Vojtěch Jarník

Über das Riemannsche Integral

Věstník Král. čes. spol. nauk. 1929, No. 1, 14 p

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500456

1.

Über das Riemannsche Integral.

Von VOJTĚCH JARNÍK.

Vorgelegt den 17. Feber 1929.

§ 1. Einleitung.

Wir bezeichnen im Folgenden, wenn $a < b$, mit (a, b) das offene Intervall $a < x < b$, mit $< a, b >$ das abgeschlossene Intervall $a \leqq x \leqq b$, mit $(a, b>$ bzw. $<a, b)$ die halboffenen Integralle $a < x \leqq b$ bzw. $a \leqq x < b$.[1])

Es sei nun $f(x)$ eine in $<a, b>$ definierte und beschränkte Funktion, Dann wollen wir folgende Bezeichnungen benutzen: $m(f(x); a, b)$ sei die untere Grenze von $f(x)$ in $< a, b >$. Wenn

(1) $$n \geqq 1, \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

so sei

(2) $$s(f(x); x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} m(f(x); x_{i-1}, x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Wenn für zwei in $<a, b>$ beschränkte Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und für jedes n, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit (1) gilt $s(f(x); x_0, x_1, \ldots, x_n) = s(g(x); x_0, x_1, \ldots, x_n)$, wollen wir schreiben

(3) $$S(f(x)) = S(g(x)) \text{ in } <a, b>.$$

Wenn $f(x) = g(x)$ für alle x aus $<a, b>$, so schreiben wir

(4) $$f(x) \equiv g(x) \text{ in } <a, b>.$$

Wenn eine in $<a, b>$ beschränkte Funktion $f(x)$ gegeben ist, so sind auch alle Zahlen (2) mit der Bedingung (1) dadurch definiert; die obere Grenze der Zahlen (2) ist das untere Integral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

[1]) Es handelt sich stets nur um endliche Intervalle und um reelle beschränkte Funktionen.

Wir fragen nun, ob und inwieweit auch umgekehrt die Funktion $f(x)$ durch die Angabe sämtlicher Zahlen (2) in $<a, b>$ definiert ist, d. h. ob oder unter welchen weiteren Bedingungen (4) aus (3) folgt.

Erstens ist es klar, dass aus (3) nicht ohne weiteres auf (4) geschlossen werden darf. Denn es sei z. B. $f(x)$ stetig in $<a, b>$ und es entstehe $g(x)$ aus $f(x)$ dadurch, dass man $f(x)$ für alle rationalen x irgendwie vergrössert. Dann gilt offenbar (3), nicht aber (4).

Dieser Umstand führt uns dazu, eine besondere Klasse von Funktionen durch die folgende Definition einzuführen:

Definition 1. *Eine Funktion $f(x)$ heisse „vom Typus A in $<a, b>$“, wenn folgendes gilt:*

1. *$f(x)$ ist definiert und beschränkt in $<a, b>$;*
2. *$f(a) \leqq \liminf\limits_{x=a+0} f(x)$; $f(b) \leqq \liminf\limits_{x=b-0} f(x)$;*
3. *$f(\xi_0) \leqq \max\left(\liminf\limits_{x=\xi_0-0} f(x), \liminf\limits_{x=\xi_0+0} f(x)\right)$*

für $a < \xi_0 < b$.

Und es gilt folgender

Satz 1. *Zu jeder in $<a, b>$ beschränkten Funktion $f(x)$ gibt es eine Funktion $g(x)$ vom Typus A in $<a, b>$, so dass*

$$S(f(x)) = S(g(x)) \text{ in } <a, b>. \tag{3}$$

Nach diesem Satz kann es sich also bei unserem Problem nur darum handeln, ob für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die vom Typus A in $<a, b>$ sind, (3) aus (4) folgt. Und wir werden beweisen:

Satz 2. *Wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$ vom Typus A in $<a, b>$ sind und wenn*

$$S(f_1(x)) = S(f_2(x)) \text{ in } <a, b>,$$

so ist entweder

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ in } <a, b>,$$

oder

$$f_1(x) = A(x - a) + B, \quad f_2(x) = A(b - x) + B,$$

wo A, B Konstanten sind, $A \neq 0$.

Satz 3. *$S(A(x-a)+B) = S(A(b-x)+B)$ in $\langle a,b \rangle$.*

Diese beiden Sätze geben eine vollständige Antwort auf unsere Frage: Eine Funktion $f(x)$ vom Typus A in $\langle a,b \rangle$ ist durch die Angabe sämtlicher Zahlen (2) mit der Bedingung (1) eindeutig gegeben; bis auf den Fall, dass $f(x)$ eine in $\langle a,b \rangle$ nicht konstante lineare Funktion ist; in diesem Falle gibt es noch genau eine Funktion $g(x)$ vom Typus A in $\langle a,b \rangle$, die dieselben Zahlen (2) wie $f(x)$ besitzt; und zwar ist $g(x)$ auch linear in $\langle a,b \rangle$ und

$$f(a) = g(b), \; f(b) = g(a).$$

§ 2. Beweis des Satzes 1.

Es sei $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ definiert und beschränkt. Wir definieren $g(x)$ in $\langle a, b \rangle$ folgendermassen:

$$1)\quad g(a) = \min\left(f(a),\ \liminf_{x=a+0} f(x)\right)$$

$$2)\quad g(b) = \min\left(f(b),\ \liminf_{x=b-0} f(x)\right)$$

$$3)\quad g(\xi_0) = \min\left(f(\xi_0),\ \max\left(\liminf_{x=\xi_0-0} f(x),\ \liminf_{x=\xi_0+0} f(x)\right)\right)$$

für $a < \xi_0 < b$.

Wir behaupten: für $a \leqq c < d \leqq b$ ist

$$(5)\qquad m(g(x);\ c,\ d) = m(f(x); c,\ d).$$

Denn offenbar ist erstens $m(g(x);\ c,\ d) \leqq m(f(x);\ c,\ d)$. Zweitens gibt es nach 1) 2) 3) zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem ξ_0 aus $\langle c, d \rangle$ ein x aus $\langle c, d \rangle$, so dass $f(x) < g(\xi_0) + \varepsilon$; also $m(f(x);\ c,\ d) \leqq m(g(x);\ c,\ d)$. Daraus folgt aber (5).

Weiter ist für $a \leqq \xi_0 < b$ nach (5) $\liminf\limits_{x=\xi_0+0} g(x) = \lim\limits_{h'=+0}$

$$\lim_{h=+0} m(g(x);\ \xi_0+h,\ \xi_0+h') = \lim_{h'=+0}\lim_{h=+0} m(f(x);\ \xi_0+h, \xi_0+h') =$$

$$= \liminf_{x=\xi_0+0} f(x)$$

und ebenso für $a < \xi_0 \leqq b$

$$\liminf_{x=\xi_0-0} g(x) = \liminf_{x=\xi_0-0} f(x).$$

Also ist wegen 1) 2) 3)

$$g(a) \leqq \liminf_{x=a+0} g(x),\quad g(b) \leqq \liminf_{x=b-0} g(x),$$

$$g(\xi_0) \leqq \max\left(\liminf_{x=\xi_0-0} g(x),\ \liminf_{x=\xi_0+0} g(x)\right)$$

für $a < \xi_0 < b$.

Also ist $g(x)$ vom Typus A in $<a, b>$ und aus (5) folgt (3); w. z. b. w.

§ 3. Beweis des Satzes 2.

In diesem Beweis liegt die ganze Schwierigkeit.

Hilfssatz 1. *Wenn für zwei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ vom Typus A in $<a, b>$ gilt*

$$S(f_1(x)) = S(f_2(x)) \text{ in } <a, b>$$

und

$$m(f_1(x); a, \xi) = m(f_2(x); a, \xi)$$
$$m(f_1(x); \xi, b) = m(f_2(x); \xi, b)$$

für alle ξ mit $a < \xi < b$, so ist $f_1(x) = f_2(x)$ in $<a, b>$.

Beweis: Es genügt zu zeigen: wenn $f(x)$ vom Typus A in $<a, b>$ ist, so lässt sich $f(\xi_0)$ für $a \leqq \xi_0 \leqq b$ durch die Zahlen

$$s(f(x); x_0, x_1, \ldots, x_n),\ m(f(x); a, \xi),\ m(f(x); \xi, b)$$

mit $n \geqq 1$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $a < \xi < b$ eindeutig darstellen.

Und das geschieht durch folgende Formeln:

$$f(a) = \min\left(f(a), \liminf_{x = a+0} f(x)\right) = \lim_{h = +0} m(f(x); a, a+h);$$

$$f(b) = \min\left(f(b), \liminf_{x = b-0} f(x)\right) = \lim_{h = +0} m(f(x); b-h, b);$$

$$m(f(x); \xi, \eta) = \frac{1}{\eta - \xi}\left(s(f(x); a, \xi, \eta, b) - m(f(x); a, \xi)(\xi - a) - m(f(x); \eta, b)(b - \eta)\right)$$

für $a < \xi < \eta < b$;

$$f(\xi_0) = \max\left(\min(f(\xi_0), \liminf_{x = \xi_0 - 0} f(x)), \min(f(\xi_0), \liminf_{x = \xi_0 + 0} f(x))\right) =$$
$$= \max\left(\lim_{h=+0} m(f(x); \xi_0 - h, \xi_0), \lim_{h=+0} m(f(x); \xi_0, \xi_0 + h)\right)$$

für $a < \xi_0 < b$.

Hilfssatz 2. *Voraussetzungen:*

$f_1(x)$, $f_2(x)$ seien vom Typus A in $<a, b>$.

Es sei

(6) $$S(f_1(x)) = S(f_2(x)) \text{ in } <a, b>.$$

Es sei nicht

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ in } <a, b>.$$

Der gemeinsame Wert von

$$s(f_i(x);\ x_0, x_1, \ldots, x_n)\ (i = 1, 2)$$

werde mit

$$s(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

bezeichnet.

Behauptungen:

I. Für kein ξ_0 *ist*

$$s(a, \xi_0, b) = s(a, b),\ a < \xi_0 < b.$$

II. Für kein ξ_0 *ist*

$$\liminf_{x=\xi_0} s(a, x, b) = s(a, b),\ a < \xi_0 < b.$$

III. Bei geeigneter Numerierung ist

$$f_1(a) = m(f_1(x);\ a, b) = \frac{s(a, b)}{b-a},$$

$$f_2(b) = m(f_2(x);\ a, b) = \frac{s(a, b)}{b-a},$$

$$f_1(a) < m(f_1(x);\ c, b)$$
$$f_2(b) < m(f_2(x);\ a, c)$$

für jedes c *mit* $a < c < b$.

Diese Numerierung werde in den folgenden Behauptungen beibehalten.

IV. Für $a \leqq \xi < \eta < b$ *ist*

$$m(f_1(x);\ \xi, b) < m(f_1(x);\ \eta, b).$$

V. Für $a \leqq x < y \leqq b$ *ist*

$$f_1(x) < f_1(y).$$

VI. Für $a \leqq x < y \leqq b$ *ist*

$$f_2(x) > f_2(y).$$

Beweis: Wenn ich im Folgenden etwas über $f_i(x)$ aussage, meine ich damit, dass die Aussage für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s(a, b) = 0$ (also $m(f_i(x);\ a, b) = 0$) — denn sonst betrachte man $f_i(x) - \frac{s(a, b)}{b-a}$ statt $f_i(x)$.

Es sei nun $a < \xi_0 < b$, $s(a, \xi_0, b) = s(a, b) = 0$. Dann ist

$$m(f_i(x);\ a, \xi_0) = m(f_i(x);\ \xi_0, b) = m(f_i(x);\ a, b) = 0,$$

also für $\xi_0 \leqq \xi < b$

$$m(f_i(x);\ a,\xi)=0,\ m(f_i(x);\ \xi,b)=\frac{s(a,\xi,b)}{b-\xi}$$

und für $a<\xi<\xi_0$

$$m(f_i(x);\ \xi,b)=0,\ m(f_i(x);\ a,\xi)=\frac{s(a,\xi,b)}{\xi-a}.$$

Also ist für jedes ξ mit $a<\xi<b$

$$m(f_1(x);\ a,\xi)=m(f_2(x);\ a,\xi),\ m(f_1(x);\ \xi,b)=m(f_2(x);\ \xi,b).$$

Also ist wegen (6) und nach Hilfssatz 1.

$$f_1(x)\equiv f_2(x)\ \text{in}\ <a,b>,$$

was einen Widerspruch gegen die Voraussetzungen ergibt. Damit ist die Behauptung I. bewiesen.

Es sei nun $a<\xi_0<b$, $\liminf\limits_{x=\xi_0} s(a,x,b)=s(a,b)=0$. Dann gibt es entweder eine Folge $\xi_1,\xi_2,\ldots$ mit $\xi_1<\xi_2<\xi_3<\ldots$ $\xi_n\to\xi_0$, $s(a,\xi_n,b)\to 0$ oder eine Folge $\xi_1,\xi_2,\ldots$ mit $\xi_1>\xi_2>\xi_3>\ldots$, $\xi_n\to\xi_0$, $s(a,\xi_n,b)\to 0$.

In beiden Fällen ist also

$$(\xi_n-a)\,m(f_i(x);\ a,\xi_n)+(b-\xi_n)\,m(f_i(x);\ \xi_n,b)\to 0,$$

also

$$m(f_i(x);\ a,\xi_n)\to 0,\ m(f_i(x);\ \xi_n,b)\to 0.$$

Im ersten Fall $(\xi_1<\xi_2<\ldots)$ haben wir also:

Für $b>\xi\geqq\xi_0$ ist $m(f_i(x);\ a,\xi)\leqq m(f_i(x);\ a,\xi_n)$ für alle n, also

$$(7)\quad m(f_i(x);\ a,\xi)=0,\ m(f_i(x);\ \xi,b)=\frac{s(a,\xi,b)}{b-\xi}.$$

Für $a<\xi<\xi_0$ ist $m(f_i(x);\ \xi,b)\leqq m(f_i(x);\ \xi_n,b)$ für fast alle n, also

$$(8)\quad m(f_i(x);\ \xi,b)=0,\ m(f_i(x);\ a,\xi)=\frac{s(a,\xi,b)}{\xi-a},$$

Aus (6), (7), (8) folgt aber nach Hilfssatz 1. $f_1(x)\equiv f_2(x)$ in $<a,b>$, also ein Widerspruch.

Ebenso ergibt sich ein Widerspruch im zweiten Fall $(\xi_1>\xi_2>\ldots)$. Damit ist die Behauptung II. bewiesen.

Es sei nun $a<c<d<b$; dann ist nach der Behauptung II.

$$(9)\qquad m(f_1(x);\ c,d)>0.$$

Denn sonst könnte man entweder ein ξ_0 mit $c\leqq\xi_0\leqq d$,

$f_1(\xi_0)=0$ finden, oder eine Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ von untereinander verschiedenen Zahlen mit $c<\xi_n<d$, $f_1(\xi_n)\to 0$. Im ersten Fall wäre

$s(a,\xi_0,b)=(\xi_0-a)\,m(f_1(x);\,a,\xi_0)+(b-\xi_0)\,m(f_1(x);\,\xi_0,b)=$ $=0=s(a,b)$, gegen die Behauptung I. Im zweiten Fall wäre $s(a,\xi_n,b)=(\xi_n-a)\,m(f_1(x);\ a,\xi_n)+(b-\xi_n)\,m(f_1(x);$ $\xi_n,b)\to 0$, also, wenn ξ_0 einen Häufungswert der Folge $\xi_1,\xi_2,\ldots$ bedeutet, $\liminf\limits_{x=\xi_0} s(a,x,b)=0=s(a,b)$, gegen die Behauptung II.

Wegen $m(f_1(x);\ a,b)=0$ und wegen (9) ist also entweder für alle h mit $0<h<b-a$

$$m(f_1(x);\ a,a+h)=0, \text{ also}$$

$$f_1(a)=\min\left(f_1(a),\liminf_{x=a+0} f_1(x)\right)=\lim_{h=+0} m(f_1(x);\,a,a+h)=0$$

oder es ist für alle h mit $0<h<b-a$

$$m(f_1(x);\ b-h,b)=0, \text{ also}$$

$$f_1(b)=\min\left(f_1(b),\liminf_{x=b-0} f_1(x)\right)=\lim_{h=+0} m(f_1(x);\,b-h,b)=0.$$

Es kann aber nicht $f_1(a)=f_1(b)=0$ sein, denn sonst wäre für $a<x<b$ $s(a,x,b)=0=s(a,b)$, gegen die Behauptung I. Es gilt also genau eine von den beiden Gleichungen

$$f_1(a)=0,\ f_1(b)=0.$$

Ebenso gilt genau eine von den beiden Gleichungen

$$f_2(a)=0,\ f_2(b)=0$$

und für $a<c<d<b$ ist

$$m(f_2(x);\ c,d)>0.$$

Wäre nun $f_1(a)=f_2(a)=0$, so wäre für $a<\xi<b$

$$m(f_i(x);\ a,\xi)=0,\ m(f_i(x);\ \xi,b)=\frac{s(a,\xi,b)}{b-\xi}$$

also nach Hilfssatz 1. $f_1(x)\equiv f_2(x)$ in $<a,b>$, gegen die Voraussetzung. Ebenso ist nicht $f_1(b)=f_2(b)=0$.

Also ist bei geeigneter Numerierung

$$f_1(a)=0,\ f_1(b)>0,\ f_2(a)>0,\ f_2(b)=0.$$

Weil

$$0<f_1(b)=\min\left(f_1(b),\ \liminf_{x=b-0} f_1(x)\right)=$$

$$=\lim_{h=+0} m(f_1(x);\ b-h,\ b),$$

so gilt wegen (9) für $a < c < b$

$$m(f_1(x);\ c,\ b) > 0$$

und ebenso beweist man

$$m(f_2(x);\ a,\ c) > 0.$$

Damit ist die Behauptung III bewiesen.

Wir schalten nun folgende Zwischenbemerkung ein. Es sei $a < c < b$; wir setzen

$$\overline{f_i}(x) = f_i(x) \text{ für } a \leqq x < c,\ \overline{f_i}(c) =$$
$$= \min\left(f_i(c),\ \liminf_{x=c-0} f_i(x)\right)\ (i = 1, 2).$$

Dann ist offenbar $\overline{f_i}(x)$ vom Typus A in $\langle a, c\rangle$ und $m(f_i(x);\ \xi,\ \eta) = m(\overline{f_i}(x);\ \xi,\ \eta)$ für $a \leqq \xi < \eta \leqq c$. Für

(10) $$n \geqq 1,\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = c$$

ist also

$$s(\overline{f_i}(x);\ x_0, x_1, \ldots, x_n) = s(x_0, x_1, \ldots, x_n, b) - m(f_i(x);\ c,\ b)\ (b - c).$$

Wir setzen noch

$$f_i(x;\ c) = \overline{f_i}(x) + m(f_i(x);\ c,\ b)\,\frac{b-c}{c-a}$$

Dann ist $f_i(x;\ c)$ vom Typus A in $\langle a, c\rangle$ und aus (10) folgt

$$s(f_i(x;\ c);\ x_0, x_1, \ldots, x_n) = s(x_0, x_1, \ldots, x_n, b),$$

also insbesondere

$$S(f_1(x;\ c)) = S(f_2(x;\ c)) \text{ in } \langle a, c\rangle.$$

Die Differenz $f_i(x;\ c) - f_i(x)$ ist konstant in $\langle a, c)$.

Ebenso setzen wir

$$\overline{F_i}(x) = f_i(x) \text{ für } c < x \leqq b,$$
$$\overline{F_i}(c) = \min\left(f_i(c),\ \liminf_{x=c+0} f_i(x)\right)\ (i = 1, 2)$$

und

$$F_i(x;\ c) = \overline{F_i}(x) + m(f_i(x);\ a,\ c)\,\frac{c-a}{b-c}.$$

Dann ist $F_i(x;\ c)$ vom Typus A in $\langle c, b\rangle$; für $n \geqq 1,\ c = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ist

$$s(F_i(x;\ c);\ x_0, x_1, \ldots, x_n) = s(a, x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

also insbesondere

$$S(F_1(x;c)) = S(F_2(x;c)) \text{ in } <c, b>.$$

Die Differenz $F_i(x;c) - f_i(x)$ ist konstant in $(c, b>$ [2])

Wir wollen nun voraussetzen, dass es zwei Zahlen ξ, η gibt, so dass

(11) $a \leqq \xi < \eta < b,\ m(f_1(x);\ \xi, b) = m(f_1(x);\ \eta, b)$.

Nach der Behauptung III ist sicher $\xi > a$. Wir bilden $F_i(x;\ \xi)$. Die Funktion $F_2(x;\ \xi)$ nimmt ihren kleinsten Wert in $<\xi, b>$ im Punkt b an, da dies nach der Behauptung III für $f_2(x)$ in $<a, b>$ gilt. Weiter gilt $S(F_1(x;\ \xi)) = S(F_2(x;\xi))$ in $<\xi, b>$. Wäre nicht $F_1(x;\ \xi) = F_2(x;\xi)$ in $<\xi, b>$, so müsste nach der Behauptung III gelten

$F_1(\xi;\ \xi) = m(F_1(x;\ \xi);\ \xi, b) < m(F_1(x;\ \xi);\ \eta, b)$ im Widerspruch zu (11). Also ist $F_1(x;\ \xi) \equiv F_2(x;\ \xi)$ in $<\xi, b>$. also ist $f_1(x) - f_2(x)$ konstant in $(\xi, b>$.

Es sei X die untere Grenze derjenigen ξ, zu welchen es ein η mit (11) gibt. Also ist $a \leqq X < b$ und $f_1(x) - f_2(x)$ ist konstant in $(X, b>$.

Es sei $X < y < b$. Weil $f_1(x) - f_2(x)$ nicht in $<a, b>$ konstant ist [3]), so ist $f_1(x) - f_2(x)$ nicht konstant in $<a, \frac{X+y}{2}>$. Also ist auch $f_1(x;\ y) - f_2(x;\ y)$ nicht konstant, also insbesondere nicht identisch Null in $<a, y>$. Weil $S(f_1(x;\ y)) = S(f_2(x;\ y))$ in $<a, y>$ und weil $f_1(x; y)$ in $<a, y>$ ihren kleinsten Wert im Punkte a annimmt, so ist nach Behauptung III

$$f_2(y;\ y) < m(f_2(x;\ y);\ a, z)$$

für $a < z < y$; also — nach der Definition von $f_2(x;\ y)$

$$\text{(12)} \qquad \min\left(f_2(y),\ \liminf_{x=y-0} f_2(x)\right) < m(f_2(x);\ a, z)$$

für $X < y < b,\ a < z < y$.

Es sei $0 < t < b - y$; dann ist nach (12)

$$\min\left(f_2(y+t),\ \liminf_{x=y+t-0} f_2(x)\right) < m(f_2(x);\ a, y).$$

---

[2]) Auch die Differenzen

$m(f_i(x;\ c);\ \xi, \eta) - m(f_i(x);\ \xi, \eta),\ m(F_i(x;\ c);\ \xi', \eta') - m(f_i(x);\ \xi', \eta')$ sind offenbar für $a \leqq \xi < \eta \leqq c \leqq \xi' < \eta' \leqq b$ von ξ, η, ξ', η' unabhängig

[3]) Denn sonst müsste wegen (6) diese Konstante Null sein, also $f_1(x) \equiv f_2(x)$ in $<a, b>$ gegen die Voraussetzung.

Für $t \to 0$ folgt daraus

$$\liminf_{x=y+0} f_2(x) \leqq m(f_2(x); a, y),$$

also

$$\liminf_{x=y+0} f_2(x) \leqq \min\left(f_2(y), \liminf_{x=y-0} f_2(x)\right).$$

Weil

$$f_2(y) \leqq \max\left(\liminf_{x=y-0} f_2(x), \liminf_{x=y+0} f_2(x)\right),$$

so ist also

$$f_2(y) \leqq \liminf_{x=y-0} f_2(x),$$

und statt (12) kann man schreiben

(13) für $X < y < b$, $a < z < y$ ist $f_2(y) < m(f_2(x); a, z)$.

Insbesondere ist also für $X \leqq z < y \leqq b$

$$f_2(y) < f_2(z)$$

(für $y = b$ folgt diese Ungleichung aus der Behauptung III). Also ist $f_2(x)$ abnehmend in $\langle X, b\rangle$, und da $f_1(x) - f_2(x)$ in $(X, b\rangle$ konstant ist, so ist $f_1(x)$ abnehmend in $(X, b\rangle$.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $a < X < b$ und $X = a$.

1. Fall. $a < X < b$. Wir wählen ein $h > 0$ so, dass

$$h < X - a,\ h < \frac{b-X}{2},\ 8Mh < \left(f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right) - f_2(b)\right)\left(\frac{b-X}{2} + h\right)$$

wo M eine gemeinsame obere Schranke von $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$ in $\langle a, b\rangle$ ist. Wir bilden für ein ξ mit $X < \xi \leqq \frac{b+X}{2}$

$$s(a, X-h, \xi, b) = m(f_i(x); a, X-h)(X-h-a) + \\ + m(f_i(x); X-h, \xi)(\xi - X + h) + m(f_i(x); \xi, b)(b-\xi).$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen für $i = 1$ und $i = 2$ ergibt sich, dass der Ausdruck

$$(14)\quad (m(f_1(x); X-h, \xi) - m(f_2(x); X-h, \xi))(\xi - X + h) + \\ + (m(f_1(x); \xi, b) - m(f_2(x); \xi, b))(b - \xi)$$

von ξ unabhängig ist. Es ist aber

$$m(f_1(x); \xi, b) = f_1(b),\quad m(f_2(x); \xi, b) = f_2(b);$$

und nach der Definition von X ist

$$m(f_1(x); X-h, b) < m(f_1(x); \xi, b),$$

also $m(f_1(x); X-h, \xi) < m(f_1(x); \xi, b) \leqq f_1(b)$.

Endlich ist nach (13)

$$f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right) < m\,(f_1(x);\ a,\xi) \leqq m\,(f_2(x);\ X-h,\xi).$$

Also ist der Ausdruck (14) für $\xi = \frac{b+X}{2}$ kleiner als

$$\left(f_1(b)-f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right)\right)\left(\frac{b-X}{2}+h\right)+(f_1(b)-f_2(b))\frac{b-X}{2} =$$

$$= (f_1(b)-f_2(b))\,(b-X+h)-\left(f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-f_2(b)\right)\left(\frac{b-X}{2}+h\right) < (f_1(b)-f_2(b))\,(b-X+h)-8\,M\,h.$$

Für $\xi = X+h$ ist aber der Ausdruck (14) grösser als
$-2M\,.\,2h+(f_1(b)-f_2(b))(b-X-h) > -8\,Mh+(f_1(b)-$
$-f_2(b))\,(b-X+h).$

Also ist der Ausdruck (14) doch nicht von ξ unabhängig, was einen Widerspruch liefert.

2. Fall. $X=a$. Dann ist $f_2(x)$ abnehmend in $<a,b>$, $f_1(x)$ in $(a,b>$. Nach der Behauptung III. ist $f_1(a)=f_2(b)=0$, $f_1(b)>0$. Also ist für $0<h<b-a$, $s\,(a,a+h,b)=$ $=f_1(b)\,(b-a-h)=f_2(a+h)\,h$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn für $h\to 0$ ist $f_2(a+h)\,h\to 0$, $f_1(b)(b-a-h)\to$ $\to f_1(b)\,(b-a>0.$

Daher enthält die Annahme (11) jedenfalls einen Widerspruch, womit die Behauptung IV. bewiesen ist.

Es sei nun $a\leqq\xi<\eta\leqq b$. Wenn $\xi=a$, so ist nach der Behauptung III. $f_1(\xi)<f_1(\eta)$. Also sei $\xi>a$. Dann ist für $h>0$, $h<\xi-a$, $h<\frac{\eta-\xi}{2}$ nach der Behauptung IV.

$$m\,(f_1(x);\ \xi-h,b) < m\,(f_1(x);\ \xi,b)$$
$$< m\,(f_1(x);\ \xi+h,b) < m\left(f_1(x);\ \frac{\xi+\eta}{2},b\right).$$

Also

$$m\,(f_1(x);\ \xi-h,\xi) < m\,(f_1(x);\xi,\xi+h) < m\left(f_1(x);\ \frac{\xi+\eta}{2},b\right).$$

Also für $h\to 0$

$$\min\left(f_1(\xi),\liminf_{x=\xi-0} f_1(x)\right) \leqq \min\left(f_1(\xi),\liminf_{x=\xi+0} f_1(x)\right) \leqq$$

$$\leqq m\left(f_1(x);\ \frac{\xi+\eta}{2}.\ b\right).$$

Wegen
$$f_1(\xi) = \max\left(\min\left(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi-0} f_1(x)\right), \min\left(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi+0} f_1(x)\right)\right)$$
ist also
$$f_1(\xi) = \min\left(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi+0} f_1(x)\right) \leqq m\left(f_1(x); \frac{\xi+\eta}{2}, b\right)$$
$$< m\left(f_1(x); \frac{\xi+2\eta}{3}, b\right) \leqq f_1(\eta),$$
womit die Behauptung V. bewiesen ist. Durch die Betrachtung der Funktionen $f_2(-x)$, $f_1(-x)$ im Intervall $<-b, -a>$ wird endlich die Behauptung VI. auf die Behauptung V. zurückgeführt.

Damit ist der Hilfssatz 2 in allen Teilen bewiesen.

Beweis des Satzes 2. Nach Hilfssatz 2. ist $f_1(x)$ wachsend, $f_2(x)$ abnehmend in $<a, b>$. Also ist für $a < x < y < b$
$$(15) \quad s(a, x, b) = f_1(a)(x-a) + f_1(x)(b-x) = f_2(x)(x-a) + f_2(b)(b-x),$$
$$(16) \quad s(a, x, y, b) = f_1(a)(x-a) + f_1(x)(y-x) + f_1(y)(b-y) = f_2(x)(x-a) + f_2(y)(y-x) + f_2(b)(b-y).$$
Nach (15), (16) ist
$$\begin{aligned}(f_1(x) - f_2(y))(y-x) &= f_2(x)(x-a) + f_2(b)(b-y) - f_1(a)(x-a) - f_1(y)(b-y) = \\ (17) \qquad &= s(a, x, b) + f_2(b)(x-y) - s(a, y, b) - f_1(a)(x-y) = s(a, x, b) - s(a, y, b),\end{aligned}$$
da $f_1(a) = f_2(b) = \dfrac{s(a, b)}{b-a}$.

Weil $f_1(x)$, $f_2(x)$ in $<a, b>$ beschränkt sind, so ist nach (17) $s(a, x, b)$ eine stetige Funktion von x in (a, b). Nach (15) sind also auch $f_1(x)$, $f_2(x)$ stetig in (a, b); also folgt aus (17) bei $y \to x+0$
$$\lim_{y\ x+0} \frac{s(a, x, b) - s(a, y, b)}{y-x} = f_1(x) - f_2(x)$$
und bei $x \to y-0$
$$\lim_{x=y-0} \frac{s(a, x, b) - s(a, y, b)}{y-x} = f_1(y) - f_2(y).$$
Also ist für $a < x < b$
$$\frac{d}{dx} s(a, x, b) = f_2(x) - f_1(x).$$

Aus (15) folgt dann die Differentierbarkeit von $f_i(x)$ in (a, b) und die Richtigkeit der Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{aligned} f_2(x) &= f_1(a) + (b-x) f'_1(x) \\ f_1(x) &= f_2(b) - (x-a) f'_2(x) \end{aligned}$$

in (a, b). Daraus folgt die Existenz von $f_1''(x)$ in (a, b) und die Gleichung

$$f_1''(x)(b-x)(x-a) - f'_1(x)(x-a) + f_1(x) - f_2(b) = 0$$

Die Funktion $f_1(x) - f_2(b) = f_1(x) - f_1(a)$ genügt also für $a < x < b$ der Gleichung

$$y''(b-x)(x-a) - y'(x-a) + y = 0,$$

deren allgemeines Integral ist

$$C_1(x-a) + C_2\left(b-a+(x-a)\log\frac{b-x}{x-a}\right).$$

Da $f_1(x)$ in $\langle a, b\rangle$ wachsend und beschränkt ist, gilt notwendig

$$(19) \qquad f_1(x) = f_1(a) + A(x-a), \quad A > 0$$

für $a < x < b$. Für $x = a$ ist diese Gleichung auch erfüllt; weiter ist $f_1(b) \geqq \lim\limits_{x=b-0} f_1(x)$ (weil $f_1(x)$ wächst) und andererseits $f_1(b) \leqq \lim\limits_{x=b-0} \inf f_1(x)$.

Also ist $f_1(x)$ linksseitig stetig im Punkt b, also gilt (19) auch für $x = b$.

Aus (15) folgt dann

$$(20) \qquad f_2(x) = f_1(a) + A(b-x) = f_2(b) + A(b-x)$$

für $a < x < b$; für $x = b$ ist diese Gleichung auch erfüllt; weiter ist $f_2(a) \geqq \lim\limits_{x=a+0} f_2(x)$ (weil $f_2(x)$ abnimmt) und andererseits $f_2(a) \leqq \lim\limits_{x=a+0} \inf f_2(x)$. Also ist $f_2(x)$ rechtsseitig stetig im Punkt a, also gilt (20) auch für $x = a$.

Daher gilt (19) und (20) für $a \leqq x \leqq b$, womit Satz 2. bewiesen ist.

§ 4. Beweis des Satzes 3.

Für $n \geqq 1$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $A > 0$[4]) ist

$$s(A(x-a)+B;\ x_0, x_1, \ldots, x_n)$$
$$-\, s(A(b-x)+B;\ x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

[4]) $A > 0$ bedeutet offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit.

$$= \sum_{i=1}^{n} (A(x_{i-1} - a) + B - A(b - x_i) - B)(x_i - x_{i-1})$$
$$= A \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} + x_i)(x_i - x_{i-1}) - A(a+b) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$
$$= A \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) - A(a+b)(b-a)$$
$$= A(b^2 - a^2) - A(b^2 - a^2) = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Résumé.

Sur l'intégrale de Riemann.

Par Vojtěch Jarník.

$f(x)$ étant définie et bornée dans l'intervalle fermé $<\xi, \eta>$, désignons par $m(f(x); \xi, \eta)$ la borne inférieure de $f(x)$ dans $<\xi, \eta>$.

Supposons $f(x)$ définie et bornée dans $<a, b>$. Alors on peut former, pour $n \geqq 1$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, les nombres

$$(1) \quad s(f(x); x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} m(f(x); x_{i-1}, x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

La borne supérieure des nombres (1) est l'intégrale $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Nous nous posons, dans la Note présente, le problème suivant: en quelle mesure une fonction $f(x)$ est-elle déterminée par la totalité des nombres (1)? La résolution de ce problème est fournie par les théorèmes 1, 2, 3 du § 1er.