Otakar Borůvka

Úkoly a cesty matematiky

Práce Moravskoslezské akademie věd přírodních, sv. 24, 1952, spis 12, 255-265

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500225

PRÁCE MORAVSKOSLEZSKÉ AKADEMIE VĚD PŘÍRODNÍCH
SVAZEK XXIV., SPIS 12., SIGNATURA: F 272 BRNO - ČESKOSLOVENSKO
ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM NATURALIUM MORAVO-SILESIACAE
TOMUS XXIV., FASCICULUS 12., SIGNATURA F 272, BRNO, ČECHOSLOVAKIA, 1952

SEŠIT 7. ROK 1952.

OTAKAR BORŮVKA

Úkoly a cesty matematiky

Přednáška proslovená na XXV. výroční schůzi Moravskoslezské akademie věd přírodních v Brně, dne 21. února 1952.

1. Úkolem přírodních věd je poznat přírodu a přispět k jejímu ovládnutí. Matematika se obvykle počítá k přírodním vědám, leč mezi nimi má zvláštní místo. Bezprostředním předmětem studia ostatních přírodních věd, od experimentální fysiky až po biologii, je podstata hmoty a její vlastnosti s rozmanitých hledisek. Naproti tomu jsou bezprostředním předmětem studia matematiky abstraktní pojmy. S touto odlišností matematiky od jiných přírodovědních oborů souvisí nesnáze nematematiků s pochopením úkolů matematiky, jejích cílů praktických a vědeckých, jejích možností a metod. Nezřídka se setkáváme i s otázkou, zda se snad matematikové úmyslně neoddalují od lidu, mluvíce o konkretních věcech abstraktně a pro lid nesrozumitelně, v souhlase s PLATONOVÝM zákazem: *Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.* J. W. GOETHE napsal (Maximen und Reflexionen, č. 1279): »Matematikové jsou jako Francouzi: mluvíte-li k nim, přeloží si to do vlastní řeči a pak je z toho hned něco jiného.«

2. Nuže, jak jest oduvodněna příslušnost matematiky k přírodním vědám a jaký je vztah matematiky k realitě?

Jsou dvě těsná pouta, jimiž matematika souvisí s realitou.

Především jsou základní pojmy všech oborů matematiky odrazem objektivní skutečnosti, která je předmětem našeho smyslového poznání. Proces získání takových pojmů je dalekosáhlá abstrakce, obvykle z mnoha případu, při níž se zejména potlačí znaky, které jsou specifické pro daný obor hmotných předmětů. Společným znakem takto získaných pojmů je to, že je lze realisovat, t. j. naplnit konkretním obsahem, obvykle mnoha zpusoby, a to tak, že realisované pojmy vyjadřují případy naší skutečnosti. Na př. realisujeme pojem čísla počtem určitých věcí, v jiných případech počtem naměřených metru nebo prošlých hodin. Základní pojmy elementární geometrie, body a přímky, realisujeme (v deskriptivní geometrii) tečkami a přímými čarami, jindy (v analytické geometrii) číselně, jindy opět (v optice) význačnými místy optických soustav a světelnými paprsky a pod. Další významné příklady pojmů, jimiž je matematika zakotvena v realitě, jsou: pojem množiny, funkce neboli zobrazení, pojem metriky a metrického prostoru, pojem grupy, atd.

Druhým poutem, jímž je matematika vázána k realitě, je logika. Matematické úsudky jsou tvořeny podle týchž pravidel myšlení, jichž používají ostatní přírodní vědy. Nicméně je úloha logiky v matematice daleko významnější než v ostatních přírodních vědách. V matematice je otázka platnosti určitého tvrzení dána jedině logickou správností a úplností dedukcí, vedoucích od předpokladů k výsledku. Naproti tomu jsou ostatní přírodní vědy empirické; pro ně je rozhodujícím kriteriem správnosti určitého tvrzení svědectví pokusu. Na př. tvrzení, že součet úhlů v euklidovském trojúhelníku je 180°, je s empirického hlediska správné, protože správnost byla ověřena měřením v mnoha konkretních případech. S hlediska matematického může býti tento důvod nejvýše podnětem k hledání důkazu správnosti; s hlediska matematického je ono tvrzení správné proto, že je logickým důsledkem jistých axiomu.

Matematika je bezprostředně spjata s realitou. Zakotvena v ní a skládajíc se z logických úsudku, popisuje nebo i předvídá skutečnost, kdykoliv jsou její pojmy vhodným způsobem realisovány. Právě v možnosti nejrozmanitějších realisací je upotřebitelnost matematiky v jiných oborech. Připomeňme na tomto místě charakterisaci matematiky, jak ji formuloval B. ENGELS (Anti-Dühring, nakl. Svoboda, Praha, 1949, str. 36): »Předmětem čisté matematiky jsou formy prostoru a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka. Že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může zakrýt jen povrchně její původ z vnějšího světa.«

3. Všimněme si nyní podnětů, které byly a jsou příčinami pokroku matematiky a jejího ustavičného rozvoje.

Tyto podněty jsou dvojího druhu: vnější a vnitřní.

Vnějšími podněty pokroku a rozvoje matematiky jsou úkoly vznikající z potřeb praktického života a souvisící obvykle s otázkami technického rázu, a dále z potřeb jiných věd, zejména fysiky, astronomie a věd technických. Prohlížejíce dějiny matematiky, setkáváme se ve všech stadiích jejího vývoje s problémy, které vznikly nepochybně z praktických potřeb a které podstatně ovlivňovaly směr matematického bádání a přinesly výsledky trvalé ceny. Praktického rázu jsou problémy, o nichž je řeč v nejstarších známých matematických dokumentech z doby víc než před čtyřmi tisíci lety: Papyrus RHIND, uložený v Britském museu, obsahuje mimo jiné pravidlo pro určení plošného obsahu kruhu. Podobně t. zv. Moskevský papyrus obsahuje zejména pravidlo pro výpočet povrchu koule. Starověká geometrie, jejímž vynikajícím a uceleným výrazem jsou EUKLIDOVY Základy, Στοιχεῖα, z r. asi 300 př. Kr., vznikla ze zeměměřičských potřeb. Tento spis je obsahově i metodicky dodnes základem vyučování geometrii na celém světě. Rovněž proslulé klasické problémy: kvadratury kruhu, trisekce úhlu a zdvojení krychle jsou praktického rázu. V nich jde, jak známo, o nalezení geometrických konstrukcí vedoucích k určení plošného obsahu daného kruhu, k rozdělení úhlu na tři stejné díly a k určení krychle dvojnásobného objemu. Problém zdvojení krychle byl prý vyvolán orakulem. Tyto problémy se chápou ve dvojím smyslu: v širším, jestliže se k provedení potřebných konstrukcí připouštějí libovolné prostředky geometrické, nebo v užším, jestliže je dovoleno použíti jenom nejjednodušších geometrických přístroju, pravítka a kružidla. Problémy v širším smyslu byly již starověkými matematiky skvěle rozřešeny. Naproti tomu problémy ve smyslu užším stály v popředí zájmu matematiků po mnoho století, tvrdošíjně odolávajíce rozřešení. Počet nezdařených pokusů vedl r. 1775 pařížskou Akademii k usnesení, že v budoucnu další řešení těchto problémů a problému perpetua mobile již zkoumati nebude. Poznamenejme, že zmíněné problémy byly vyřešeny až v 19. stol. algebraickými a aritmetickými metodami a že konečný výsledek zní, že hledané konstrukce neexistují. Tento poznatek nemá ovšem nic společného s DU BOIS-REYMONDOVÝM »ignorabimus«. Jeho obsahem je prostě důkaz, že k provedení požadovaných konstrukcí pravítko a kružidlo nestačí.

Také z novější doby můžeme uvésti řadu vnějších podnětů, které znamenají milníky na cestě pokroku a rozvoje matematiky: Potřeby astronomie v druhé polovině 16. stol., v době TYCHA BRAHE, zvýšené podstatným zdokonalením pozorovacích přístrojů, vyžadovaly přesnějších tabulek, jejichž výpočty vedly k definitivní formě nekonečných desetinných zlomků. FOURIEROVY studie o vedení tepla, podložené potřebami hospodářskými a konkretními otázkami fysikálními z konce 18. a začátku 19. století, daly vznik novým metodám matematické analysy a zejména vedly k objevení trigonometrických řad a k pozdějším theoriím na nich založeným. GAUSSOVA měření povrchu zemského v první polovině 19. stol. vedla k vytvoření diferenciální geometrie, která se rozvinula k velmi bohaté větvi matematiky. Astronomické úvahy HILLOVY o pohybu perigea měsíce z konce 19. stol. vedly k obsáhlé theorii nekonečných determinantů a m. j.

Krásně je popsán význam studia přírody pro matematiku v klasickém díle FOURIEROVĚ o analytické theorii tepla z r. 1822. FOURIER tam píše asi toto:

»Hluboké studium přírody je nejvydatnějším pramenem matematických objevů. Toto studium je výhodné nejenom proto, že ukazujíc výzkumům určitý cíl, vylučuje úvahy mlhavé a výpočty k ničemu nevedoucí, ale je současně jistým prostředkem k budování matematické analysy a k odkrývání jejích základů, na jejichž poznání nejvíce záleží a které si tato věda musí navždy podržet: t. j. základů, které se opětovně vyskytují ve všech přírodních jevech.«

Při této příležitosti bych poznamenal, že řešení matematických problémů, vzniklých z vnějších podnětu, patří často k obtížným, avšak současně nejplodnějším zážitkům tvořícího matematika. Takové problémy jsou většinou předkládány v konkretní, nematematické formě a vyžadují především podrobné analysy za účelem odhalení jejich abstraktního, matematického jádra. To je právě onen překlad do matematické řeči, o němž se s patrným neporozuměním zmiňuje GOETHE, překlad, pro nějž není universálního slovníku. V dalším stadiu řešení se potom abstraktně formulovaný problém zařadí na patřičná místa dílčích matematických theorií a výsledek se nakonec realisuje ve shodě s puvodním konkretním obsahem předloženého problému.

Všimněme si nyní podnětů jiného druhu, které jsou významné pro pokrok a rozvoj matematiky, podnětu, které jsem nazval vnitřními. Tyto podněty jsou dány potřebami matematiky jakožto vědního oboru. Požadavky, které se kladou na každý vědní obor, jsou vedle společenské užitečnosti a správnosti výsledků, která se posuzuje podle specifických měřítek každého oboru, úplnost a systematické, přehledné uspořádání výsledků. Z těchto požadavků plynou pro matematiku zejména tyto úkoly: řešení dílčích otázek v rámci známých pojmu a metod, zkoumání genetické, obsahové a logické struktury předpokladů a příslušných dedukcí, zkoumání důsledků modifikací duležitých pojmu vznikajících jejich zobecněním nebo specialisací, tvoření nových pojmů a metod, pátrání po souvislostech mezi zdánlivě odlehlými výsledky a tvoření theorií z dosažených dílčích poznatků. Chtěl bych zduraznit, že význam theorie v matematice je podstatně odlišný od jejího významu ve vědách empirických. Theorie ve vědách empirických má význam pracovní metody, která zaměřuje činnost badatele v určitém pracovním směru. V matematice theorie znamená uzavřený celek menšího nebo většího rozsahu, na jehož začátku stojí (s matematického hlediska) správné předpoklady a jehož obsahem je souhrn těchto předpokladu a z nich plynoucích logických dedukcí a výsledků. Dílčí matematické theorie jsou hotovými kvádry, z nichž se skládá celá budova matematiky.

Plnění úkolů, k nimž vedou vnitřní potřeby matematiky, udržuje a zvyšuje pohotovost a účinnost matematického nástroje k jeho použití v jiných oborech, a tím se stává důležitým požadavkem společenským. Avšak nadto muže plnění oněch úkolů vésti k objevům, které jsou významné s hledisek daleko širších. Mimochodem připomínám uplatnění, kterého se po uplynutí mnoha století dostalo kuželosečkám starořeckých matematiku v KEPLEROVÝCH zákonech. Názorně se užitečnost studia vnitřních úkolů matematiky projevuje v objevu neeuklidovské geometrie, o němž bych chtěl nyní podrobněji promluvit.

4. Počátky objevu neeuklidovské geometrie jsou v zdánlivě nepodstatných vadách krásy EUKLIDOVA díla. Abychom je pochopili, ujasněme si nejprve moderní obraz euklidovské geometrie, vypracovaný zejména D. HILBERTEM v jeho klasickém díle: Grundlagen der Geometrie. Předmětem studia euklidovské geometrie (rovinné) jsou souvislosti mezi předměty dvou množin; předměty jedné množiny nazýváme body, předměty druhé množiny přímky. Předpokládáme, že mezi předměty obou množin jsou nějaké vztahy, které mají určité vlastnosti. Vztahy vyjadřujeme různými názvy, jako »prochází«, »mezi«, kongruentní«, »rovnoběžný«. Vlastnosti těchto vztahu jsou popsány v několika t. zv. axiomech euklidovské geometrie. Na př. jeden axiom vyjadřuje, že dvěma různými body prochází právě jedna přímka; jiný, že ze tří různých bodů, jimiž prochází táž přímka, je vždycky jeden bod mezi druhými dvěma, atp. Jedním z axiomů, který je pro vznik neeuklidovské geometrie nejdůležitější, je t. zv. euklidovský axiom o rovnoběžkách. Jeho obsahem je to, že k danému bodu a k dané přímce jím neprocházející existuje vždycky jenom jedna přímka, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou přímkou. Nuže, euklidovská geometrie je soustava těchto axiomů a logických dedukcí a výsledků z nich plynoucích. Již výše jsem se zmínil, že se tato geometrie dá různými způsoby realisovat. Na př. v realisaci kreslenými obrazci v deskriptivní geometrii nabývají slova body a přímky obsahu teček a přímých čar a podobně slova »prochází«, mezi«, kongruentní«, »rovnoběžný« a pod. mají názorný obsah.

Tento moderní obraz euklidovské geometrie je v podivuhodné úplnosti obsažen již v EUKLIDOVÝCH Základech. V tomto díle EUKLID zpracoval tehdejší geometrii a v geometrickém rouše i algebru tak znamenitě, že všichni jeho přechůdci beze stopy zmizeli. Přínos EUKLIDŮV je zejména v systematickém zpracování tehdy známé látky, tedy ve výběru a formulaci definic, postulátu a axiomu a v uspořádání jednotlivých vět podle zásady, že se v žádném důkazu nevyskytne nic, co je dokázáno teprve později. Axiom o rovnoběžkách není u EUKLIDA obsažen v tom znění, jak jsem je výše uvedl, nýbrž je nahrazen jiným, t. zv. pátým postulátem, který (podle českého SERVÍTOVA překladu) zní takto: »A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna, že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.« Nuže, právě tento pátý postulát byl podnětem úvah, které po více než dvou tisících letech vedly k objevu neeuklidovské geometrie. Již nejstarší vykladači euklidovského textu se domnívali, že pátý postulát není dostatečně samozřejmý, aby vedle ostatních, mnohem jednodušších, mohl býti postaven bez důkazu v čelo geometrie, a proto se pokoušeli o jeho důkaz. Snahy v tomto směru pokračovaly od oněch nejstarších dob až do 19. stol. a zúčastnili se jich zástupci snad všech kulturních národů. Pokusů o důkaz pátého postulátu, o nichž se dočítáme v dějinách matematiky, bylo velmi mnoho. »Jako písku u moře« stojí v jednom díle o neeuklidovské geometrii (M. SIMON, Nichteuklidische Geometrie, [1925], str. 3.). Všechny tyto pokusy se shodují v tom, že nahrazují pátý postulát nějakým jiným, jemu co do důsledků ekvivalentním postulátem, který však často není vysloven (na př. každým bodem v ostrém úhlu prochází přímka, která protne obě ramena úhlu). Zásluha o vyřešení dvoutisíciletého problému náleží příslušníku ruského národa N. I. LOBAČEVSKÉMU, od r. 1816 profesoru a v letech 1827-46 rektoru university v Kazani. LOBAČEVSKIJ uveřejnil svoje výsledky po prvé v letech 1829-30 ve věstníku kazaňské university pod názvem: О началах геометрии. Rozpoznal, že se pátý postulát dokázat nedá a že vedle geometrie euklidovské existuje geometrie jiná, neeuklidovská, kterou později nazval pangeometrií, v níž pátý postulát neplatí. Je zajímavé, že téměř současně došli ke stejným výsledkům K. F. GAUSS, jurista F. K. SCHWEIKART a maďarský důstojník J. BOLYAI, avšak jejich výsledky, pokud vůbec byly uveřejněny, vyšly tiskem později. — Objev neeuklidovské geometrie mohutně ovlivnil nejenom rozvoj geometrie, nýbrž i fysiky. Jím byly vytvořeny předpoklady ke vzniku obsáhlých geometrií riemannovských a k vypracování principu relativity. Současně jím bylo potvrzeno, že naše představy o prostoru a času nejsou apriorní, nýbrž že pocházejí ze zkušenosti, že nejsou absolutní, nýbrž podléhají změnám podle toho, jak lépe a úplněji poznáváme reální prostor a čas.

5. Z tohoto přehledu úkolů, z nichž matematika vyrůstala a stále se rozvíjí, vidíme, že úkoly praktického rázu vedou často k netušenému obohacení abstraktního matematického nástroje a naopak úkoly rázu abstraktního a theoretického vedou k praktickým důsledkům. Obě stránky matematické tvorby, praktická i theoretická, jsou pro rozvoj matematiky stejně důležité. Jednostranné pěstování jedné z nich na úkor druhé vedlo by v matematice k nebezpečí vulgárního materialismu nebo společensky neužitečného idealismu.

6. V poslední části této přednášky si dovolím předvésti ukázku dosahu a účinnosti moderní matematiky na poli, které, jak se domnívám, bude zajímati právě členy této učené společnosti. Jde o aplikace matematiky v oboru klasifikací. Zajisté zná každý badatel význam klasifikací z vlastního názoru. Polský matematik B. KNASTER v článku o aplikacích matematické logiky na matematiku nedávno napsal: »Vybudování theorie klasifikací považuji za jednu z nejdůležitějších potřeb vědy« (Časopis pro pěstování matematiky, roč 76 [1951]). Dosavadní matematické práce sice ještě neznamenají theorii zplna vyhovující všem potřebám věd přírodních a technických, avšak přesto přinášejí v tomto směru významný pokrok, jak se nyní pokusím na příkladě doložit.

Představme si, že chceme klasifikovat množinu G nějakých individuí. Postupujeme takto: Pro individua množiny G zvolíme určitý počet znaků, t. zv. prvních znaků, dbajíce toho, aby každé individuum mělo právě jeden z těchto znaků. Tím se množina G rozpadne na určitý počet skupin, z nichž každá se skládá ze všech individuí, která mají jeden z prvních znaků. Pro individua každé z těchto skupin zvolíme dále určitý počet znaků, t. zv. druhých znaků, opět dbajíce toho, aby každé individuum mělo právě jeden z těchto znaků. Tím se každá skupina rozpadne na určitý počet menších skupin, z nichž každá se skládá ze všech individuí, která mají jeden ze zvolených druhých znaků. Tímto způsobem pokračujeme, až dojdeme ke skupinám, které se vyznačují tím, že každá z nich obsahuje jenom jedno individuum nebo více individuí, která již nechceme dále rozlišovat. Když je klasifikace hotová, patří ke každému individuu množiny G určitá posloupnost jeho znaků, která se skládá z jistého prvního znaku, z dalšího druhého znaku atd. Určit dané individuum pomocí dané klasifikace znamená určit tuto posloupnost znaků.

Je-li na příklad množina G říše rostlinná, volíme (podle A. v. WETTSTEINA) pro její individua, t. j. rostliny, první znaky dva, a to:

a_1) tělo rostliny se skládá z kořene, osy a listů,
a_2) tělo rostliny není v tyto části rozlišeno.

Tím se říše rostlinná rozpadá na dvě skupiny, z nichž jedna se skládá ze všech rostlin, majících první znak a_1, t. zv. Cormophyta, a druhá ze všech rostlin, majících první znak a_2, jež jsou bez zvláštního názvu.

Pro individua skupiny Cormophyta volí se druhé znaky opět dva: a_{11}) archeogonie nejsou, a_{12}) archeogonie jsou, a tím se skupina Cormophyt rozpadá na dvě menší skupiny, a to na Phanerogamae a Cryptogamae. Pro individua zmíněné skupiny bez zvláštního názvu, mající první znak a_2, volí se další znaky, a tím vzniknou menší skupiny (kmeny) jako: Myxophyta, Schizophyta, Zygophyta, atd.

Na př. sněženka (Galanthus nivalis L.) je určena posloupností 12 znaků, z nichž první je znakem skupiny Cormophyta (tělo se skládá z kořene, osy a listů), druhý je znakem skupiny Phanerogamae (archeogonie nejsou) atd., celkem 12 znaků.

Nuže v konkretních případech se může státi, že takové určení individua není možné, na př. proto, že individuum je poškozené nebo pathologické, nebo proto, že k zjištění některého znaku nemáme potřebných prostředků. Může se státi, že dovedeme určit na daném individuu několik prvních znaků, avšak nedovedeme určit znak následující. V takových případech nelze dané individuum pomocí dané klasifikace určit. Z této situace vyvstává otázka, zda není možné sestrojit dvě klasifikace téže množiny individuí, klasifikace, které by byly sestrojeny na základě různých voleb znaků a které by byly mezi sebou zladěny tak, aby bylo možno užívat znaků z obou klasifikací současně a tím se vyhnouti některým znakům z jedné i z druhé klasifikace, které bychom v konkretních případech určit nedovedli. Problém takto položený je zajisté velmi obtížný a jeho řešení vyžaduje široké průpravy matematické. Skutečně byl tento problém vyřešen a konstrukce zladěných klasifikací nalezena úvahami, vyplývajícími z obsáhlé theorie rozkladů množin (J. ŠKRÁŠEK, Spisy, vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 316, [1949]). Chtěl bych zdůraznit, že přes toto principiální rozřešení daného problému bude konkretní sestrojení zladěných klasifikací v kterémkoli vědním oboru pravděpodobně vždycky vynikajícím vědeckým výkonem. K jeho úspěšnému provedení bude zajisté třeba úzké spolupráce matematiků s příslušnými odborníky, aby potřebné znaky hledaných zladěných klasifikací mohly býti zvoleny v souhlase s obsažnou matematickou theorií a ovšem tak, jak se v přírodě skutečně vyskytují.

V závěru své přednášky bych uvedl citát ze statě sovětských matematiků I. M. VINOGRADOVA a N. I. MUSCHELIŠVILI (Sovětská matematika, vyd. Svoboda [1951], str. 43; srov. V. I. LENIN, Vybrané spisy, sv. 1, čes. vyd. [1950], str. 47), který vyjadřuje, s odkazem na slova STALINOVA, odpovědné plnění úkolů sovětskými matematiky:

»Soustředěnou, družnou prací na nejtěžších ústředních problémech současné matematiky a neustálým hledáním nových souvislostí těchto problémů a jejich řešení s nejtěžšími problémy příbuzných věd — fysiky, astronomie a bezprostředně s úkoly socialistické výstavby, sovětští matematici dokazují, že znají své povinnosti jako představitelé „oné vědy, která se neuzavírá před lidem, která se nestraní lidu, nýbrž je ochotna sloužit lidu, ochotna dát lidu k disposici všechny své vymoženosti, která slouží lidu nikoli z donucení, nýbrž dobrovolně, ráda".«

Резюме.

Предыдущая статья содержит лекцию о „Задачах и путях математики", которую автор прочитал на XXV годичном собрании Моравскосилезской академии естественно-исторических наук в г. Брно в феврале 1952 г. В лекции были изложены следующие главные пункты: 1. Доказательства о принадлежности математики к естественным наукам и отношение ее к реальности. 2. Внешние и внутренние импулсы прогресса и развития математики. 3. Открытие и значение неэвклидовской геометрии. 4. Пример значения новейших математических методов в теории классификаций.