho(N; f(x)) \geqq \eta.$$

Damit ist aber der Satz 8 bewiesen.

§ 6.

Beweis des Satzes 5.

Die Voraussetzungen des Satzes 5 seien erfüllt; da $\frac{\lambda(x)}{x}$ für $x \geqq 1$ nicht abnimmt, so ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda(x)}{x}\right) \geqq 0,$$

also

$$\frac{d\lambda(x)}{dx} \geqq \frac{\lambda(x)}{x} \geqq 1 \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

Die zu $\lambda(x)$ inverse Funktion $\mu(x)$ ist also für $x \geqq \lambda(1)$ definiert, stetig und wachsend und besitzt für $x \geqq \lambda(1)$ eine stetige und beschränkte Ableitung[21]); es ist $\frac{\mu(x)}{x} \to 0$ für $x \to \infty$. Wir setzen nun im Hilfssatz 1

$$u(x) = 2^s \omega^s(x) x^s \quad \text{für} \quad x \geqq 1,$$

$$l(x) = \frac{\mu^s(x)}{x^s} \frac{d\mu(x)}{dx} \quad \text{für} \quad x \geqq \lambda(1),$$

$$l(x) = l(\lambda(1)) \quad \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq \lambda(1)$$

und finden eine Funktion $v(x)$, die die im Hilfssatz 1 angegebenen Eigenschaften besitzt. Es sei $\chi(x)$ die zu $2\omega(x)$ inverse Funktion, die also für $0 < x \leqq 2\omega(1)$ definiert, stetig und abnehmend ist; und zwar ist $\chi(x) \to \infty$ für $x \to 0$, $\chi(2\omega(1)) = 1$.

Wir setzen

$$f(x) = \frac{v(\chi(x))}{\chi^s(x)} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 2\omega(1),$$

$$f(x) = \bar{c}\, x^s \quad \text{für} \quad x \geqq 2\omega(1),$$

wo $\bar{c}$ von x unabhängig ist. Also ist $f(x)$ stetig und positiv für $x > 0$. Für $x \geqq 2\omega(1)$ ist $f(x)$ wachsend, $\frac{f(x)}{x^s}$ nicht wachsend; dasselbe gilt aber für $0 < x \leqq 2\omega(1)$; denn für diese Werte von x ist, $\chi(x) = y$ gesetzt (also $x = 2\omega(y)$),

$$f(x) = \frac{v(y)\, y}{y^{s+1}}$$

mit wachsendem y abnehmend, also mit wachsendem x wachsend; und

---

[21]) Für $x = \lambda(1)$ meine ich die rechtsseitige Ableitung.

zwar ist $f(x) = \frac{v(y)\,y}{y^{s+1}} \to 0$ für $y \to \infty$, d. h. für $x \to 0$; ebenso ist

$$\frac{f(x)}{x^s} = \frac{v(y)}{2^s \omega^s(y)\, y^s} = \frac{v(y)}{u(y)}$$

nicht abnehmend bei wachsendem y, d. h. nicht wachsend bei wachsendem x. Weiter ist

$$f(2\,\omega(x))\, x^{s+1} = \frac{v(x)}{x^s} \cdot x^{s+1} = v(x) \cdot x$$

monoton für $x \geqq 1$ und

$$\int_1^\infty f(2\,\omega(x))\, x^s\, dx = \int_1^\infty v(x)\, dx$$

divergent; also ist nach Satz 4

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty. \tag{36}$$

Weiter ist $\omega(\lambda(x))$ für $x \geqq 1$ stetig, positiv und abnehmend; $\omega(\lambda(x)) \to 0$ für $x \to \infty$; und

$$\int_1^\infty f(2\,\omega(\lambda(x)))\, x^s\, dx = \int_{\lambda(1)}^\infty f(2\,\omega(y))\, \mu^s(y)\, \frac{d\mu(y)}{dy}\, dy$$

$$= \int_{\lambda(1)}^\infty \frac{v(y)}{y^s}\, \mu^s(y)\, \frac{d\mu(y)}{dy}\, dy = \int_{\lambda(1)}^\infty v(y)\, l(y)\, dy$$

ist konvergent; also ist nach Satz 3

$$L\big(M_e(\omega(\lambda(x)); s); f(x)\big) = 0. \tag{37}$$

Nach (36), (37) muß es also Punkte geben, die zwar in $M_e(\omega(x); s)$, nicht aber in $M_e(\omega(\lambda(x)); s)$ liegen, w. z. b. w.

§ 7.

Bemerkungen zu Satz 3 und 4.

Wir wollen uns jetzt etwas näher über die Tragweite der Sätze 3 und 4 orientieren. Der wesentliche Inhalt dieser Sätze läßt sich etwa folgendermaßen zusammenfassen[22]):

Satz 9. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ sei für $x \geqq 1$ positiv, stetig und abnehmend; $f(x)$ sei für $x > 0$ positiv, stetig und wachsend; $\omega(x) \to 0$ für $x \to \infty$, $f(x) \to 0$ für $x \to 0$.*

Weiter sei

a) *$\omega^s(x)\, x^{s+1}$ und $f(2\,\omega(x))\, x^{s+1}$ monoton für $x \geqq 1$, $\frac{f(x)}{x^s}$ monoton für $x > 0$;*

b) *$\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$ konvergent.*

[22]) Der Satz 3 ist sogar etwas allgemeiner als der entsprechende Teil des Satzes 9.

Dann ist entweder

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = 0$$

oder

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty,$$

je nachdem das Integral

$$\int_1^\infty f(2\omega(x))\, x^s\, dx$$

konvergiert oder divergiert.

Die Funktion $\omega(x)$ gibt das Approximationsgesetz an, welches wir untersuchen; die Funktion $f(x)$ gibt das Gesetz an, nach welchem das Maß einer Menge gemessen wird. Es ist daher ganz natürlich, wenn wir uns auf solche Funktionen $\omega(x)$ und $f(x)$ beschränken, deren Verlauf gewissermaßen regelmäßig ist, für welche also z. B. die Funktionen $\omega^s(x)\, x^{s+1}$, $f(2\omega(x))\, x^{s+1}$ für große x, $\frac{f(x)}{x^s}$ für kleine $x > 0$ monoton sind (für allzu wilde Funktionen $f(x)$, $\omega(x)$ wäre übrigens der Satz 9 sicher falsch). Wenn wir noch bedenken, daß $L(M_e(\omega(x); s); f(x))$ nur von dem Verhalten von $\omega(x)$ für *große* x und von dem Verhalten von $f(x)$ für *kleine* $x > 0$ abhängt, so sehen wir, daß die Bedingungen a) der Natur des Problems ganz angemessen sind. Dagegen aber bedeutet die Bedingung b) eine wesentliche Einschränkung; z. B. über die Approximation

$$\omega(x) = x^{-1-\frac{1}{s}} \log^{-\frac{1}{s}}(1 + x)$$

besagt der Satz 9 gar nichts. Worin liegt das?

Es sei A eine beschränkte Punktmenge in R_s; es sei $L(A) > 0$; wir haben schon bemerkt, daß $L(A) = L(A; x^s)$. Es sei nun $f(x)$ für $x > 0$ positiv, stetig und wachsend, $f(x) \to 0$ für $x \to 0$, $f(x)\, x^{-s}$ monoton für $x > 0$. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{x^s} = \alpha \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \infty)$$

und offenbar gilt:

Wenn $\alpha = 0$, so ist $L(A; f(x)) = 0$;

wenn $0 < \alpha < \infty$, so ist $L(A; f(x)) = \alpha L(A)$;

wenn $\alpha = \infty$, so ist $L(A; f(x)) = \infty$.

Sobald wir also $L(A)$ kennen, können wir sofort auch $L(A; f(x))$ bestimmen: der feinere Maßbegriff $L(A; f(x))$ gibt uns also im Falle $L(A) > 0$ gegenüber dem äußeren Lebesgueschen Maß $L(A)$ nichts wesentlich Neues. Wenn nun $\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$ divergiert, so ist nach dem Khintchineschen Satz $L(M_e(\omega(x); s)) = 1$, also hat es keinen Sinn, die Menge $M_e(\omega(x); s)$ (d. h. also die Menge derjenigen eigentlichen Systeme des Würfels $0 \leqq \theta_i < 1$, welche die Approximation $\omega(x)$ zulassen) mit Hilfe des Hausdorffschen Maßbegriffes zu untersuchen. Man müßte hier die Frage anders stellen: im Falle der Divergenz von $\int\limits_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$ hat die Menge derjenigen Systeme, welche die Approximation $\omega(x)$ *nicht* zulassen, das Lebesguesche Maß Null, also könnte man versuchen, *diese* Menge mit Hilfe des Hausdorffschen Maßbegriffes zu untersuchen. Ich habe bereits in dieser Richtung im Spezialfall $s = 1$ verschiedenes bewiesen[23]). Der Beweis beruhte aber wesentlich auf der Theorie der Kettenbrüche, so daß eine direkte Übertragung auf den (interessantesten) Fall $s > 1$ aussichtslos erscheint.

§ 8.

Bemerkungen zu Satz 5; Satz 6.

Der Satz 5 ist sehr scharf für solche Funktionen $\omega(x)$, die für $x \to \infty$ nicht allzu stark abnehmen; wenn z. B.

$$s = 2, \qquad \omega_1(x) = \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}, \qquad \omega_2(x) = \frac{1}{x^{\frac{7}{4}} \log 3x},$$

so besagt der Satz 5: es gibt eigentliche Systeme (θ_1, θ_2), welche zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen; es genügt nämlich, im Satz 5

$$s = 2, \quad \omega(x) = \omega_1(x), \quad \lambda(x) = x \log^{\frac{4}{7}} 3x \quad (\text{also } \omega(\lambda(x)) = \omega_2(x))$$

zu setzen.

Für allzu stark abnehmende Funktionen $\omega(x)$ ist aber der Satz 5 ziemlich schwach; wenn wir z. B. für $s = 2$, $\omega_1(x) = e^{-x}$, $\omega_2(x) = e^{-2x}$ fragen, ob es eigentliche Systeme (θ_1, θ_2) gibt, die zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen, so gibt uns der Satz 5 keine Antwort; denn wenn wir versuchen, $\omega(x) = \omega_1(x)$, $\omega(\lambda(x)) = \omega_2(x)$ zu setzen, so kommt $\lambda(x) = 2x$ heraus und die Voraussetzungen des Satzes 5 sind nicht erfüllt[24]). Für solche allzu stark abnehmende Funktionen $\omega(x)$, nämlich für solche Funktionen, die „wesentlich kleiner" als x^{-2} sind, kann man aber den Satz 5 durch einen viel schärferen Satz ersetzen, nämlich durch den folgenden

Satz 6. *Es sei $\omega(x)$ für $x \geqq 1$ positiv und abnehmend, $\omega(x) = o(x^{-2})$ (für $x \to \infty$). Dann gibt es für jedes ganze $s \geqq 1$ ein eigentliches System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, welches zwar die Approximation $\omega(x)$, aber keine Approximation $c\,\omega(x)$ $(0 < c < 1$, c von x unabhängig) zuläßt.*

---

[23]) Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne **36**, 2. Heft (1928/29).

[24]) Eine nähere Diskussion der Tragweite des Satzes 5 kann dem Leser überlassen werden.

Beweis. Wir beweisen zuerst den Satz 6 für $s=1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega(x)<\frac{1}{2x^2}$. Jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch[25])

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots$$

definiert eine irrationale Zahl θ $(0<\theta<1)$. Es sei $\frac{p_n}{q_n}$ sein n-ter Näherungsbruch in irreduzibler Form; dann ist

$$q_{n+1}=b_{n+1}q_n+q_{n-1}, \qquad \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}<\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Wir wählen die ganzen positiven Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ sukzessive so, daß

$$b_{n+1}\omega(q_n)q_n^2>1, \qquad \lim_{n=\infty} b_{n+1}\omega(q_n)q_n^2=1$$

(das geht, weil $\omega(q_n)q_n^2\to 0$); dann ist $b_{n+1}\to\infty$, also $q_{n+1}>\frac{1}{q_n\,\omega(q_n)}$, $q_{n+1}+q_n\sim\frac{1}{q_n\,\omega(q_n)}$ und daher

$$\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\omega(q_n), \qquad \left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|\sim\omega(q_n).$$

Wäre nun für unendlich viele Paare von ganzen Zahlen a_n, c_n $(n=1,2,\ldots; c_n\to\infty)$

$$\left|\theta-\frac{a_n}{c_n}\right|<c\,\omega(c_n), \tag{38}$$

wo $0<c<1$ und c von n nicht abhängt, so wäre wegen $\omega(c_n)<\frac{1}{2c_n^2}$ sicher $\frac{a_n}{c_n}$ einem Näherungsbruch von θ gleich, also (l_n ganz) $a_n=l_n p_m$, $c_n=l_n q_m$, wo offenbar $m\to\infty$ für $n\to\infty$; also wäre (weil $\omega(x)$ abnimmt)

$$\left|\theta-\frac{a_n}{c_n}\right|\sim\omega(q_m)\geqq\omega(c_n),$$

im Widerspruch gegen (38).

Für $s=1$ ist also der Satz 6 wahr; wir wollen ihn also durch Induktion beweisen. Es sei also $s\geqq 1$; $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ sei ein eigentliches System, welches zwar die Approximation $\omega(x)$, aber keine Approximation $c\,\omega(x)$ $(0<c<1$, c von x unabhängig) zuläßt. Es genügt zu zeigen: es gibt eine reelle Zahl θ_{s+1}, so daß $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\theta_{s+1})$ ein eigentliches System ist, welches die Approximation $\omega(x)$ zuläßt[26]).

---

[25]) Wegen der benutzten Sätze über Kettenbrüche vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin, 1913), insbes. S. 37—55.

[26]) Denn, daß dieses System keine Approximation $c\,\omega(x)$ $(0<c<1$, c unabhängig von $x)$ zuläßt, ist klar, da dasselbe bereits vom System $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ gilt.

Dies beweisen wir wie folgt. Es seien $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ganze Zahlen, $k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_s^2 > 0$. Wenn x alle ganzen Zahlen durchläuft, so hat der Ausdruck $\left|x + \sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i\right|$ ein *positives* Minimum

$$a(k_1, k_2, \ldots, k_s).$$

(Denn $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ist ein eigentliches System.) Es sei für ganzes $q > 0$

$$A(q) = \min_{\substack{|k_i| \leqq q^2 \\ \sum_{i=1}^{s} k_i^2 > 0}} a(k_1, k_2, \ldots, k_s).$$

Es gibt eine Folge von Systemen von ganzen Zahlen

$$q_n, p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{s,n} \qquad (n = 1, 2, \ldots; q_n \to \infty),$$

so daß

$$(39) \qquad \left|\theta_i - \frac{p_{i,n}}{q_n}\right| < \omega(q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Wir wählen nun zwei Folgen von ganzen Zahlen

$$n_1, n_2, \ldots; p_{s+1, n_1}, p_{s+1, n_2}, \ldots \qquad (0 < n_1 < n_2 < \ldots)$$

folgendermaßen: $n_1 = 1$; $p_{s+1, n_1} = 0$; wenn

$$n_1, n_2, \ldots, n_k; p_{s+1, n_1}, p_{s+1, n_2}, \ldots, p_{s+1, n_k}$$

bereits gewählt sind, so wählen wir n_{k+1} und $p_{s+1, n_{k+1}}$ folgendermaßen: $n_{k+1} > n_k$ sei so groß, daß

$$q_{n_{k+1}} > \max\left(\frac{3^k}{\omega(q_{n_1})}, \frac{3^{k-1}}{\omega(q_{n_2})}, \ldots, \frac{3}{\omega(q_{n_k})}\right),$$

$$q_{n_{k+1}} > \max\left(\frac{3^k q_{n_1}^2}{A(q_{n_1})}, \frac{3^{k-1} q_{n_2}^2}{A(q_{n_2})}, \ldots, \frac{3 q_{n_k}^2}{A(q_{n_k})}\right).$$

Dann können und wollen wir die ganze Zahl $p_{s+1, n_{k+1}}$ so wählen, daß für $i = 1, 2, \ldots, k$ gilt

$$(40) \qquad 0 < \frac{p_{s+1, n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}} - \frac{p_{s+1, n_k}}{q_{n_k}} < \min\left(\frac{\omega(q_{n_i})}{3^{k+1-i}}, \frac{A(q_{n_i})}{3^{k+1-i} q_{n_i}^2}\right).$$

Aus (40) folgt dann für $k' > k$

$$(41) \qquad 0 < \frac{p_{s+1, n_{k'}}}{q_{n_{k'}}} - \frac{p_{s+1, n_k}}{q_{n_k}} < \omega(q_{n_k}) \sum_{i=1}^{k'-k} \frac{1}{3^i},$$

$$(42) \qquad 0 < \frac{p_{s+1, n_{k'}}}{q_{n_{k'}}} - \frac{p_{s+1, n_k}}{q_{n_k}} < \frac{A(q_{n_k})}{q_{n_k}^2} \sum_{i=1}^{k'-k} \frac{1}{3^i}.$$

Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{k=\infty} \frac{p_{s+1, n_k}}{q_{n_k}} = \theta_{s+1}$$

und es ist nach (41)

$$(43)\qquad 0 < \theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,\,n_k}}{q_{n_k}} \leqq \frac{\omega(q_{n_k})}{2};$$

aus (39), (43) folgt, daß das System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \theta_{s+1})$ die Approximation $\omega(x)$ zuläßt; aus (43) folgt wegen $\omega(x) = o(x^{-1})$, daß θ_{s+1} irrational ist.

Wir wollen nun voraussetzen, daß eine Gleichung

$$(44)\qquad k_0 + \sum_{i=1}^{s+1} k_i \theta_i = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{s+1} k_i^2 > 0\right)$$

besteht, wo k_i $(i = 0, 1, \ldots, s+1)$ ganze Zahlen sind. Dann ist $k_{s+1} \neq 0$ (denn $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ist ein eigentliches System), $\sum_{i=1}^{s} k_i^2 > 0$ (denn θ_{s+1} ist irrational). Wir wählen nun ein k so, daß

$$q_{n_k}^2 \omega(q_{n_k}) < \frac{1}{s+1}, \qquad q_{n_k} > \max(|k_1|, |k_2|, \ldots, |k_{s+1}|).$$

Dann folgt aus (44)

$$k_0 q_{n_k} + \sum_{i=1}^{s+1} k_i p_{i,\,n_k} + \sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,\,n_k}) = 0;$$

also ist einerseits

$$\sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,\,n_k}) \text{ ganz,}$$

andererseits

$$\left|\sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,\,n_k})\right| < (s+1)\, q_{n_k}^2 \omega(q_{n_k}) < 1,$$

also

$$\sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,\,n_k}) = 0.$$

Daraus folgt aber

$$k_{s+1} q_{n_k} \left(\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,\,n_k}}{q_{n_k}}\right) = \sum_{i=1}^{s} k_i p_{i,\,n_k} - \sum_{i=1}^{s} k_i q_{n_k} \theta_i,$$

also $\left(\text{weil } |k_i| < q_{n_k},\ \sum_{i=1}^{s} k_i^2 > 0\right)$

$$\left| k_{s+1} q_{n_k} \left(\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,\,n_k}}{q_{n_k}}\right)\right| \geqq A(q_{n_k});$$

also

$$\left|\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,\,n_k}}{q_{n_k}}\right| \geqq \frac{A(q_{n_k})}{q_{n_k}^2}.$$

Dies ist aber im Widerspruch gegen (42); denn aus (42) folgt für $k' \to \infty$

$$\left|\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,\,n_k}}{q_{n_k}}\right| \leqq \frac{A(q_{n_k})}{2\, q_{n_k}^2}.$$

Also enthält die Annahme, daß eine Gleichung von der Form (44) besteht, einen Widerspruch, also ist $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s+1})$ ein eigentliches System, womit Satz 6 bewiesen ist.

Man sieht, daß der Kern des Satzes 6 in dem eindimensionalen Fall $(s = 1)$ liegt: man realisiert zunächst die gesuchten Approximationsverhältnisse für $s = 1$ durch eine Zahl θ_1 und fügt dann weitere Zahlen $\theta_2, \theta_3, \ldots$ hinzu, wobei man nur dafür zu sorgen hat, daß die bei θ_1 erreichte Approximation durch diese Erweiterung nicht gestört wird. Es ist klar, daß jeder Verschärfung oder jedem Analogon des Satzes 6 für $s = 1$ (und man kennt viele solche interessante Verschärfungen und Analoga) eine Verschärfung oder ein Analogon des Satzes 6 für beliebiges s entspricht; ich gehe aber nicht näher darauf ein. Der Beweis des Satzes 6 hat gegenüber demjenigen des Satzes 5 den Vorzug, daß er einen konstruktiven Charakter besitzt, wogegen der Satz 5 ein reiner Existenzsatz ist; auch ist der Beweis des Satzes 6 unvergleichlich einfacher. Dagegen ist aber die Beweismethode des Satzes 6 nur bei denjenigen Approximationsverhältnissen anwendbar, die für $s = 1$ realisierbar sind (roh gesagt also dann, wenn die behandelte Approximation „besser" als $\frac{1}{x^2}$ ist); in den übrigen Fällen (und diesen Fällen kommt von unserem Standpunkt aus gewiß das größte Interesse zu, denn eben hier äußern sich die dem Fall $s > 1$ eigenen Verhältnisse) steht uns nur der Satz 5 zur Verfügung.

Potštejn in Böhmen, den 13. Juni 1930.

(Eingegangen am 17. Juni 1930.)