Otakar Borůvka

Теория глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Дифференциальные уравнения, Minsk, 12, 1976, 1347-1383

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500160

АВГУСТ 1976 г., ТОМ XII, № 8

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.925.14

ТЕОРИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. БОРУВКА

Введение. Теория глобальных свойств обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка действительных переменных — предмет этой обзорной статьи — восходит к проблеме определения взаимных глобальных преобразований этих уравнений. Она начала развиваться более 20 лет тому назад ([9, стр. 243], [5]).

Основополагающей в теории преобразований обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка является классическая статья Е. Е. Куммера 1834 года ([9], 11.1). В ней рассматриваются преобразования уравнений

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{a}$$

$$Y''+P(z)Y'+Q(z)Y=0 \tag{A}$$

посредством подстановки переменных вида

$$z=z(x), \qquad Y(z)=m(x)y(x). \tag{T}$$

В основе рассуждений Куммера лежит дифференциальное уравнение третьего порядка, называемое в настоящее время уравнением Куммера и записанное им в виде

$$2\frac{d^3z}{dzdx^2}-3\left(\frac{d^2z}{dzdx}\right)^2-Z\frac{dz^2}{dx^2}+X=0, \tag{Aa}$$

где Z и X — функции переменных z и x, зависящие от коэффициентов P, Q и p, q уравнений (A) и (a).

Дальнейшее развитие в XIX веке в этом направлении связано с распространением рассуждений Куммера на линейные уравнения высших порядков. Последователи Куммера, в особенности E. Laguerre, F. Brioschi, G. H. Halphen, A. R. Forsyth, S. Lie и P. Appell, изучали линейные дифференциальные уравнения высших порядков и, в частности, в связи с так называемой проблемой эквивалентности. Эта проблема состоит в определении необходимых и достаточных условий для взаимного преобразования уравнений

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +p_n(x)y=0, \tag{a_n}$$

$$Y^{(n)}+P_1(z)Y^{(n-1)}+\ \dots\ +P_n(x)Y=0 \tag{A_n}$$

($n \geqslant 2$) посредством подстановки переменных вида (T). P. Stäckel и позже S. Lie и J. Wilczynski показали, что (T) является самым общим преобразованием переменных, сохраняющим свойство линейности и порядок дифференциального уравнения ([9], 22.1).

Результаты Куммера и его последователей в XIX веке, относящиеся к взаимным преобразованиям линейных дифференциальных уравнений, носят локальный характер. Это присуще также и более поздним работам, посвященным этой теме.

Изучение глобальных преобразований линейных дифференциальных уравнений n-го порядка и, в частности, ответ на вопрос, когда и какими преобразованиями (T) два уравнения (a_n), (A_n) с вещественными коэффициентами можно взаимно преобразовать на полных интервалах их определения, оставался открытым. Возможность решения этой проблемы предоставлялась на основе постепенных шагов. Задача первого этапа — глубоко проникнуть в глобальные свойства уравнений второго порядка и решить проблему преобразования в этом простейшем случае; на следующих этапах необходимо было распространить полученные результаты на уравнения порядка $n \geqslant 2$.

Линейные уравнения второго порядка заслуживают особого внимания не только вследствие многочисленных приложений в области физики и техники вообще, но также и с точки зрения теории преобразований, так как только в случае $n=2$ можно каждые два уравнения взаимно локально преобразовать.

Цель настоящей статьи — изложить современное состояние вышеприведенных вопросов и проследить хотя бы в общих чертах за их развитием в течение 20 лет, приведшим к возникновению обширных частей единой теории.

Рассматриваемые нами в дальнейшем рассуждения основаны на классической теории линейных уравнений второго порядка. Некоторые понятия и результаты этой теории, пока они носят глобальный характер, являются составной частью новой теории, другие нужно было углубить или расширить, чтобы удовлетворить поставленным целям. Это прежде всего относится к понятию фазы, имеющему в классической теории своим аналогом значение угла при преобразованиях параметрических уравнений интегральных кривых в полярные координаты. Поэтому понятию фазы в нашей теории принадлежит первостепенное методическое значение и на нем основана главная часть последующих рассуждений.

Учитывая цель статьи, читателю предлагается обратить внимание на основные понятия и результаты исследуемой теории, которая излагается по большей части без приведения второстепенных подробностей и доказательств. Для дополнения наших рассуждений можно воспользоваться монографиями [8, 9, 10] и публикациями, приведенными в списке литературы в конце настоящей статьи.

Последняя глава настоящей статьи органически связана с предыдущими. Ее содержание — обзор новейших результатов в глобальных преобразованиях линейных уравнений n-го порядка. Она написана доцентом Ф. Нойманом, которому я выражаю сердечную благодарность за помощь в процессе работы над настоящей статьей.

Содержание. I. Вводная часть; II. Теория фаз; III. Преобразования Куммера; IV. Теория дисперсий; V. Алгебраическая теория колеблющихся уравнений; VI. Колеблющиеся уравнения с элементарными дисперсиями первого рода; VII. Основы теории глобальных преобразований линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

I. ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

1. Исходная ситуация. Предметом нашего исследования являются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка вида

$$y''=q(t)y. \qquad (q)$$

Предположим, что функция q, которую будем называть также носителем уравнения (q), определена и непрерывна в некотором открытом ограниченном или неограниченном интервале $j=(a, b)$. В зависимости от условий мы иногда будем требовать и более высокой степени ее гладкости. Знаком C_j^k обозначим класс всех действительных функций, определяемых в интервале j и имеющих в нем непрерывные производные порядка k $(=0, 1, \ldots)$.

Дифференциальные уравнения вида (q) называются уравнениями Штурма—Лиувилля или уравнениями Якоби. В дальнейшем будем для краткости применять второе название. Каждое уравнение (a) с коэффициентами из C_j^k можно подходящим преобразованием привести к форме (q) с носителем $q(t)\in C_j^k$.

Под интегралом уравнения (q) подразумеваем каждое его решение, определенное в полном интервале j. Известно, что через каждую точку (t_0, y_0), $t\in j$, проходит в каждом направлении y_0' только один интеграл уравнения (q): $y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_0'$. Тождественно нулевой интеграл обычно не учитывается.

По языковым соображениям мы переносим понятия, определяемые для уравнений (q), на носители q и говорим, например, о решениях или интегралах носителя q.

Каждой упорядоченной паре решений u, v в интервале $i\subset j$ уравнения (q) соответствует определитель Вронского (вронскиан) $w=uv'-u'v$, значение которого всегда постоянно. Решения u, v линейно независимы или зависимы в зависимости от того, равняется или не равняется нулю вронскиан упорядоченной пары u, v (или же v, u). Решения u, v линейно зависимы, если они или их первые производные имеют общий корень.

Множество всех интегралов уравнения (q) представляет собой 2-мерное линейное пространство $\mathbf{r}$, так называемое интегральное пространство уравнения (q). Каждая упорядоченная пара линейно независимых интегралов u, v уравнения (q) составляет базис u, v пространства $\mathbf{r}$. Каждый интеграл $y\in\mathbf{r}$ однозначно определен своими координатами c_1, $c_2(=\mathrm{const})$ относительно (u, v): $y=c_1u+c_2v$; наоборот, каждой точке (c_1, c_2) декартова пространства соответствует точно один интеграл $y\in\mathbf{r}$ с координатами c_1, c_2 относительно (u, v). Базисы пространства называются также базисами уравнения (q) или носителя q.

Рассмотрим уравнения (q), (Q) в интервалах j, J. Обозначим при помощи $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ их интегральные пространства. Каждый выбор их базисов (u, v), (U, V) (вронскианы: w, W) однозначно определяет так называемое линейное отображение p пространства $\mathbf{r}$ на $\mathbf{R}$ и обратное ему линейное отображение p^{-1} пространства $\mathbf{R}$ на $\mathbf{r}$:

Для $y=c_1u+c_2v(\in\mathbf{r})$ имеет место $py=c_1U+c_2V(\in\mathbf{R})$; для $Y=C_1U+C_2V(\in\mathbf{R})$ имеет место $p^{-1}Y=C_1u+C_2v(\in\mathbf{r})$ $(c_1, c_2; C_1, C_2=\mathrm{const})$.

Число $\chi p=w:W$ называется характеристикой отображения p и не зависит от выбора определяющих базисов. Отображение p называется нормированным относительно данных чисел $t_0\in j$, $T_0\in J$, если для $y\in\mathbf{r}$, $y(t_0)=$

$=0$ справедливо $(py)(T_0)=Y(T_0)=0$ Это произойдет тогда и только тогда, когда

$$u(t_0)V(T_0)-v(t_0)U(T_0)=0.$$

2. Теоремы по расположению корней. Расположение корней интегралов уравнения (q) и их производных подчиняется некоторым закономерностям, описанным в следующих так называемых теоремах по разделению корней. Первой из них является классическая теорема Штурма. Учитывая единый характер их содержания и доказательств, мы приводим эти теоремы в общем виде.

Пусть u, v — независимые интегралы уравнения (q), $t_1<x_1$ — числа в j.

1. Пусть $u(t_1)=u(x_1)=0$, $u(t)\neq 0$ для $t\in(t_1, x_1)$. Тогда интеграл v имеет точно один корень в (t_1, x_1).

Далее предположим, $q(t)<0$ для $t\in j$.

2. Пусть $u'(t_1)=u'(x_1)=0$, $u'(t)\neq 0$ для $t\in(t_1, x_1)$. Тогда функция v' имеет точно один корень в (t_1, x_1).

3. Пусть $u'(t_1)=u(x_1)=0$, $u(t)\neq 0$ для $t\in(t_1, x_1)$. Если $t_2<t_1$, $v'(t_2)=0$, то интеграл v имеет корень $x_2\in(t_2, x_1)$. Если $v(x_2)=0$, $x_2>x_1$, то функция v' имеет корень $t_2\in(t_1, x_2)$.

4. Пусть $u(t_1)=u'(x_1)=0$, $u(t)\neq 0$ для $t\in(t_1, x_1)$. Если $t_2<t_1$, $v(t_2)=0$, то функция v' имеет корень $x_2\in(t_2, x_1)$. Если $v'(x_2)=0$, $x_2>x_1$, то интеграл v имеет корень $t_2\in(t_1, x_2)$.

Доказательства этих теорем единым образом основаны на свойствах первых производных функций $u:v$, $u':v'$, uu'; vv' ([9], 2.3).

3. Сопряженные числа. Пусть $t\in j$ и u, v обозначают произвольные интегралы уравнения (q) такие, что $u(t)=0$, $v'(t)=0$.

Число $x\in j$ называется сопряженным 1-го, 2-го, 3-го, 4-го рода с числом t, если 1) $u(x)=0$; 2) $v'(x)=0$; 3) $u'(x)=0$; 4) $v(x)=0$.

Число x, сопряженное $\varkappa$-го рода с t ($\varkappa=1, 2, 3, 4$), называется также $\varkappa$-сопряженным с t, т. е. слева или справа $\varkappa$-сопряженным с t в зависимости от того, справедливо ли $x<t$ или $x>t$.

По этому определению числа слева (справа) $\varkappa$-сопряженные с t, $\varkappa=1, 2, 3, 4$, совпадают с корнями соответствующей функции u, v', u', v, расположенными слева (справа) от числа t. В связи с этим мы определяем n-е слева (справа) $\varkappa$-сопряженное с числом t число x следующим образом: x является n-м из этих корней, расположенным слева (справа) от числа t; $n=1, \ldots$

Рассматривая сопряженные числа 2-го, 3-го и 4-го родов, мы ограничиваемся уравнениями (q) с отрицательным носителем: $q(t)<0$, $t\in j$. Для этих уравнений в полном объеме справедливы теоремы по расположению корней (I, 2).

Если x—n-е слева (справа) λ-сопряженное с t число, $\lambda=1, 2$, то t—n-е справа (слева) λ-сопряженное с x число. С учетом этой симметрии числа x, t называются взаимно λ-сопряженными или просто λ-сопряженными.

Теорема ([9], 3.12). *Для каждого базиса (u, v) уравнения (q) и чисел t, $x\in j$, $t\neq x$, соответственно справедливо*

$$1.\ u(t)v(x)-u(x)v(t)=0,\quad 2.\ u'(t)v'(x)-$$
$$-u'(x)v'(t)=0,\quad 3.\ u(t)v'(x)-u'(x)v(t)=0 \qquad (1)$$

тогда и только тогда, когда

1) t, x — 1-сопряженные числа; 2) t, x — 2-сопряженные числа; 3) x — 3-сопряженное с t число или t — 4-сопряженное с x число.

Предметом рассуждений относительно $\varkappa$-сопряженных чисел ($\varkappa=1$, 2, 3, 4) является (преимущественно) изучение понятий так называемых основных чисел, основных интегралов и основных последовательностей и главных базисов отдельных родов уравнения (q).

Пусть $R_\varkappa(S_\varkappa)$ обозначает множество чисел $t \in j$, у которых существуют слева (справа) сопряженные числа $\varkappa$-го рода.

Если $R_\varkappa \cup S_\varkappa = \varnothing$, то мы говорим, что уравнение (q) не имеет сопряженных чисел $\varkappa$-го рода и называем его несопряженным рода $\varkappa$ или $\varkappa$-несопряженным уравнением.

Если $R_\varkappa \cup S_\varkappa \neq \varnothing$, то мы говорим об уравнении (q) с $\varkappa$-сопряженными числами. В этом случае множества $R_\varkappa$, $S_\varkappa$ в зависимости от условий являются или пустыми или непустыми, и в последнем случае они могут быть снизу или сверху ограниченными или неограниченными.

Пусть $R_\varkappa \neq \varnothing$ $(S_\varkappa \neq \varnothing)$. Если множество $R_\varkappa(S_\varkappa)$ снизу (сверху) ограничено, то оно имеет нижнюю (верхнюю) грань $r_\varkappa(s_\varkappa)$, которая лежит в j или совпадает с $a(b)$. Если оно снизу (сверху) неограничено (что может произойти только в случае $a=-\infty$ $(b=\infty)$), то положим $r_\varkappa=a=-\infty$ $(s_\varkappa=b=\infty)$. Число $r_\varkappa(s_\varkappa)$ называется левым (правым) основным числом $\varkappa$-го рода уравнения (q).

На понятии (правого) основного числа рода λ $(=1, 2)$ основано понятие левого (правого) основного интеграла рода λ уравнения (q), а на понятии этих интегралов основано понятие основных последовательностей рода $\varkappa$ $(=1, 2, 3, 4)$ уравнения (q). Члены основных последовательностей рода $\varkappa$, лежащие в j, являются так называемыми значительными числами рода $\varkappa$ уравнения (q). С понятием основных интегралов связано понятие главных базисов уравнения (q). См. [9], 3.4—3.9.

4. Классификация уравнений (q). Все интегралы уравнения (q) имеют или только конечное или только бесконечное число корней в j.

В первом случае мы говорим об уравнении (q) конечного типа или неколеблющемся уравнении. Под типом уравнения (q) мы подразумеваем натуральное число m, определяемое следующим образом: уравнение (q) имеет интегралы с m корнями, но не имеет интеграла с $m+1$ корнями.

Во втором случае мы говорим об уравнении (q) бесконечного типа. В качестве типа мы присваиваем ему символ ∞. Иначе говоря, уравнение (q) называется слева или справа колеблющимся или просто колеблющимся, если корни его интегралов накопляются только к левому концу a или только к правому концу b, или же к обоим концам a, b интервала j. Уравнения (q) слева или справа колеблющиеся называются односторонне колеблющимися.

Более подробную классификацию уравнений (q) получим, учитывая свойства их 1-сопряженных чисел ([9], 3.10). Для краткости изложения мы пропускаем в следующей части этого параграфа «1-» и соответственно «рода 1».

a. У р а в н е н и е (q) т и п а m; $\infty > m \geqslant 1$. В зависимости от того, $m=1$ или $m \geqslant 2$, уравнение (q) является или несопряженным или уравнением с сопряженными числами. В первом и втором случаях имеет место один и только один из следующих случаев: или существует точно один интеграл уравнения (q) (за исключением линейно зависимых с ним), имеющий в j точно $m-1$ корней, или существуют базисы (u, v), члены которых u, v имеют точно $m-1$ корней.

В первом случае уравнение (q) называется специальным, во втором — общим. Если $m \geqslant 2$, то существует левое (правое) основное число $r_1(s_1)$ уравнения (q), принадлежащее j, следовательно, $a < r_1$ $(b > s_1)$.

Левые (правые) основные интегралы уравнения (q) являются интегралами с корнем $r_1(s_1)$; они имеют в j точно $m-1$ корней. Корни $(r_1=)$ $a_1<a_2<\ldots<a_{m-1}$, $(s_1=)$ $b_{-1}>b_{-2}>\ldots>b_{-m+1}$ каждого левого (правого) основного интеграла образуют левую (правую) основную последовательность уравнения (q); его наименьшим (наибольшим) членом является $r_1(s_1)$. Числа $a_1, \ldots, a_{m-1}$; $b_{-1}, \ldots, b_{-m+1}$ являются значительными числами уравнения (q).

Для чисел a_μ, b_μ ($\mu=0, 1, \ldots, m-1$; $a_0=a$, $b_0=b$) справедливы следующие неравенства:

$$(a<)\, b_{-m+1}\leqslant a_1<b_{-m+2}\leqslant \ldots \leqslant a_r<b_{-m+r+1}\leqslant a_{r+1}< \ldots$$
$$\ldots \leqslant a_{m-2}<b_{-1}\leqslant a_{m-1}(<b);$$

при этом имеет место или только $=$ или только $<$. Если множество левых основных интегралов уравнения (q) совпадает с множеством правых, то это же отношение справедливо для левой и правой последовательностей, что происходит тогда и только тогда, когда числа r_1 и s_1 взаимно сопряжены или равняются друг другу. В таком случае существует точно один интеграл уравнения (q) (за исключением линейно зависимых с ним интегралов), имеющий в j точно $m-1$ корней, а именно интеграл с корнями $b_{-m+1}=a_1, \ldots, b_{-1}=a_{m-1}$, так что уравнение (q) является специальным. Если множество левых основных интегралов уравнения (q) не совпадает с множеством правых основных интегралов, то имеет место то же самое для левой и правой основных последовательностей. В этом случае существуют базисы уравнения (q), члены которого имеют в j точно $m-1$ корней, и поэтому уравнение (q) является общим. Базисы уравнения (q), члены которых представлены левым и правым основными интегралами, называются главными базисами. Каждый интеграл уравнения (q), имеющий в некотором интервале $(a_\mu, b_{-m+\mu+1})$ корень ($\mu=0, 1, \ldots, m-1$), имеет в интервале j m корней; все остальные интегралы уравнения (q) имеют в j точно $m-1$ корней.

b. У р а в н е н и я (q) т и п а ∞. Уравнения (q) типа ∞ — это уравнения с сопряженными числами. В зависимости от того, является уравнение (q) слева или справа колеблющимся или же просто колеблющимся, мы получим $a=r_1<s_1<b$ или $a<r_1<s_1=b$, или же $a=r_1<$ $<s_1=b$. В первом (втором) случае существуют правые (левые) основные интегралы уравнения (q), т. е. интегралы с корнем $s_1(r_1)$. Корни каждого правого (левого) основного интеграла образуют правую (левую) основную последовательность уравнения (q); это бесконечная последовательность с наибольшим (наименьшим) членом $s_1(r_1)$.

О двух уравнениях (q), (Q) говорим, что они того же характера, если или оба того же конечного типа m, $m\geqslant 1$, и являются оба общими или оба специальными, или если каждое из них односторонне колеблющееся, или если оба колеблющиеся.

5. Сопровождающее уравнение. Предположим, что $q(t)\neq 0$ для $t\in j$; $q(t)\in C_j^2$.

Дифференциальное уравнение $(\hat{q}_1)$ с носителем

$$\hat{q}_1(t)=q(t)+\sqrt{|q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)'' \qquad (t\in j)$$

назовем первым сопровождающим уравнением относительно (q), или первым сопровождающим уравнением.

Носитель $\hat{q}_1$ можно записать в виде

$$\hat{q}_1(t)=q(t)-\frac{1}{2}\frac{q''(t)}{q(t)}+\frac{3}{4}\left(\frac{q'(t)}{q(t)}\right)^2$$

или короче

$$\hat{q}_1(t)=q(t)-\left\{\int_{t_0}^{t} q(\sigma)d\sigma,\, t\right\}\qquad (t_0\in j),$$

где символ $\{\quad\}$ обозначает производную Шварца функции $\int_{t_0}^{t} q(\sigma)d\sigma$, вычисленную в точке t. Отметим, что для $X\in C_j^3$, $X'\neq 0$ для $t\in j$

$$\{X, t\}=\frac{1}{2}\frac{X'''}{X'}-\frac{3}{4}\left(\frac{X''}{X'}\right)^2\qquad (\in C_j^0).$$

Связь между уравнениями (q), $(\hat{q}_1)$ устанавливает следующая

Теорема. *Для каждого интеграла уравнения (q) функция $y_1(t)=y'(t):\sqrt{|q(t)|}$ является интегралом уравнения $(\hat{q}_1)$; наоборот, для каждого интеграла y_1 уравнения $(\hat{q}_1)$ функция $y_1\sqrt{|q(t)|}$ является производной y' точно одного интеграла y уравнения (q)* ([9], *1.9*).

Линейное отображение $\underline{p}$ интегрального пространства $\mathfrak{r}$ уравнения (q) на интегральное пространство $\mathfrak{r}_1$ уравнения $(\hat{q}_1)$: $\underline{p}:\mathfrak{r}\ni y\mapsto y_1=y':\sqrt{|q(t)|}\in\mathfrak{r}_1$ называется проекцией пространства $\mathfrak{r}$ на $\mathfrak{r}_1$; интегралы y, y_1 называются взаимно сопряженными или просто сопряженными.

Вронскианы базисов (u, v), $(\underline{p}u, \underline{p}v)$ пространств $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ одинаковы: $\underline{\chi}\underline{p}=1$.

Если уравнение (q) относится к типу $m(m\geqslant 1)$, то $(\hat{q}_1)$ относится к типу не больше $m+1$; если (q) является слева или справа колеблющимся или просто колеблющимся, то то же самое верно для $(\hat{q}_1)$.

При наличии соответствующих предположений для носителя q можно определить n-е сопровождающее уравнение относительно (q), $(\hat{q}_n)$ как первое сопровождающее уравнение относительно $(\hat{q}_{n-1})$; $n=1, 2, \ldots, \hat{q}_0=q$.

Понятие сопровождающего уравнения рассматривалось с различных точек зрения в ряде дальнейших работ [7, 18, 19, 20].

6. Центроаффинная дифференциальная геометрия плоских кривых. Эта геометрия представляет собой теорию свойств кривых на плоскости, которые инвариантны при преобразованиях параметра и при центроаффинных преобразованиях координат.

Под плоской кривой $\mathfrak{K}$ или просто под кривой $\mathfrak{K}$ подразумеваем множество точек, заданное значениями некоторой векторной функции $x(t)$ с компонентами $u(t)$, $v(t)$; предполагаем $u, v\in C_j^k$, $j=(a, b)$, $k\geqslant 2$. Функция x называется прообразом кривой $\mathfrak{K}$; $u(t)$, $v(t)$ — параметрические координаты кривой $\mathfrak{K}$ относительно двух координатных векторов x_1, x_2 с началом O, t — так называемый параметр кривой $\mathfrak{K}$. Для простоты мы говорим о кривой (x), которую относим к классу C_j^k. Обозначаем

$$[x^{(\mu)}, x^{(\nu)}]=u^{(\mu)}v^{(\nu)}-u^{(\nu)}v^{(\mu)},$$

μ, ν $(=0, 1, \ldots)$ — порядки производных функций u, v.

Преобразованием параметра $T=T(t)$ получим другие прообразы $X(T)$ кривой (x). Мы ограничиваемся функциями T со следующими свойствами: $T \in C^k_j$, $T' \neq 0$ для $t \in j$. В этом случае $T(j)$ $(=J)$ представляет собой открытый интервал с функцией $t(T)$, обратной по отношению к $T(t)$. Два числа $t \in j$, $T \in J$, для которых $T = T(t)$, $t = t(T)$, называем гомологическими. Величины прообразов x, X в двух гомологических числах t, T дают одинаковую точку кривой $(x) = (X)$.

Кривая (x) перейдет посредством каждого центроаффинного преобразования C, т. е. линейного однородного преобразования ее координат с определителем $\neq 0$, в кривую (Cx). Мы говорим, что (Cx) или Cx является C-представителем кривой (x) или прообраза x, т. е. представителем кривой (x) или прообраза x. Преобразованием параметра $T = T(t)$ прообраз $x(t)$ кривой $\mathfrak{K}$ перейдет в ее прообраз $X(T)$ и прообраз $Cx(t)$ кривой $C\mathfrak{K}$ — в ее прообраз $CX(T)$.

Под дифференциальным центроаффинным инвариантом кривой $\mathfrak{K}$, т. е. инвариантом кривой $\mathfrak{K}$, подразумеваем скалярную функцию f векторов, определенную на множестве представителей прообразов и производных порядка не больше n, которая при каждом выборе представителей $\bar{x}(t)$, $\bar{X}(T)$ двух прообразов $x(t)$, $X(T)$ кривой $\mathfrak{K}$ в любых двух гомологических числах $t \in j$, $T \in J$ принимает то же самое или отличающееся лишь знаком значение:

$$f(\bar{x}(t), \bar{x}'(t), \ldots, \bar{x}^{(n)}(t)) = \delta f(\bar{X}(T), \dot{\bar{X}}(T), \ldots, \overset{(n)}{\bar{X}}(T)),$$

$\delta = \pm 1$, n — порядок инварианта. В случае $\delta = 1$ говорим об абсолютном инварианте.

Кривая (x) называется регулярной, если $[x, x'] \neq 0 \neq [x', x'']$ для $t \in j$. Это понятие не зависит от выбора прообраза x при преобразованиях с приведенными свойствами. Регулярная кривая отличается тем, что ни одна из ее касательных не проходит через начало координат, она локально выпукла и без точек перегиба.

Из инвариантов 2-го и 3-го порядков кривой (x) известны так называемые (центроаффинная) ориентированная дуга s и (центроаффинная) кривизна k кривой (x) ([9], 4.5)

$$s(t) = \operatorname{sgn}[x, x'] \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left| \frac{[x', x'']}{[x, x']} \right|} \, d\sigma \qquad (t_0, t \in j), \tag{2}$$

$$k(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[x, x'] \sqrt{\left| \frac{[x, x']}{[x', x'']} \right|} \left[3 \frac{[x, x'']}{[x, x']} - \frac{[x', x''']}{[x', x'']} \right].$$

Функция s, данная формулой (2), представляет собой элемент однопараметрического семейства функций

$$s_\alpha(t) = \operatorname{sgn}[x, x'] \int_{t_0}^{t} \frac{|[x', x'']|^\alpha}{|[x, x']|^{3\alpha - 1}} \, d\sigma \qquad (\alpha > 0),$$

а именно $s(t) = s_{1/2}(t)$. Для $\alpha = 1/3$ или $\alpha = 1$ получим ориентированные дуги кривой (x) в смысле В. Бляшке (аффинный унимодулярный инвариант) или двухкратное число ориентированной дуги в смысле Л. А. Сантала (центроаффинный унимодулярный инвариант) ([26], 593—596).

Подобно этому можно рассматривать более общие формы дальнейших инвариантов ([26, 607—614], [21, 27, 23]). В последней из этих работ, в частности, показано, что периодичности инварианта не достаточно для того, чтобы кривая была замкнутой.

Вернемся к дифференциальному уравнению (q) и предположим $q\in C^1_j$. Каждый базис (u, v) уравнения (q) определяет кривую $\mathfrak{K}$ с параметрическими координатами $u(t)$, $v(t)$; кривую $\mathfrak{K}$ будем называть интегральной кривой уравнения (q). $\mathfrak{K}$ является регулярной тогда и только тогда, когда $q\neq 0$ для $t\in j$. В этом случае ее ориентированная дуга s и кривизна k выражаются формулами ([9], 4.6):

$$s(t)=\operatorname{sgn} w\int_{t_0}^{t}\sqrt{|q(\sigma)|}\,d\sigma,\qquad k(t)=\operatorname{sgn} w\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)';$$

$$w=uv'-u'v;\qquad t_0,\ t\in j.$$

Аналогичным образом

$$s_\alpha(t)=\operatorname{sgn} w\,|w|^{1-2\alpha}\int_{t_0}^{t}|q(\sigma)|^\alpha d\sigma.$$

II. ТЕОРИЯ ФАЗ

1. Полярные координаты. Первый подход к теории глобальных преобразований уравнений Якоби открывает классическое преобразование интегральных кривых в полярные координаты.

Рассмотрим интегральную кривую уравнения (q), определяемую базисом (u, v) этого уравнения ($t\in j$). Преобразованием координат u, v в полярную форму получим

$$u(t)=r(t)\sin\alpha(t),\qquad v(t)=r(t)\cos\alpha(t),$$

при этом $r(t)=\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}$, $\operatorname{tg}\alpha(t)=u(t):v(t)$, $t\in j$. Функция α однозначно определена тем, что она в интервале j непрерывна и удовлетворяет в нем, за исключением нулевых точек функции v, предыдущему уравнению, и ее величина в данном числе $t_0\in j$ находится в интервале $[0, 2\pi)$. Функция α в j строго монотонная и ее значения образуют некоторый интервал J. Общий интеграл y уравнения (q) выражается формулой

$$y(t)=k_1r(t)\sin(\alpha(t)+k_2)\qquad (t\in j);$$

k_1 ($\neq 0$), $0\leqslant k_2<\pi$ обозначают произвольные постоянные.

С другой стороны, рассмотрим уравнение (—1): $\ddot Y=-Y$, $T\in J$. Его общий интеграл $Y(T)=k_1\sin(T+k_2)$, $T\in J$. Очевидно, справедливо: $Y\alpha(t)=(1:r(t))y(t)$, $t\in j$, где для краткости пишем $Y\alpha(t)$ вместо $Y[\alpha(t)]$ (эти сокращения использованы и в дальнейшем). Приходим к тому, что функции $1:r$ и α реализуют преобразование (T) уравнения (—1) в уравнение (q) на целых интервалах j, J.

2. Амплитуды. Пусть (u, v) — базис уравнения (q), w — его вронскиан, $t\in j$. Функции

$$r=\sqrt{u^2+v^2},\quad s=\sqrt{u'^2+v'^2}\qquad (t\in j)$$

называются первой и второй амплитудой базиса (u, v). Очевидно, $r(t)>0$, $s(t)>0$ для $t\in j$, $r(t)\in C^2_j$, $s(t)\in C^1_j$.

Функции r, s удовлетворяют нелинейным уравнениям второго порядка ([9], 5.2):

$$r''=qr+\frac{w^2}{r^3}; \quad s''=qs+\frac{w^2q^2}{s^3}+\frac{q'}{q}s';$$

первое уравнение задано в j, второе — в каждой части i интервала j в которой $q\neq 0$ и существует q'.

3. Первые фазы базисов уравнения (q). Под первой фазой базиса (u, v) уравнения (q), т. е. под фазой базиса (u, v) или просто фазой, подразумеваем всякую функцию α в интервале j, которая в нем непрерывна и удовлетворяет в нем, за исключением нулей функции v, уравнению

$$\operatorname{tg}\alpha(t)=\frac{u(t)}{v(t)}.$$

По-видимому, существует счетная система первых фаз базиса (u, v). (α), элементы которой взаимно отличаются на целые кратные числа π; (α) называется первой системой фаз базиса (u, v).

Если α является фазой базиса (u, v), то говорим, что базис (u, v) находится над α.

Выберем $t_0 \in j$. Каждому целому числу ν $(=0, \pm 1, \ldots)$ соответствует одна и только одна фаза $\alpha_\nu \in (\alpha)$ такая, что $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi \leqslant \alpha_\nu(t_0) < \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi$; эту фазу можно выразить формулой:

$$\alpha_\nu(t)={}_\nu\mathrm{Arctg}\,\frac{u(t)}{v(t)} \qquad (t\in j).$$

Систему (α) можно считать системой ветвей функции $\mathrm{Arctg}\,(u(t):v(t))$. Если $u(t_0)=0$, то имеем $\alpha_\nu(t_0)=\nu\pi$; если $v(t_0)=0$, то $\alpha_\nu(t_0)=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi$.

Интегралы u, v можно выразить через амплитуду r и произвольную фазу $\alpha_\nu \in (\alpha)$ базиса (u, v) с помощью формул

$$u(t)=\varepsilon_\nu r(t)\sin\alpha_\nu(t), \quad v(t)=\varepsilon_\nu r(t)\cos\alpha_\nu(t) \qquad (t\in j), \tag{3}$$

$\varepsilon_\nu=\pm 1$ — так называемая сигнатура фазы α_ν. Фаза α_ν называется собственной или несобственной (относительно базиса (u, v)) в зависимости от того, $\varepsilon_\nu=1$ или $\varepsilon_\nu=-1$.

Каждая фаза $\alpha\in(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\alpha\in C_j^3, \quad \alpha'\neq 0 \text{ для } t\in j \tag{4}$$

и удовлетворяет уравнениям $(t\in j)$:

$$\alpha'=\frac{-w}{r^2}, \quad \alpha''=2w\frac{rr'}{r^4},$$

$$\alpha'''=2w\left(\frac{q}{r^2}-3\frac{s^2}{r^4}+4\frac{w^2}{r^6}\right), \tag{5}$$

w обозначает вронскиан, r, s — первую и вторую амплитуды базиса (u, v) ([9], 5.5).

Следствие. *Общий интеграл y и носитель q уравнения (q) можно выразить при помощи фазы α:*

$$y(t)=k_1\frac{\sin(\alpha(t)+k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\quad (k_1,\ k_2=\text{const},\ k_1\neq 0\leqslant k_2<\pi),\tag{6}$$

$$q(t)=-\{\alpha,\ t\}-\alpha'^2(t).\tag{7}$$

Далее легко показать, что фаза α в интервале j ограничена или с одной стороны ограничена, а с другой — неограничена, или двусторонне неограничена тогда и только тогда, когда уравнение (q) конечного типа или односторонне колеблющееся, или колеблющееся ([9], 5.4).

4. Первые фазы уравнения (q). Под первой фазой уравнения (q), т. е. под фазой уравнения (q), подразумеваем каждую первую фазу какого-либо базиса уравнения (q).

Над каждой фазой α уравнения (q) находится точно ∞^1 взаимно пропорциональных базисов: $(ku,\ kv)$; $u=\sin\alpha:\sqrt{|\alpha_1|}$, $v=\cos\alpha:\sqrt{|\alpha'|}$; $0\neq k$ — произвольная постоянная. Вронскиан базиса $(ku,\ kv)$ имеет значение $-k^2\operatorname{sgn}\alpha'$.

Пусть α_0, α — фазы уравнения (q). Установим связь между этими фазами. Пусть α — фаза базиса $(u,\ v)$ уравнения (q). Согласно (6), имеем

$$u(t)=c_1\sin(\alpha_0(t)+a):\sqrt{|\alpha_0'(t)|},$$

$$v(t)=c_2\sin(\alpha_0(t)+b):\sqrt{|\alpha_0'(t)|};\qquad c_1\neq 0\neq c_2;\quad 0\leqslant a,\quad b<\pi$$

являются постоянными. Отсюда вытекает

$$\alpha(t)={}_\nu\mathrm{Arctg}\, c\frac{\sin(\alpha_0(t)+a)}{\cos(\alpha_0(t)+b)}\quad\left(\frac{c_1}{c_2}=c\neq 0;\ t\in j\right),\tag{8}$$

а также то, что при любом выборе постоянных $c\neq 0$, $0\leqslant a$, $b<\pi$, ν целое, функция α, определенная формулой (8), является фазой уравнения (q).

Подробнее рассмотрим уравнение (-1) в интервале $J=(-\infty,\ \infty)$ и его фазу $\varepsilon_0(T)=T$. Согласно (8), все фазы этого уравнения выражаются формулой

$$\varepsilon(T)={}_\nu\mathrm{Arctg}\, c\frac{\sin(T+a)}{\sin(T+b)},\tag{9}$$

где постоянные $c,\ a,\ b,\ \nu$ удовлетворяют вышеприведенным условиям.

Фазы уравнения (-1) в интервале $J=(-\infty,\ \infty)$ называются специальными фазами.

Следствие. *При любом выборе фазы α_0 уравнения (q) функции $\alpha(t)=\varepsilon\alpha_0(t)$, составленные из специальных фаз ε и из фазы α_0, являются точно фазами уравнения (q).*

Фазу α уравнения (q) называем нормальной, если у нее есть корень. Очевидно, каждое уравнение (q) допускает нормальные фазы с произвольно заданным корнем.

5. Условия Коши и краевые проблемы для первой фазы уравнения (q). Многие результаты посвящены вопросу определения фаз уравнения (q) при помощи условий Коши или краевых условий ([9], 7.1, 7.2, 7.14—7.16).

Для произвольно ранних чисел $t_0 \in j$; X_0, $X'_0 \neq 0$, X''_0 существует одна и только одна фаза α уравнения (q) с начальными значениями $\alpha(t_0) = X_0$, $\alpha'(t_0) = X'_0$, $\alpha''(t_0) = X''_0$.

Для изучения краевых проблем фаз уравнения (q) существенную роль играют так называемые краевые значения фаз. Под левым (правым) краевым значением фазы α уравнения (q), $t \in j = (a, b)$, подразумеваем число $c = \lim\limits_{t \to a+} \alpha(t)$ $(d = \lim\limits_{t \to b-} \alpha(t))$, допуская при этом $c, d = \pm\infty$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(d-c) = \operatorname{sgn} \alpha'$.

Основной вопрос состоит в том, когда данные числа c, d являются краевыми значениями некоторых фаз уравнения (q).

Ответ. Если уравнение (q): a) типа m общее; b) типа m специальное ($m \geqslant 1$ целое); c) слева колеблющееся; d) справа колеблющееся; e) колеблющееся, то для данных чисел c и d тогда и только тогда существуют фазы уравнения (q) с левым (правым) краевым значением $c(d)$, когда a) $(m-1)\pi < |c-d| < m\pi$; b) $|c-d| = m\pi$; c) $c = \mp\infty$, d конечное; d) c конечное, $d = \pm\infty$; e) $c = \mp\infty$, $d = \pm\infty$.

Отсюда видно, что краевые значения произвольной фазы уравнения (q) однозначно определяют характер уравнения (q).

Далее в связи с этим изучалась главным образом структура множества фаз уравнения (q) с теми же краевыми значениями.

6. Связь между первыми фазами уравнений (q), (Q). Рассмотрим уравнение (q), $t \in j$, и уравнение (Q), $T \in J$. Фаза α уравнения (q) и фаза A уравнения (Q) называются подобными, если $\alpha(j) = \mathrm{A}(J)$ ([9], 9.5). Такое положение произойдет тогда и только тогда, когда $c = C$, $d = D$ или $c = D$, $d = C$; в первом случае называем фазы α, A прямо и во втором случае не прямо подобными; $c(d)$ обозначает левое (правое) краевое значение фазы α и подобно тому $C(D)$ — для фазы Λ. В случае, когда фазы α, A прямо или не прямо подобны, при каждом выборе специальной фазы ε функции $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\mathrm{A}$ являются также фазами уравнений (q), (Q) и они прямо или не прямо подобны. В частности ($\varepsilon(T) = T + \lambda$; $\lambda = \mathrm{conts}$), функции $\alpha + \lambda$, $\mathrm{A} + \lambda$ являются фазами уравнений (q), (Q) и они прямо или не прямо подобны; кроме того, при подходящем выборе λ они являются нормальными.

Итак, если для какой-либо фазы уравнения (q) ((Q)) существуют прямо или не прямо подобные фазы уравнения (Q) ((q)), то это справедливо для каждой фазы уравнения (q) ((Q)).

В дальнейшем важную роль играет исследование определения пар уравнений (q), (Q), допускающих подобные фазы. Показывается ([9], 9.6), что уравнения (q), (Q) допускают подобные фазы тогда и только тогда, когда они одного и того же характера. Если уравнения (q), (Q) одинакового характера и представляют собой уравнения конечного типа или колеблющиеся, то для любой фазы одного уравнения существуют прямо и не прямо подобные фазы второго уравнения; если они односторонне колеблющиеся в том же направлении (в обратных направлениях), то для каждой фазы одного уравнения существуют только прямо (не прямо) подобные фазы второго уравнения.

7. Значительные виды первых фаз. a) Элементарные фазы. Фаза α уравнения (q) называется элементарной, если для любых чисел t, $t + \pi \in j$ справедливо

$$\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn} \alpha'. \tag{10}$$

Очевидно, фаза α является элементарной тогда и только тогда, когда

$$\alpha(t) = t \operatorname{sgn} \alpha' + p(t), \tag{11}$$

где p — π-периодическая функция в $j: p(t+\pi)=p(t)$, при этом $p(t)\in C_j^3$, $\sigma+p'(t)\neq 0$, $\sigma=\operatorname{sgn}\alpha'=\pm 1$. Производные α', α'', α''', ... элементарной фазы α являются периодическими функциями с периодом π.

Из формулы (8) видно: Если какая-нибудь фаза α_0 уравнения (q) является элементарной, то все фазы α уравнения (q) обладают тем же свойством. В этом случае мы говорим об уравнении (q) с элементарными фазами и об элементарном носителе q. Из (6), (7) следует: Любой интеграл y элементарного носителя — полупериодический с π: $y(t+\pi)=-y(t)$ $(t,\ t+\pi\in j)$. Любой элементарный носитель q — периодический с π: $q(t+\pi)=q(t)$, $(t,\ t+\pi\in j)$.

Из (7), (11) вытекает явная форма элементарных носителей:

$$q(t)=-\{\sigma t+p(t),\ t\}-(\sigma+p'(t))^2 \quad (\sigma=\pm 1,\ t\in j). \tag{12}$$

В частности, носитель -1, $t\in j$, является элементарным: $p=0$ для $t\in j$.

С л е д с т в и е. *Специальные фазы (II.4) являются элементарными.*

b). Д и с п е р с н ы е   ф а з ы. Фаза α уравнения (q) называется дисперсной, если в полном интервале j имеет место $\alpha(t)>t$ или $\alpha(t)<t$. В первом случае мы говорим о верхней, а во втором о нижней фазах. С дисперсными фазами мы встречаемся при рассмотрении уравнений с периодическими свойствами интегралов (VI.3).

8. Вторые фазы. В теории фаз рассматриваются, кроме первых фаз, также и так называемые вторые фазы базисов уравнения (q) и вторые фазы этого уравнения. Оказывается, что естественным подходом к этим понятиям является аналогия с первыми фазами, которая заключается в замене членов базиса $(u,\ v)$ уравнения (q) их производными u', v'. Этот метод можно осуществить без всяких затруднений тогда, когда $q(t)\neq 0$ для $t\in j$. В этом случае понятие и свойства вторых фаз аналогичны с первыми фазами. В дальнейшем мы ограничиваемся этим случаем ([9], 5.8—5.13).

Под второй фазой базиса $(u,\ v)$ уравнения (q), т. е. под второй фазой базиса $(u,\ v)$ или под второй фазой, подразумеваем любую функцию β в интервале j, которая в этом интервале непрерывна и удовлетворяет в нем, за исключением нулей функции v', уравнению: $\operatorname{tg}\beta(t)=u'(t):v'(t)$. Из этого определения следует, что существует точно счетная система (β) вторых фаз базиса $(u,\ v)$, элементы которой взаимно отличаются на целые кратные числа π; (β) называется второй системой фаз базиса $(u,\ v)$. Очевидно, $\beta(t)\in C_j^1$.

В случае $q(t)\in C_j^2$ вторая система фаз (β) базиса $(u,\ v)$ уравнения (q) совпадает с первой системой фаз базиса $(u':\sqrt{|q|},\ v':\sqrt{|q|})$, сопровождающего уравнения $(\hat{q}_1)$. Из этого вытекает (при достаточной гладкости носителя q) с применением формул (5) выражение функций β', β'', β''' через q, q', q'', s, s', s''; в частности, $\beta'=wq:s^2$ $(\neq 0$ для $t\in j)$. Из формулы (6) получим выражение производной y' общего интеграла y уравнения (q) в виде

$$y'(t)=\pm k_1\sqrt{|q(t)|}\,\frac{\sin(\beta(t)+k_2)}{\sqrt{|\beta'(t)|}}$$

$$(k_1,\ k_2=\text{const};\quad k_1\neq 0\leqslant k_2<\pi),$$

и из формулы (7) имеем

$$\hat{q}_1(t)=-\{\beta,\ t\}-\beta'^2(t) \quad (t\in j).$$

Между первыми и вторыми фазами того же базиса (u, v) уравнения (q) существует ряд соотношений ([9], 5.14—5.16). В частности, справедливо

$$\beta=\alpha+\operatorname{arccotg}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)' \qquad (t \in j),$$

где arccotg обозначает подходящую ветвь этой функции.

Функция $\Theta=\beta-\alpha$, $t\in j$, образованная из какой-нибудь первой фазы α и второй фазы β того же базиса уравнения (q), называется полярной функцией этого базиса. Эти полярные функции рассматриваются в некоторых геометрических рассуждениях, например при изучении кривых Радона. (Для изучения их свойств см. [9], 6.1—6.12).

Отметим, что под второй фазой уравнения (q) подразумеваем любую вторую фазу какого-нибудь базиса этого уравнения.

III. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КУММЕРА

1. Общие преобразования Куммера. Под преобразованием Куммера или под преобразованием уравнения (Q), $T\in J$, в уравнение (q), $t\in j$, подразумеваем упорядоченную пару функций (m, X), определенных в каком-нибудь открытом интервале $i\subset j$ и обладающих свойством: (1=) $X(i)\subset J$ и для любого интеграла Y уравнения (Q) функции $y_i(t)=$ $=m(t)YX(t)$, $t\in i$, является решением уравнения (q). О функциях m, X предполагается: m, $X\in C_i^2$, $mX'\neq 0$ для $t\in i$.

Функция m называется множителем, функции X — преобразователем или ядром преобразования (m, X). $Y_I(=YX)$ — это часть интеграла Y в I, y_i — часть (единого) интеграла y уравнения (q) в i. Мы говорим, что преобразование (m, X) превращает Y_I в y_i. Более подробное обозначение преобразования (m, X) : $(m, X)_i$.

2. Проблема преобразования. Ее точное содержание — определить все преобразования уравнения (Q) в (q).

Е. Е. Куммер показал ([9], 11.1), что ядро $X\in C^3$ любого преобразования (m, X) уравнения (Q) в (q) там, где оно определено, является решением уравнения

$$-\{X, t\}+Q(X)X'^2=q(t); \qquad (Qq)$$

множитель m определяется ядром с точностью до постоянной c $(\neq 0)$: $m(t)=c:\sqrt{|X'(t)|}$.

3. Свойства преобразований. Рассмотрим произвольное преобразование (m, X) уравнения (Q) в (q), $t\in i(\subset j)$, $X(t)\in I(\subset J)$.

Пусть $t_0\in i$, $T_0=X(t_0)$ $(\in I)$. Выберем произвольную фазу A уравнения (Q) с корнем $T_0:\mathrm{A}(T_0)=0$. Пусть (U, V) — произвольный базис уравнения (Q) над A такой, что $U(T_0)=0$. По предположению, функции $u_i=m\cdot UX$, $v_i=m\cdot VX$, $t\in i$, являются решениями уравнения (q) и, следовательно, частями в i (единых) интегралов u, v этого уравнения; очевидно $u(t_0)=0$, $\operatorname{sgn} v(t_0)=\operatorname{sgn} m\cdot\operatorname{sgn} V(T_0)$. Так как $m\cdot X'\neq 0$ для $t\in i$, то (u, v) является базисом уравнения (q). Пусть α — некоторая фаза этого базиса с корнем $t_0:\alpha(t_0)=0$. Следовательно, для $t\in i$, $v(t)\neq 0$ имеем: $\operatorname{tg}\alpha=u:v=u_i:v_i=UX:VX=\operatorname{tg}\mathrm{A}X$, откуда вытекает

$$\alpha(t)=\mathrm{A}X(t) \quad \text{или} \quad X(t)=\mathrm{A}^{-1}\alpha(t) \qquad (13)$$

для $t\in i$; A^{-1} означает функцию, обратную к A. Из второй формулы следует $X\in C_i^3$. Сравнивая производные Шварца обеих частей ([9], 1.8) и применяя формулы (7), из первой формулы получаем, что X является решением уравнения Куммера (Qq).

Для амплитуд r, R базисов (u, v), (U, V) в интервале i имеем

$$r^2 = u^2 + v^2 = u_i^2 + v_i^2 = m^2(U^2X + V^2X) = m^2R^2X.$$

Следовательно, $m^2 : r^2 = 1 : R^2X$ и, далее, согласно (5), $m^2 = (w : W) \times \times (1 : X')$. Здесь w, W — вронскианы базисов (u, v), (U, V). Отсюда имеем

$$m = \frac{c}{\sqrt{|X'|}}, \quad c = \operatorname{sgn} v(t_0) \cdot \operatorname{sgn} V(T_0) \cdot \sqrt{\left| \frac{w}{W} \right|}, \tag{14}$$

$$c = \text{const} \neq 0, \quad t \in i.$$

Результат: $(m, X)_i = (c : \sqrt{|X'|}, X)_i$; функция X однозначно определена подходящими нормальными фазами α, A уравнений (q), (Q) в смысле (13) и c $(\neq 0)$ является подходящей постоянной.

4. Преобразования при помощи фаз. Пусть α, A — произвольные нормальные фазы уравнений (q), (Q) с корнями $t_0 \in j$, $T_0 \in J$: $\alpha(t_0) = = \mathrm{A}(T_0) = 0$ и пусть $c \neq 0$ постоянная.

Произвольные интегралы y, Y уравнений (q), (Q) (согласно (6)) имеют вид

$$y(t) = k_1 \frac{\sin(\alpha(t) + k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \quad Y(T) = K_1 \frac{\sin(\mathrm{A}(T) + K_2)}{\sqrt{|\mathrm{A}'(T)|}}, \tag{15}$$

где k_1, k_2, K_1, $K_2 = \text{const}$, $k_1 \neq 0 \neq K_1$, $0 \leqslant k_2$, $K_2 < \pi$, $t \in j$, $T \in J$.

Пусть $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ — интегральные пространства уравнений (q), (Q).

Обозначим через P_c отображение пространства $\mathbf{R}$ на $\mathbf{r}$, определяемое равенствами $k_1 = cK_1$, $k_2 = K_2$; подобно p_c отображение пространства $\mathbf{r}$ на $\mathbf{R}$ определяется равенствами $K_1 = \frac{1}{c} k_1$, $K_2 = k_2$. Отображения P_c, p_c — простые и взаимно обратные.

Очевидно, p_c представляет собой линейное отображение пространства $\mathbf{r}$ на $\mathbf{R}$, определяемое базисами $(\sin\alpha : \sqrt{|\alpha'|}, \cos\alpha : \sqrt{|\alpha'|})$, $(\sin \mathrm{A} : (c\sqrt{|\mathrm{A}'|}), \cos \mathrm{A} : (c\sqrt{|\mathrm{A}'|}))$, и оно нормировано относительно чисел t_0, T_0; вронскианы определяющих базисов имеют представления $w = -\operatorname{sgn}\alpha'$, $W = -\frac{1}{c^2}\operatorname{sgn}\mathrm{A}'$, так что

$$\chi p_c = c^2 \operatorname{sgn}\alpha' \operatorname{sign}\mathrm{A}'. \tag{I.1}$$

Следовательно, из $\alpha(t_0) = \mathrm{A}(T_0) = 0$ и того факта, что функции α, A строго монотонны, следует существование одной и только одной пары взаимно обратных функций X, x в некоторых открытых интервалах $k \subset j$, $K \subset J$, $X(k) = K$, $x(K) = k$, удовлетворяющих в них тождественно уравнениям:

$$\mathrm{A}X(t) = \alpha(t), \quad \alpha x(T) = \mathrm{A}(T)$$

или (16)

$$\mathrm{A}^{-1}\alpha(t) = X(t), \quad \alpha^{-1}\mathrm{A}(T) = x(T).$$

Функции X, x имеют в точках t_0 или T_0 значени T_0 или t_0, и они принадлежат в интервалах k или K к классу C^3, а их производные удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}'XX' = \alpha' \qquad \mathrm{A}''XX'^2 + \mathrm{A}'XX'' = \alpha'', \\ \alpha' x x' = \mathrm{A}', \qquad \alpha'' x x'^2 + \alpha' x x'' = \mathrm{A}''. \end{gathered} \tag{17}$$

Из (15), (16) следует

$$\begin{gathered} \frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}} YX(t) = (P_c Y)(t) \qquad (= y(t)), \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x'(T)|}} yx(T) = (p_c y)(T) \qquad (= Y(T)) \end{gathered} \tag{18}$$

для $t \in k$, $T \in K$. Эти уравнения можно заменить одним уравнением

$$c \sqrt[4]{|x'(T)|}\, Y(T) = \sqrt[4]{|X'(t)|}\, y(t) \qquad (X(t) = T \in K, \quad x(T) = t \in k). \tag{19}$$

Р е з у л ь т а т. Упорядоченная пара $(c : \sqrt{|X'|},\ X)$ является пр образованием Куммера уравнения (Q) в (q), преобразующим часть Y каждого интеграла $Y \in \mathbf{R}$ в часть y_k интеграла $\overline{P_c Y} \in \mathbf{r}$: подобно этому пар $\left(\frac{1}{c} : \sqrt{|x'|},\ x\right)$ является преобразованием Куммера уравнения (в (Q), преобразующим часть y_k любого интеграла $y \in \mathbf{r}$ в часть Y_K инт грала $p_c y \in \mathbf{R}$. Ядра X, x взаимно обратны.

Приведенные преобразования $(c : \sqrt{|X'|},\ X)$, $\left(\frac{1}{c} : \sqrt{|x'|},\ x\right)$ называются обратными; мы говорим, что они образованы нормальными фазами уравнений (q), (Q).

В расположении интервалов определения k, K функций X, x в интервалах j, J можно легко обнаружить следующее. Интервалы k, K зависят от отношений между краевыми значениями фаз α, A. Во всех случаях графики функций X, x проходят от контура к контуру области $j \times J$ или $J \times j$. Особенный случай, когда они проходят диагонально, соответствует равенствам $k = j$, $K = J$ и произойдет тогда и только тогда, когда фазы α, A подобны. Например, в случае, когда функция X возрастает и интервалы j, J конечны, график функции X имеет один из следующих видов (рис. 1) (диагональный ход обозначен толстой линией).

Отметим, что уравнение (19) допускает физическую интерпретацию ([9], 25.1, 25.2).

5. Решение проблемы преобразования. О преобразовании Куммера $(c : \sqrt{|X'|},\ X)_i$ уравнения (Q) в (q) говорим, что оно является частью преобразования $(c : \sqrt{|X^{*\prime}|},\ X^*)_i$ уравнения (Q) в (q), если $i \subset i^* (\subset j)$ и $X = X^*$ для $t \in i$.

Согласно результатам гл. III, п. 3, любое преобразование (m, X) уравнения (Q) в (q) является частью некоторого преобразования уравнения (Q) в (q), образованного подходящими нормальными фазами этих уравнений. Этим дано решение проблемы преобразования.

Все преобразования уравнения (Q) в (q) совпадают с преобразованиями уравнения (Q) в (q), образованными нормальными фазами этих уравнений.

6. Полные преобразования. Преобразование $(T\equiv)$ $(c:\sqrt{|X'|},\ X)_i$ уравнения (Q) в (q) называется полным, если $i=j$, $X(i)=J$.

Очевидно, (T) является полным преобразованием тогда и только тогда, когда оно преобразует любой интеграл Y уравнения (Q) в некоторый интеграл уравнения (q). В этом случае также и обратное преобразование $\left(\frac{1}{c}:\sqrt{|x'|},\ x\right)_I$ уравнения (q) в (Q) является полным $I=J$, $x(I)=j$ и преобразует каждый интеграл y уравнения (q) в некоторый интеграл Y уравнения (Q). Кратко будем говорить о полных взаимных преобразованиях уравнений (q), (Q).

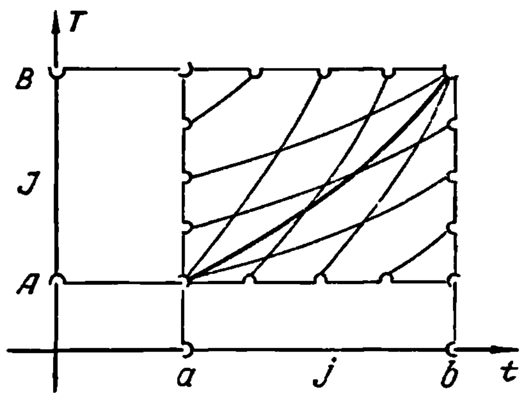

Рис. 1

Предположим, что преобразование (T) полное. Существуют нормальные фазы α, A уравнений (q), (Q) такие, что $\alpha(t)=\mathrm{A}X(t)$ для $t\in j$. Тогда для их краевых значений c, d или C, D справедливо $c=C$, $d=D$ или $c=D$, $d=C$ в зависимости от того, функция X возрастает или убывает. Это значит, что фазы α, A прямо или не прямо подобные, так что преобразование (T) образовано подобными нормальными фазами уравнений (q), (Q). Наоборот, нетрудно установить, что каждое преобразование уравнения (Q) в (q), образованное подобными нормальными фазами, является полным.

Результат. *Полные взаимные преобразования уравнений (q), (Q) образованы подобными нормальными фазами уравнений (q), (Q)* и только ими.

Отсюда и из гл. II п. 6 следует: полные взаимные преобразования уравнений (q), (Q) существуют тогда и только тогда, когда эти уравнения того же характера (1.4).

Если уравнения (q), (Q) одинакового характера и представляют собой уравнения конечного типа или они колеблющиеся, то существуют их полные взаимные преобразования как с возрастающими, так и с убывающими ядрами; если они односторонне колеблющиеся в том же направлении (в обратных направлениях), то существуют полные взаимные преобразования только с возрастающими (убывающими) ядрами.

Отметим, что каждое уравнение *(q)* допускает полное преобразование в себя.

Теория полных преобразований уравнений Якоби позволяет вывести канонические типы носителей этих уравнений ([9], 27.4).

7. Уравнение Куммера. Под решением уравнения Куммера

$$-\{X,\ t\}+Q(X)X'^2=q(t) \qquad (Qq)$$

подразумеваем функцию X в интервале $i\subset j$ со свойствами $X\in C_i^3$, $X'\neq 0$ для $t\in i$, которая удовлетворяет этому уравнению в i. В частности, $X(i)\subset J$.

Свойства решения уравнения *(Qq)* являются свойствами ядер преобразований уравнения (Q) в (q). Мы знаем (см. гл. III, п. 3), что ядро каждого преобразования уравнения *(Q)* в *(q)* представляет собой решение уравнения *(Qq)*. Наоборот, любое решение уравнения *(Qq)* является ядром преобразования уравнения *(Q)* в *(q)* (см. следующую теорему 1 и теоремы [9], 24.1; 23.1):

1. Существование и однозначность решения уравнения (Qq). *Для произвольных чисел* $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, $X'_0 \neq 0$, X''_0 *существует одно и только одно широчайшее решение* X *уравнения* (Qq), *определяемое в некотором интервале* $(t_0 \in)\ k \subset j$ *с начальными значениями* $X(t_0)=X_0$, $X'(t_0)=X'_0$, $X''(t_0)=X''_0$; *«широчайший» означает, что всякое решение уравнения* (Qq) *с теми же начальными значениями является частью функции* X.

Пусть α, A — фазы уравнений (q), (Q), которые в точках t_0, X_0 удовлетворяют следующим равенствам:

$$\alpha(t_0)=\mathrm{A}(X_0); \qquad \alpha'(t_0)=\mathrm{A}'(X_0)X'_0;$$

$$\alpha''(t_0)=\mathrm{A}''(X_0)X'^2_0+\mathrm{A}'(X_0)X''_0.$$

Тогда решение X выражается через фазы α, A формулой $X(t)=\mathrm{A}^{-1}\alpha(t)$ $(t \in k)$.

2. Обратные функции к решениям уравнения (Qq). *Обратная функция ко всякому решению уравнения* (Qq) *является решением уравнения* (qQ). *Между обратными решениями* $X(t)$, $x(T)$ *уравнений* (Qq), (qQ) $t \in i$ $(\subset j)$, $T \in I$ $(\subset J)$ *во всяких двух гомологических числах* $T=X(t)$, $t=x(T)$ *имеет место симметрическое отношение*

$$Q(X)X'+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{X'}\right)''=q(x)x'+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x'}\right)''.$$

3. Функции, составленные из решений уравнений $(Q_\mu Q_\nu)$, $(Q_\nu Q_\rho)$; $\mu, \nu, \rho=1, 2$; $Q_1=Q$, $Q_2=q$. *Пусть* X, Y — *решения уравнений* $(Q_\mu Q_\nu)$, $(Q_\nu Q_\rho)$ *в интервалах* i, k *и пусть* I, K *означают интервалы их значений. Пусть* $i \cap K \neq \varnothing$, *так что существует сложная функция* $Z=XY$ *в некотором интервале* $\bar{k}(\subset k)$. *Функция* Z *является решением уравнения* $(Q_\mu Q_\rho)$.

Решение X уравнения (Qq) называется полным, если $k=j$, $X(j)=J$.

Полные решения уравнения (Qq) совпадают с ядрами полных преобразований уравнения (Q) в (q). Они существуют тогда и только тогда, когда уравнения (q), (Q) того же характера. Подробнее о структуре множества полных решений уравнения (Qq) в случае общих уравнений конечного типа $m \geqslant 2$ изложено в [9], 27.3.

Случай колеблющихся уравнений (q), (Q) в интервале $j=(-\infty, \infty)$. В этом случае все широчайшие решения уравнений (Qq), (qQ) являются полными. Обратная функция всякого полного решения одного уравнения представляет собой полное решение второго и функция, составленная из полных решений уравнений $(Q_\mu Q_\nu)$, $(Q_\mu Q_\rho)$, $(\mu, \nu, \rho=1, 2, Q_1=Q, Q_2=q)$, представляет собой полное решение уравнения $(Q_\mu Q_\rho)$.

Все полные решения уравнений (Qq), (qQ) даны формулами

$$X=\mathrm{A}^{-1}\varepsilon\alpha, \quad x=\alpha^{-1}\mathrm{E}\mathrm{A} \qquad (t \in j); \tag{20}$$

α, A произвольно, но фиксированно выбранные фазы уравнений (q), (Q) и ε, E означают подходящие или произвольные специальные фазы. Мы видим, что множества полных решений уравнений (Qq), (qQ) выражаются в виде $\{X\}=\mathrm{A}^{-1}\{\varepsilon\}\alpha$, $\{x\}=\alpha^{-1}\{\varepsilon\}\mathrm{A}$, где $\{\varepsilon\}$ означает множество специальных фаз.

Особенно важным случаем уравнения (Qq) $(Q=q)$ является уравнение

$$-\{X, t\}+q(X)X'^2=q(t) \quad (t \in j=(-\infty, \infty)) \tag{qq}$$

(при колеблющемся уравнении (q)). Все его широчайшие решения являются полными и даны формулой

$$X = \alpha^{-1}\varepsilon\alpha \tag{21}$$

с тем же содержанием, что и в (20). Множество полных решений уравнения (qq) выражается формулами $\{X\} = \alpha^{-1}\{\varepsilon\}\alpha$ и вместе с операцией, так называемым естественным умножением, определенной сложением функций, образуют группу; это так называемая группа дисперсий 1-го рода уравнения (q), $\mathfrak{D}_1$.

Если, кроме того, $q<0$ для $t \in j$, $q \in C_j^2$, то существует сопровождающее уравнение $(\hat{q}_1)$, $t \in j$, которое является колеблющимся. Все широчайшие решения уравнения $(q_1 q_1)$ являются полными и даны формулой

$$X = \beta^{-1}\varepsilon\beta, \tag{22}$$

β — произвольно, но фиксированно выбранная вторая фаза уравнения (q). Множество полных решений уравнения $(\hat{q}_1\hat{q}_1)$ выражается в виде $\{X\} = \beta^{-1}\{\varepsilon\}\beta$ и вместе с естественным умножением образует группу — так называемую группу дисперсий 2-го рода уравнения (q), $\mathfrak{D}_2$.

Для $q = -1$, $\alpha(t) = t$ $(\in j)$ имеем: множество полных решений уравнения

$$\{X, t\} + X'^2 = 1 \tag{$-1, -1$}$$

является множеством специальных фаз $\{\varepsilon\}$. Это множество вместе с естественным умножением образует группу, которую называем фундаментальной группой и которую обозначаем через $\mathfrak{E}$. Это группа дисперсий 1-го и соответственно 2-го родов уравнения (-1).

Группы дисперсий 1-го или 2-го родов уравнения (q) можно выразить формулами

$$\mathfrak{D}_1 = \alpha^{-1}\mathfrak{E}\alpha, \qquad \mathfrak{D}_2 = \beta^{-1}\mathfrak{E}\beta, \tag{23}$$

где α, β означают произвольно, но фиксированно выбранную первую или вторую фазы уравнения (q).

IV. ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИЙ

1. Обзор теории дисперсий. Дисперсии являются функциями одной переменной, определенными для уравнений Якоби, прежде всего колеблющихся с сопряженными числами. Они получают значительное применение при исследовании глобальных свойств интегралов уравнений Якоби и в конструктивном интегрировании уравнения Куммера.

Естественной вводной частью теории дисперсий является исследование так называемых центральных дисперсий 1-го—4-го родов колеблющихся уравнений (q), понятие которых непосредственно связано с понятием сопряженных чисел. Свойства центральных дисперсий вытекают из отношений сопряженных чисел к интегралам и фазам уравнения (q), выраженных прежде всего формулами (1). Описание этих свойств является содержанием широкого аналитического аппарата, который позволяет решать многие проблемы глобального характера для уравнений Якоби. Второй частью теории дисперсий является изучение так называемых общих дисперсий. Это функции одной переменной, определенные конструктивно для двух колеблющихся уравнений (q), (Q). Показывается, что общие дисперсии уравнений (q), (Q) и только они представляют собой полные решения уравнения Куммера (Qq). Тем самым дана их связь с проблемой преобразования. И третья часть занимается особыми случаями общих дисперсий, а именно общими дисперсиями уравнений (q), (q); $(\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1)$; $(\hat{q}_1)$, (q); (q), $(\hat{q}_1)$. Это так называемые дисперсии 1-го, 2-го, 3-го, 4-го родов. К ним относятся центральные дисперсии отдельных родов, в свойства которых теория общих дисперсий вносит конструктивный характер.

2. Центральные дисперсии. Рассмотрим уравнение (q), с сопряженными числами $\varkappa$-го рода ($\varkappa=1, 2, 3, 4$). Тогда существует натуральное число n и широчайший интервал $j_{\varkappa,-n}\subset j$ или $j_{\varkappa,n}\subset j$, отличающийся тем, что для $t\in j_{\varkappa,-n}$ или $t\in j_{\varkappa,n}$ существует n-е слева или справа $\varkappa$-сопря-

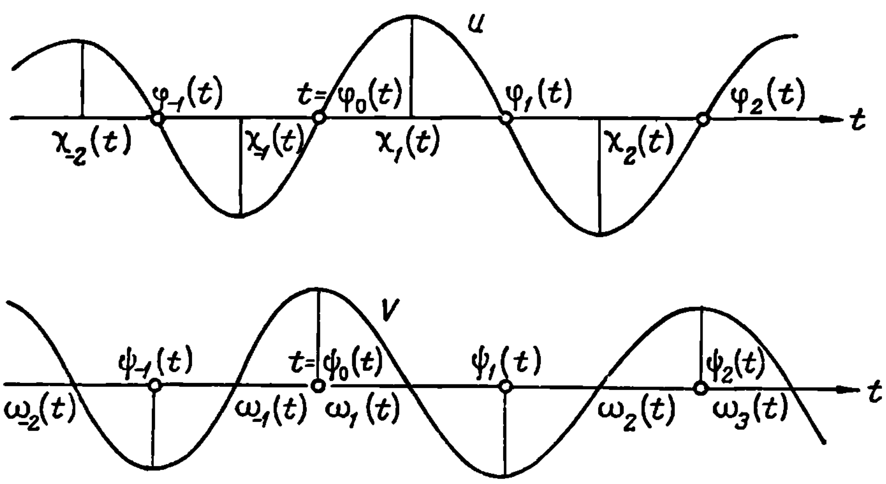

Рис. 2

женное число с t, $\xi_{\varkappa,-n}(t)$ или $\xi_{\varkappa,n}(t)$. Функция $\xi_{\varkappa,-n}(t)$, $t\in j_{\varkappa,-n}$ или $\xi_{\varkappa,n}(t)$, $t\in j_{\varkappa,n}$ называется $-n$-й или n-й центральной дисперсией $\varkappa$-го рода уравнения (q); мы говорим то же самое о центральной дисперсии $\varkappa$-го рода с индексом $-n$ или n.

У того же уравнения (q), но для разных $\varkappa$ и n интервалы $j_{\varkappa,-n}$, $j_{\varkappa,n}$ находятся вообще в довольно сложных отношениях. Если уравнение (q) колеблющееся и $q<0$ для $t\in j$, то оно допускает сопряженные числа всех родов и со всеми ($\neq 0$) целыми индексами в целом интервале j. Следовательно, в таком случае существуют центральные дисперсии уравнения (q) всех родов со всеми целыми ($\neq 0$) индексами в интервале j. В дальнейших рассмотрениях мы учитываем это упрощенное положение и предполагаем, что изучаемые уравнения (q) являются колеблющимися и $q(t)<0$ для $t\in j$. Это второе предположение, как правило, не находит себе применения при изучении центральных дисперсий 1-го рода. Всюду, где говорится о сопровождающем уравнении $(\hat{q}_1)$, мы предполагаем, что $q(t)\in C_j^2$.

Следовательно, пусть (q) является колеблющимся уравнением и $q(t)<0$ для $t\in j$ $(=(a, b))$. Уравнение (q) допускает центральные дисперсии всех родов и со всеми (целыми $\neq 0$) индексами в интервале j. Вместо $\xi_{1,\nu}$, $\xi_{2,\nu}$, $\xi_{3,\nu}$, $\xi_{4,\nu}$ ($\nu=\pm 1, \pm 2, \ldots$) пишем φ_ν, ψ_ν, χ_ν, ω_ν, так что φ_ν, ψ_ν, χ_ν, ω_ν для $\nu=\pm 1, \pm 2, \ldots$ означает центральные дисперсии 1-го, 2-го, 3-го, 4-го родов уравнения (q) с индексом ν. Для $\nu=1$ соответствующие центральные дисперсии называются основными. Для $t\in j$ положим $\varphi_0(t)=t$, $\psi_0(t)=t$.

Положение наглядно изображено на рис. 2.

В частности, имеем (для $t\in j$)

$$\ldots<\varphi_{-1}(t)<\chi_{-1}(t)<t=\varphi_0(t)<\chi_1(t)<\varphi_1(t)<\chi_2(t)<\ldots$$

$$\ldots<\psi_{-1}(t)<\omega_{-1}(t)<t=\psi_0(t)<\omega_1(t)<\psi_1(t)<\omega_2(t)<\ldots \quad (24)$$

Каждая функция φ_ν или ψ_ν является итерацией функции φ_1 или ψ_1 или ее обратной φ_{-1} или ψ_{-1}. Функции χ_ν, $\omega_{-\nu}$ взаимно обратны. (О сложении центральных дисперсий более подробно см. [9], 12.4).

3. Свойства центральных дисперсий. В дальнейшем считаем $\nu=0, \pm1, \ldots$; $\mu=\pm1, \ldots$

Монотонность и гладкость. Каждая центральная дисперсия непрерывно растет от a^+ до b^-. Если $q\in C_j^k$, $k=0, 1, \ldots$, то $\varphi_\nu\in C_j^{k+3}$; ψ_ν, χ_μ, $\omega_\mu\in C_j^{k+1}$.

Функциональные уравнения. При каждом базисе (u, v) уравнения (q) центральные дисперсии в интервале j удовлетворяют функциональным уравнениям

$$u(t)v[\varphi_\nu(t)]-u[\varphi_\nu(t)]v(t)=0; \quad u(t)v'[\chi_\mu(t)]-u'[\chi_\mu(t)]v(t)=0;$$
$$u'(t)v'[\psi_\nu(t)]-u'[\psi_\nu(t)]v'(t)=0; \quad u'(t)v[\omega_\mu(t)]-u[\omega_\mu(t)]v'(t)=0. \tag{25}$$

Абелевы отношения. Из уравнений (25) можно заключить, что при каждой первой или второй фазе α или β уравнения (q) центральные дисперсии в интервале j удовлетворяют так называемым абелевым соотношениям:

$$\alpha\varphi_\nu(t)=\alpha(t)+\nu\pi\operatorname{sgn}\alpha'; \quad \beta\psi_\nu(t)=\beta(t)+\nu\pi\operatorname{sgn}\beta',$$
$$\beta\chi_\mu(t)=\alpha(t)+\frac{1}{2}\overline{(2\mu-\operatorname{sgn}\mu\cdot\operatorname{sgn}\alpha'+\sigma)}\pi, \tag{26}$$
$$\alpha\omega_\mu(t)=\beta(t)+\frac{1}{2}\overline{(2\mu-\operatorname{sgn}\mu\cdot\operatorname{sgn}\beta'-\sigma)}\pi,$$
$$\operatorname{sgn}\alpha'=\operatorname{sgn}\beta'; \quad \sigma=1 \text{ для } 0<\beta(t)-\alpha(t)<\pi;$$
$$\sigma=-1 \text{ для } -\pi<\beta(t)-\alpha(t)<0.$$

Из (26) следует: значения центральных дисперсий в интервале j можно выразить с помощью значений фаз уравнения (q). В частности,

$$\varphi_\nu(t)=\alpha^{-1}[\alpha(t)+\nu\pi\operatorname{sgn}\alpha']; \quad \psi_\nu(t)=\beta^{-1}[\beta(t)+\nu\pi\operatorname{sgn}\beta'].$$

Выражение первых производных. Из соотношений (25) можно так же вывести выражение значений функций φ'_ν, ψ'_ν, χ'_μ, ω'_μ при помощи значений произвольного интеграла u уравнения (q), его производной u' и носителя q:

$$\varphi'_\nu(t)u^2(t)=u^2[\varphi_\nu(t)]; \quad \psi'_\nu(t)q[\psi_\nu(t)]u'^2(t)=q(t)u'^2[\psi_\nu(t)];$$
$$\chi'_\mu(t)q[\chi_\mu(t)]u^2(t)=-u'^2[\chi_\mu(t)]; \quad \omega'_\mu(t)u'^2(t)=-q(t)u^2[\omega_\mu(t)]. \tag{27}$$

Значения функций φ'_ν, ψ'_ν, χ'_μ, ω'_μ можно выразить другими способами с помощью значений амплитуд, фаз и полярных функций уравнения (q) или с помощью значений носителя q. Преимущественно имеют силу формулы (n натуральное, $t\in j$)

$$\varphi'_n(t)=\frac{q(t_1)}{q(t_3)}\cdot\frac{q(t_5)}{q(t_7)}\cdot\ldots\cdot\frac{q(t_{4n-3})}{q(t_{4n-1})}; \quad \chi'_n(t)=\varphi'_n(t)\frac{q(t_{4n-1})}{q(\chi_n(t))};$$
$$\psi'_n(t)=\frac{q(t)}{q(t_2)}\cdot\frac{q(t_4)}{q(t_6)}\cdot\ldots\cdot\frac{q(t_{4n})}{q[\psi_n(t)]}; \tag{28}$$
$$\omega'_n(t)=\psi'_n(t)\frac{q[\psi_n(t)]}{q(t_{4n})};$$

$t_1, \ldots, t_{4n}$ обозначают подходящие числа, удовлетворяющие неравенствам: $\varphi_{\mu-1}(t) < t_{4\mu-3} < \chi_\mu(t) < t_{4\mu-1} < \varphi_\mu(t)$; $\psi_{\mu-1}(t) < t_{4\mu-2} < \omega_\mu(t) < t_{4\mu} < \psi_\mu(t)$ ($\mu=1, \ldots, n$; $t_0=t$). (См. [9], 13.6).

Свойства преобразования. Из формулы (27) легко вытекает, что центральные дисперсии всех родов уравнения (q) являются ядрами полных преобразований, переводящих интегралы уравнения (q) или $(\hat{q}_1)$ на себя или интегралы одного из них на сопряженные интегралы (1.5) второго уравнения. Именно 1) φ_ν; 2) ψ_ν; 3) χ_μ; 4) ω_μ являются ядрами полного преобразования, превращающего каждый интеграл 1) u уравнения (q) в тот же интеграл u; 2) $u_1 = u' : \sqrt{-q}$ уравнения $(\hat{q}_1)$ в тот же интеграл u_1; 3) $u_1 = u' : \sqrt{-q}$ уравнения $(\hat{q}_1)$ в интеграл u уравнения (q); 4) u уравнения (q) в интеграл $u_1 = u' : \sqrt{-q}$ уравнения $(\hat{q}_1)$ в смысле формул

$$u(t) = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\varphi'_\nu(t)}} u[\varphi_\nu(t)], \quad \frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\psi'_\nu(t)}} \cdot \frac{u'[(\psi'_\nu(t)]}{\sqrt{-q[\psi'_\nu(t)]}},$$

$$u(t) = \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{\chi'_\mu(t)}} \cdot \frac{u'[\chi_\mu(t)]}{\sqrt{-q[\chi_\mu(t)]}}, \quad \frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} =$$

$$= \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{\omega'_\mu(t)}} u[\omega_\mu(t)]; \quad (t \in j; \quad \nu = 0, \quad \pm 1, \ldots, \mu = \pm 1, \ldots). \qquad (29$$

Из гл. III п. 2 следует, что φ_ν, ψ_ν, χ_μ, ω_μ — полные решения уравнени Куммера (qq), $(\hat{q}_1\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1 q)$, $(q\hat{q}_1)$ соответственно.

4. Специальные вопросы, рассматриваемые в связи с центральными дисперсиями. В связи с понятием центральных дисперсий рассматр вался ряд вопросов из теории колеблющихся уравнений Якоби анал тического, алгебраического и геометрического характера. Эти функц помогают в исследовании вопросов глобального характера именно те что они описывают связи между значениями интегралов или их пр изводных в сопряженных и, следовательно, взаимно удаленных точк

Характер настоящей статьи позволяет нам привести только кр кий обзор исследуемых вопросов и только в некоторых случаях пр вести главные результаты. Для уравнений (q) принимаем справедл вость до сих пор существующих предположений.

Расширения решения $y(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$ уравнения (q) н интервал j. Для каждого интеграла y уравнения (q) $t \in j$, $y(t_0) \neq 0$ вышеприведенная функция определена в некоторой окрестности числа t_0 и является решением уравнения (q). Это решение можно расширить через особые точки функции $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$ на целый интервал j и, следовательно, на интеграл уравнения (q) и найти для него явное выражение ([9], 14.1).

Определение всех уравнений (q) с заданной основной центральной дисперсией произвольного рода ([9], 13.12).

Изучение уравнений (q) с той же основной центральной дисперсией 1-го рода. Если уравнения (q), $(\bar{q})$ имеют одну и ту же основную центральную дисперсию 1-го рода φ, то в каждом интервале $[x, \varphi(x))$ $x \in j$ существуют по крайней мере (и иногда точно) четыре числа t_i, где q, $\bar{q}$ имеют одинаковые значения $q(t_i)=\bar{q}(t_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ (см. [9], 15.6).

Носители всех уравнений (q) с основной центральной дисперсией 1-го рода φ можно выразить явными формулами. Случай $\varphi(t)=t+\pi$, $j=(-\infty, \infty)$, содержит явное выражение элементарных носителей ([9], 15.7, 15.8).

Уравнения (q) с совпадающими основными центральными дисперсиями 1-го и 2-го рода. Основные центральные дисперсии φ и ψ 1-го и 2-го рода уравнения (q) совпадают тогда и только тогда, когда они являются линейными: $\varphi(t)=\psi(t)=$ $=ct+k(t \in j,\ c>0,\ k=\text{const})$. В зависимости от того, когда $c>1$, $c<1$ или $c=1$ наибольший интервал j имеет вид $(-k:(c-1), \infty)$ или $(-\infty, k:(1-c))$ или $(-\infty, \infty)$ и в последнем случае $k>0$ ([9], 16.1, 16.2)

Произвольная интегральная кривая каждого уравнения (q) с приведенным свойством является (в первом и втором случаях) спиралью с полюсом, находящимся в начале координат O, или она (в третьем случае) замкнута вокруг точки O и центрально симметрическая; касательные в ее точках пересечения с каждой прямой, проходящей через точку O, параллельны.

Носители всех рассматриваемых уравнений (q) можно выразить в явном виде ([9], 17.4).

Уравнения (q) с совпадающими основными центральными дисперсиями 3-го и 4-го рода. В случае этих уравнений основные центральные дисперсии 1-го и 2-го рода совпадают, а именно: $\varphi(t)=\psi(t)=t+k$ $(k=\text{const})$. Их интегральные кривые — это известные кривые Радона, а носители можно выразить в явной форме ([9], 16.5; 17.5).

Кроме этих вопросов в рамках теории центральных дисперсий уравнения (q) характеризуются уравнения, все интегралы которых π-полуриодические или π-периодические $(\varphi_n(t)=t+\pi \operatorname{sgn} n$, для некоторого , далее рассматриваются асимптотические свойства интегралов уравний (q) в связи с распределением их корней, изопериодические свойра интегральных кривых элементарных носителей и пр. (см. литерару настоящей статьи).

5. Общие дисперсии. Рассмотрим колеблющиеся уравнения (q), $\in j$ и (Q), $T \in J$. Пусть $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ — произвольные числа. Пусть p являгся любым линейным отображением интегрального пространства r равнения (q) на интегральное пространство $\mathbf{R}$ уравнения (Q), нормиованным относительно t_0, T_0, и пусть χp является его характеристиой (1.1).

Обозначим φ_ν, Φ_ν центральные дисперсии 1-го рода уравнений (q), (Q), далее, $t_\nu=\varphi_\nu(t_0)$, $T_\nu=\Phi_\nu(T_0)$ и, наконец,

$$j_\nu=[t_\nu, t_{\nu+1}), \quad \bar{j}_\nu=(t_{\nu-1}, t_\nu]; \quad J_\nu=[T_\nu, T_{\nu+1}),$$
$$\bar{J}_\nu=(T_{\nu-1}, T_\nu] \quad (\nu=0, \pm 1, \ldots).$$

Под общей дисперсией уравнений (q), (Q) (по очереди), заданной числами t_0, T_0 и линейным отображением p, подразумеваем функцию X в интервале j, определяемую следующим образом. Для $t \in j_\nu$, $y \in \mathbf{r}$, $y(t)=0$ $X(t)$ является корнем функции $py \in \mathbf{R}$, лежащим в J_ν или $\bar{J}_{-\nu}$, в зависимости от того, $\chi p>0$ или $\chi p<0$, следовательно, $py[X(t)]=0$, $X(t) \in J_\nu$ или $X(t) \in \bar{J}_{-\nu}$.

Всякая общая дисперсия X обладает следующими свойствами ([9], 20.3):

$$X(j)=J; \quad X \in C_j^3, \quad X' \neq 0;$$

если $\chi p>0$: $X(t_\nu)=T_\nu$, $X'>0$; если $\chi p<0$: $X(t_\nu)=T_{-\nu}$, $X'<0$; $\varphi_\nu = X^{-1}\Phi_{\nu \operatorname{sgn} X'}X$ ($\nu=0, \pm 1, \ldots$; $t \in j$). X представляет собой полное решение уравнения Куммера (Qq); наоборот, каждое полное решение этого уравнения является общей дисперсией уравнений (q), (Q).

В случае $j=J=(-\infty, \infty)$ с помощью алгебраических средств была найдена эта характеризация общих дисперсий ([9], 248; 2*):

Функция $\xi \in C_j^3$, $\xi' \neq 0$ для $t \in j$, где она неограничена, является общей дисперсией уравнений (q), (Q) тогда и только тогда, когда она преобразует группу дисперсий 1-го рода уравнения (Q), $\mathfrak{D}_1^*$ на группу дисперсий уравнения (q) $\mathfrak{D}_1$ (см. (23)), в смысле формулы: $\mathfrak{D}_1=\xi^{-1}\mathfrak{D}_1^*\xi$.

6. Дисперсии 1-го—4-го родов. Как уже было сказано (гл. IV, п. 1), под дисперсией 1-го или 2-го, 3-го, 4-го родов подразумеваем общую дисперсию уравнений (q), (q) или $(\hat{q}_1)$, $(\hat{q}_1)$; $(\hat{q}_1)$, (q); (q), $(\hat{q}_1)$. Вышеприведенные результаты, касающиеся общих дисперсий, содержат конструкцию этих функций и описание их свойств. В частности, каждая дисперсия а) 1-го рода; б) 2-го рода; в) 3-го рода; г) 4-го рода является ядром полного преобразования, превращающего всякий интеграл а) u уравнения (q) в некоторый интеграл v того же уравнения (q) (и сохраняющего независимость интегралов); б) u_1 уравнения $(\hat{q}_1)$ в некоторый интеграл v_1 того же уравнения $(\hat{q}_1)$; в) u_1 уравнения $(\hat{q}_1)$ в некоторый интеграл v уравнения (q); г) u уравнения (q) в некоторый интеграл v_1 уравнения $(\hat{q}_1)$, а именно в смысле формул, аналогичных формулам (29), и наоборот ([9], 21.2).

Дальнейшие результаты, касающиеся дисперсий 1-го—4-го родов, были получены исследованием алгебраических структур множеств дисперсий отдельных родов в случае $j=(-\infty, \infty)$ ([9], 21.4—21.6 [39]). Здесь мы ограничимся некоторыми результатами, касающимися структуры группы дисперсий 1-го рода уравнения (q), $\mathfrak{D}_1$:

$\mathfrak{D}_1$ — непрерывная группа с тремя параметрами. Возрастающие дисперсии 1-го рода образуют в $\mathfrak{D}_1$ инвариантную подгруппу $\mathfrak{D}_{10}$ с индексом 2; убывающие дисперсии образуют дополнительный класс относительно $\mathfrak{D}_{10}$. Бесконечная циклическая группа, состоящая из центральных дисперсий 1-го рода уравнения (q), $\mathfrak{F}_1$ является центром подгруппы $\mathfrak{D}_{10}$. Центральные дисперсии 1-го рода уравнения (q) с четными индексами образуют в $\mathfrak{D}_1$ инвариантную подгруппу $\mathfrak{S}_1$, и факторгруппа $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{S}_1$ изоморфна группе квадратных унимодулярных матриц 2-ой степени.

Было уже сказано, что (гл. IV, п. 1) к дисперсиям 1-го—4-го родов принадлежат центральные дисперсии отдельных родов. Центральная дисперсия а) φ_ν; б) ψ_ν; в) χ_μ; г) ω_μ является дисперсией а) 1-го рода, определенной числами t_0, $T_0=\varphi_\nu(t_0)$ и идентичным отображением пространства $\mathfrak{r}$; б) 2-го рода, определенной числами t_0, $T_0=\psi_\nu(t_0)$ и идентичным отображением пространства $\mathfrak{r}_1$; в) 3-го рода, определенной числами t_0, $T_0=\chi_\mu(t_0)$ и проекцией пространства $\mathfrak{r}_1$ на $\mathfrak{r}$; г) 4-го рода, определенной числами $t_0, T_0=\omega_\mu(t_0)$ и проекцией пространства $\mathfrak{r}$ на $\mathfrak{r}_1$ ($\nu=0, \pm 1, \ldots$; $\mu=\pm 1, \ldots$).

V. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕКОЛЕБЛЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ

1. Примечания к некоторым понятиям теории групп. Отметим некоторые понятия и их свойства из теории групп, находящие коренное применение в дальнейших обсуждениях ([10]).

Под носителем (абстрактной) группы $\mathfrak{G}$ подразумеваем множество ее элементов G, для более простого обозначения мы пишем иногда $\mathfrak{G}$ вместо G.

Пусть $\mathfrak{G}$ является (абстрактной) группой, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... ее подгруппы. Для $a\in\mathfrak{G}$, множество $\mathfrak{A}a$ ($a\mathfrak{A}$) является правым (левым) классом элемента a относительно $\mathfrak{A}$. Классы $\mathfrak{A}a$, $a^{-1}\mathfrak{A}$ являются взаимно обратными, иначе говоря, обратными, т. е. они состоят из элементов по два взаимно обратных. Вообще мы имеем $\mathfrak{A}a \mathrel{\underline{\neq}} a\mathfrak{A}$. Если для всякого $a\in\mathfrak{G}$ справедливо равенство, то подгруппа $\mathfrak{A}$ называется инвариантной или же нормальной в $\mathfrak{G}$.

Множество $\{\mathfrak{A}a\}_{a\in\mathfrak{G}}$ $(\{a\mathfrak{A}\}_{a\in\mathfrak{G}})$ представляет собой так называемое правое (левое) разложение группы $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{A}$ (правое или левое разложение) и обозначается через $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$. Эти разложения имеют то же кардинальное число, так называемый индекс подгруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}$. Вообще имеем $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A} \mathrel{\underline{\neq}} \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, и равенство произойдет тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$: в этом случае существует факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

Разложения $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ (всегда) дополнительны. Это значит, существует разложение $\bar{U}$ группы $\mathfrak{G}$ со следующими свойствами: а) любой элемент $\bar{u}\in\bar{U}$ является объединением некоторых элементов разложения $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ и одновременно некоторых элементов разложения $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$; б) всякие два элемента $\bar{a}_p\in(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})\cap\bar{u}$, $\bar{a}_l\in(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})\cap\bar{u}$ отличаются непустым пересечением: $\bar{a}_p\cap\bar{a}_l\neq\varnothing$. Отметим, что $\bar{U}$ представляет собой наименьшее общее покрытие разложений $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$; его элементы называются блоками (относительно $\mathfrak{A}$). Для всякого блока $\bar{u}\in\bar{U}$ существует так называемый обратный блок $\bar{u}^{-1}\in\bar{U}$; этот блок является объединением всех элементов разложения $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A})$, обратных относительно элементов разложения $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A})$, объединением которых является $\bar{u}$. Верно $(\bar{u}^{-1})^{-1}=\bar{u}$. Мы видим, что разложение $\bar{U}$ состоит из блоков по два взаимно обратных. Отметим, что из $a\in\bar{u}\in\bar{U}$ следует $\bar{u}=\mathfrak{A}a\mathfrak{A}$.

Предметом дальнейших исследований в настоящей главе является изучение колеблющихся уравнений (q) в интервале $j=(-\infty, \infty)$ в связи с теорией групп.

2. Фазовые функции. Под фазовой функцией подразумеваем всякую функцию α в интервале $j=(-\infty, \infty)$ со следующими свойствами: 1) $\alpha\in C_j^3$; 2) $\alpha'\neq 0$ для $t\in j$; 3) $\lim\limits_{t\to\sigma\infty}\alpha(t)=\sigma\infty\operatorname{sgn}\alpha'$ $(\sigma=\pm 1)$.

Согласно гл. II, п. 3, каждая (первая) фаза α произвольного (колеблющегося) уравнения (q) $t\in j$ представляет собой фазовую функцию. Наоборот, каждая фазовая функция α представляет собой фазу колеблющегося уравнения (q) с носителем $q(t)=-\{\alpha, t\}-\alpha'^2(t)$, а именно фазу каждого базиса этого уравнения из системы $(c\sin\alpha:\sqrt{|\alpha'|}$, $c\cos\alpha:\sqrt{|\alpha'|})$ $0\neq c=\text{const}$. Учитывая это положение, мы иногда говорим просто о фазах вместо фазовых функций.

Если α является фазой уравнения (q), то мы пишем q_α вместо q. Базис $(\sin\alpha:\sqrt{|\alpha'|}$, $\cos\alpha:\sqrt{|\alpha'|})$ над фазой α можно выразить в виде вектора: $\mathbf{I}(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{|\alpha'|}}\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Если α, β являются фазовыми функциями, то $\alpha\beta$ и α^{-1} тоже являются фазовыми функциями и справедливы формулы ([11])

$$q_{\alpha\beta}(t)=(1+q_\alpha\beta(t))\beta'^2(t)+q_\beta(t), \tag{30}$$
$$q_{\alpha^{-1}}(t)=-1-(1+q_\alpha\alpha^{-1}(t))(\alpha^{-1}(t))'^2, \tag{31}$$

3. Группа фаз. Множество всех фазовых функций вместе с бин ной операцией, данной естественным умножением (гл. III, п. 6), яв ется группой и называется группой фаз; ее обозначение $\mathfrak{G}$. Ее единиц является фазовая функция t $(=\mathrm{id})$.

Содержанием алгебраической теории колеблющихся уравнений является изучение структурных свойств группы $\mathfrak{G}$ и ее отношений к уравнениям (q).

4. Важные подгруппы групп фаз. а) Подгруппа $\mathfrak{G}_0$. Множество всех возрастающих фаз образует в $\mathfrak{G}$ инвариантную подгруппу с индексом 2; ее обозначение $\mathfrak{G}_0$. Дополнительный класс G_1 факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ состоит из всех убывающих фаз.

б) Подгруппы $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^*$, $\bar{\mathfrak{Z}}$. Обозначение: $c_\nu = t+\nu\pi$, $\bar{c}_\nu = -t+\nu\pi$ $(t\in j;\ \nu=0, \pm 1, \ldots)$.

Множества $\bar{\mathfrak{Z}} = \{c_\nu, \ \bar{c}_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$, $\mathfrak{Z} = \{c_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$, $\mathfrak{Z}^* = \{c_{2\nu}\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$ являются носителями подгрупп в $\mathfrak{G}$. Очевидно, $\bar{\mathfrak{Z}} \supset \mathfrak{Z} \supset \mathfrak{Z}^*$. Подгруппа $\mathfrak{Z}$ является инвариантной в $\bar{\mathfrak{Z}}$ с индексом 2, подгруппа $\mathfrak{Z}^*$ — инвариантной в $\mathfrak{Z}$ с индексом 2. $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Z}^*$ — это бесконечные циклические подгруппы с образующими c_1 и c_2: $c_\nu = c_1^\nu$, $c_{2\nu} = c_2^\nu$ для $\nu = 0, \pm 1, \ldots$

Для $\alpha\in\mathfrak{G}$ $\mathfrak{Z}\alpha$ является первой системой фаз каждого базиса $c\mathbf{I}(\alpha)$ уравнения (q_α), $0\neq c=\mathrm{const}$: $\mathfrak{Z}\alpha = (\alpha)$ (гл. II, п. 3). Если $c>0$ или $c<0$, то $\mathfrak{Z}^*\alpha$ является системой несобственных или собственных фаз и $\mathfrak{Z}^*(c_\lambda\alpha)$ — системой несобственных или собственных фаз этого базиса при всяком нечетном λ.

Для $\alpha\in\mathfrak{G}$ $\mathfrak{Z}_\alpha = \alpha^{-1}\mathfrak{Z}\alpha$, $\mathfrak{Z}^*_\alpha = \alpha^{-1}\mathfrak{Z}^*\alpha$ являются подгруппами в $\mathfrak{G}$, а именно бесконечными циклическими подгруппами, сопряженными с $\mathfrak{Z}$ или $\mathfrak{Z}^*$ относительно α с образующими $\varphi_{\operatorname{sgn}\alpha'} = \alpha^{-1}c_1\alpha$, $\varphi_{2\operatorname{sgn}\alpha'} = \alpha^{-1}c_2\alpha$. $\mathfrak{Z}_\alpha$ состоит из центральных дисперсий (1-го рода), $\mathfrak{Z}^*_\alpha$ — из центральных дисперсий с четными индексами уравнения (q_α).

в) Подгруппа $\mathfrak{H}$. Элементарные фазовые функции (гл. II, п. 7) образуют в $\mathfrak{G}$ подгруппу. Это так называемая подгруппа элементарных фаз; ее обозначение $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}$ — нормализатор в $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{Z}$ ([9], 248.5*). Отсюда следует:

Для α, $\beta\in\mathfrak{G}$ уравнения (q_α), (q_β) имеют те же центральные дисперсии тогда и только тогда, когда фазы α, β находятся в том же правом классе относительно $\mathfrak{H}$: $\alpha\in\mathfrak{H}\beta$ или $\beta\in\mathfrak{H}\alpha$ ([9], 15.9).

5. Фундаментальная подгруппа $\mathfrak{E}$. Специальные фазы (гл. II, п. 4) образуют в $\mathfrak{G}$ подгруппу, называемую фундаментальной подгруппой; ее обозначение $\mathfrak{E}$ (гл. III, п. 6). Далее обозначаем: $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}\cap\mathfrak{G}_0$ $E^1 = \mathfrak{E}$ …

Очевидно, $\mathfrak{H}\supset\mathfrak{E}\supset\bar{\mathfrak{Z}}$; $\mathfrak{E}\supset\mathfrak{E}_0\supset\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{E}\supset E_1\supset\bar{Z}_1$ $(=\bar{\mathfrak{Z}}\cap G_1)$.

Каждый элемент $\varepsilon\in\mathfrak{E}$ заменим или обратно заменим с каждым ментом $c_\nu\in\mathfrak{Z}$, если $\varepsilon\in\mathfrak{E}_0$, или $\varepsilon\in G_1: c_\nu\varepsilon = \varepsilon c_\nu$, или $c_\nu\varepsilon = \varepsilon c_{-\nu}$ (ν = $\pm 1, \ldots$). $\mathfrak{Z}$ — центр группы $\mathfrak{E}_0$, инвариантный в $\mathfrak{E}$ ([9], 248.5*).

$\mathfrak{E}$ совпадает с группой дисперсий (1-го рода) уравнения (-1) (п. 6). Отсюда вытекает для $\varepsilon\in\mathfrak{E}: \mathbf{I}(\varepsilon(t)) = U_\varepsilon\mathbf{I}(t)$; U_ε является значно определяемой) унимодулярной матрицей 2-й степени с п ными элементами $\det U_\varepsilon = \operatorname{sgn}\varepsilon'$. Отображение $\varepsilon\to U_\varepsilon$ представл бой гомоморфизм группы $\mathfrak{E}$ на группу всех унимодулярных мат степени, $\mathfrak{U}$, и его ядром является $\mathfrak{Z}^*$. Отсюда следует, что группа $\mathfrak{E}/\mathfrak{Z}^*$ ляется изоморфной с $\mathfrak{U}$.

Нормализатор в $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{E}$ совпадает с $\mathfrak{E}$ ([9], 248.2*).

Пусть α, $A\in\mathfrak{G}$ означают произвольные элементы. Правый клас является точно множеством всех фаз уравнения (q_α) (гл. II, п. 4). О следует, что множество всех колеблющихся уравнений (q), $\{(q)\}$ эквивалентно разложению $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{E}$.

Группа $\mathfrak{E}_\alpha=\alpha^{-1}\mathfrak{E}\alpha$ состоит из дисперсий уравнения (q_α), следовательно, из интегралов уравнения $(q_\alpha q_\alpha)$. Очевидно, она не зависит от выбора фазы уравнения (q_α) : $\mathfrak{E}_\alpha=\mathfrak{E}_{\varepsilon\alpha}$ для $\varepsilon\in\mathfrak{E}$.

Группа $\mathfrak{Z}_{q_\alpha}=\mathfrak{E}_\alpha\cap\mathfrak{E}$ — это так называемый индикатор уравнения (q_α). Она состоит из специальных фаз, лежащих в $\mathfrak{E}_\alpha$, следовательно, из специальных фаз ε, удовлетворяющих так называемому уравнению индикатора уравнения (q_α) : $(1+q_\alpha\varepsilon)\varepsilon'^2=1+q_\alpha$. $\mathfrak{Z}_{q_\alpha}$ содержит группу $\mathfrak{Z}$ или фазу $-t$, или группу $\bar{\mathfrak{Z}}$ тогда и только тогда, когда функция q_α является π-периодической или четной, или π-периодической и одновременно четной ([17]). Например, в случае уравнения Mathieu индикатор совпадает с группой $\bar{\mathfrak{Z}}$ ([17]).

Множество $E_{A,\alpha}=A^{-1}\mathfrak{E}\alpha$ $(\subset\mathfrak{G})$, так называемый комплекс Куммера уравнений (q_A) (q_α), состоит из общих дисперсий уравнений (q_α), (q_A), следовательно, из интегралов уравнения $(q_A q_\alpha)$ (гл. IV, п. 5).

6. Присоединенные и обратные уравнения. Понятия присоединенных и обратных уравнений тесно связаны с понятием блоков относительно подгруппы $\mathfrak{E}$. Всякий блок $\bar{u}$ относительно $\mathfrak{E}$ или просто блок является объединением некоторых элементов каждого из разложений $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{E}$. Всякий элемент первого разложения является множеством всех фаз некоторого уравнения (q). Мы видим, что $\bar{u}$ представляет собой объединение множеств фаз некоторых уравнений (q). Когда множество фаз уравнения (q) является частью блока $\bar{u}$, мы говорим, что уравнение (q) или носитель q относится к $\bar{u}$. Под блоком уравнений (q) подразумеваем множество уравнений, относящихся к тому же блоку.

Уравнения (q), (q^*) или их носители называются присоединенными, когда относятся к тому же блоку. Это понятие рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Из понятия блока следует: уравнение (q^*) присоединено к (q) тогда и только тогда, когда существует специальная фаза ε, превращающая некоторую (и потом каждую) фазу α уравнения (q) в фазу α^* уравнения (q^*) в смысле формулы $\alpha^*=\alpha\varepsilon$. Мы говорим, что уравнение (q^*) возникает из (q) трансляцией фазой ε. Из (30) следует формула

$$q^*(t)=-1+(1+q\varepsilon(t))\varepsilon'^2(t) \qquad (t\in j), \tag{32}$$

…рую можно записать иначе, используя формулу (9). Мы видим, что …и носитель q является π-периодическим, то это же верно и для q^*. …тральные дисперсии 1-го рода уравнений (q) (q^*) связаны отноше…ем $\varphi^*_\nu(t)=\varepsilon^{-1}\varphi_{\nu\,\mathrm{sgn}\,\varepsilon'}\varepsilon(t)$ $(\nu=0, \pm1, \ldots)$. Отсюда в случае …$\varepsilon(t)=t+\pi$: $\varphi^*_n(t)=t+\pi\,\mathrm{sgn}\,n$. Мы видим (гл. IV, п. 4): если все …ралы уравнения (q) будут π-полупериодическими или π-периодиче…, то это верно и для уравнения (q^*). Свойства присоединенных …ений рассматриваются в [17].

…равнение $(\bar{q})$ называется обратным относительно (q), если оно име… фазу $\bar{\alpha}$, которая является обратной функцией для некоторой фазы α уравнения (q), т. е. $\bar{\alpha}=\alpha^{-1}$. Это понятие симметрично: если $(\bar{q})$ является …ратным относительно (q), то (q) будет обратным относительно $(\bar{q})$. …ситель $\bar{q}=q_{\alpha^{-1}}$ дан формулой (31). Справедлива следующая основ…

Теорема об обратных уравнениях. *Уравнения (q), $(\bar{q})$ являются взаимно обратными тогда и только тогда, когда принадлежат к взаимно обратным блокам.*

Отсюда следует, что уравнения, обратные относительно (q), являются точно уравнениями, присоединенными к какому-либо обратному уравнению $(\bar{q})$. Свойства обратных уравнений рассматриваются в [17].

7. Преобразования Куммера базисов и интегралов уравнений (q). Пусть B является базисом уравнения (Q), A — какой-нибудь ее собственной фазой и W — вронскианом. Пусть $c \neq 0$ — произвольное число и $\xi \in \mathfrak{G}$ — произвольная фазовая функция. Применяя преобразования Куммера $T(\xi, c) = (c : \sqrt{|\xi'|}, \xi)$ к координатам базиса B, мы получим базис $T(\xi, c)B$ над фазой $\alpha = \mathrm{A}\xi$ уравнения (q); $q = q_\alpha$. Из соотношений $B = \sqrt{|W|}\,\mathbf{I}(\mathrm{A})$, $T(\xi; c)B = c\sqrt{|W|}\,\mathbf{I}(\alpha)$ видно, что $T(\xi; c)B$ отличается собственной или несобственной фазой α в зависимости от того, $c > 0$ или $c < 0$, и вронскиан $w = c^2 W \operatorname{sgn} \xi'$. С помощью этих данных базис $T(\xi; c)B$ однозначно определен. Всякий интеграл Y уравнения (Q) однозначно определен своими координатами γ_1, γ_2 ($=\mathrm{const}$) относительно $B : Y = (\gamma_1, \gamma_2)B$. Применением преобразования $T(\xi; c)$ к Y получим: $T(\xi; c)Y = (\gamma_1, \gamma_2)T(\xi; c)B$. Это интеграл уравнения (q), и он не зависит от выбора базиса B. Заметим, что $B \mapsto T(\xi; c)B$ является бинарной операцией, присоединяющей к каждому базису B интегрального пространства $\mathbf{R}_Q$ уравнения (Q) и к каждому элементу $\xi \in \mathfrak{G}$ базис $T(\xi; c)B$ интегрального пространства $\mathbf{R}_q$ уравнения (q). Подобно этому $Y \mapsto T(\xi; c)Y$ является бинарной операцией, присоединяющей к каждым двум элементам $Y \in \mathbf{R}_Q$, $\xi \in \mathfrak{G}$ элемент $T(\xi; c)Y \in \mathbf{R}_q$, и эта операция сохраняет независимость интегралов.

8. Абстрактная модель алгебраической теории колеблющихся уравнений (q). Модель состоит из следующих главных составляющих: 1) Абстрактная группа $\mathfrak{G}$; 2) подгруппа $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$; 3) линейные пространства над телом действительных чисел при простом соответствии к элементам разложения $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{E}$; 4) квазинормы базисов линейных пространств. Связи между этими составляющими доставляют аксиомы трех видов I. Аксиомы структур групп $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$. II. Аксиомы связей базисов линейных пространств с элементами разложения $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{E}$; III. Аксиомы квазинорм.

Реализация модели при помощи алгебраической теории колеблющихся уравнений (q) осуществляется реализациями: группы $\mathfrak{G}$ фазовыми функциями, подгруппы $\mathfrak{E}$ специальными фазами элементов разложения $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{E}$ множествами фаз уравнений (q), линейных пространств интегральными и квазинорм вронскианами базисов интегральных пространств.

Модель представляет собой прообраз полной алгебраической теории колеблющихся уравнений (q), рассматриваемой в настоящей главе, и, кроме того, содержит в себе новые сведения по уравнениям (q). Модель рассматривается в [9, 28.1—28.8]; [13].

VI. КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ 1-ГО РОДА

1. Введение. Содержанием настоящей главы является обзор теории (колеблющихся) уравнений (q) в интервале $j = (-\infty, \infty)$, центральные дисперсии (1-го рода) которых являются элементарными. Класс этих уравнений $\mathbf{A}$ замкнут относительно уравнений, присоединенных и обратных. К нему прежде всего принадлежат уравнения (q) с π-периодическими носителями. Упомянутая теория расширяет классическую теорию Флоке, внося в нее новые понятия, методы и результаты в связи с теорией дисперсий. Уравнения класса А рассматриваются в работах [11, 12, 14—16].

2. Уравнения класса А. Согласно определению класса А, уравнение (q) является элементом А тогда, когда все его центральные дисперсии $\varphi_\nu (\nu=0, \pm 1, \ldots)$ удовлетворяют в интервале j уравнению

$$\varphi_\nu(t+\pi)=\varphi_\nu(t)+\pi. \tag{33}$$

Это будет тогда и только тогда, когда функция φ_1 в интервале j удовлетворяет уравнению (33). Из (33) следует $\varphi_\nu(t+\mu\pi)=\varphi_\nu(t)+\mu\pi$ для $\mu=0, \pm 1, \ldots$; функция φ'_ν является π-периодической.

К классу А относятся прежде всего уравнения (q) с элементарными носителями (II.7), так как они характеризуются свойством $\varphi_1(t)=t+\pi$ для $t \in j$. Поэтому, в частности, $(-1) \in$ А.

Каждая дистанция $d_\nu(t)=\varphi_\nu(t)-t$ каждого уравнения $(q) \in$ А $(\nu=0, \pm 1, \ldots)$ является π-периодической.

3. Структура класса А. В дальнейшем $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ снова (гл. V, п. 4.5) означают по очереди группу специальных или элементарных фаз $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$.

Основная теорема. *Если $(q) \in$ А, то для каждой фазы α уравнения (q) имеется фаза $h \in \mathfrak{H}$ такая, что*

$$\alpha(t+\pi)=h\alpha(t) \qquad (t \in j). \tag{34}$$

Наоборот, если для некоторой фазы α уравнения (q) существует фаза $h \in \mathfrak{H}$ со свойством (34), то $(q) \in$ А ([11]).

Схема доказательства. Пусть $(q) \in$ А. Из абелева отношения (IV.3) имеем

$$\alpha[\varphi_1(t)+\pi]-\alpha\varphi_1(t)=\alpha(t+\pi)-\alpha(t).$$

Функция $g(t)=\alpha(t+\pi)-\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению $g\varphi_1(t)=g(t)$, так что функция $g\alpha^{-1}$ является π-периодической и функция $h(t)=t+g\alpha^{-1}(t)$ является элементарной фазой со свойством (34).

Из (34) для $\sigma=\pm 1$ следует: $\alpha(t+\sigma\pi)=h^\sigma\alpha(t)$ $(t \in j)$, и для $\varepsilon \in \mathfrak{E}$, $\alpha^*=\alpha\varepsilon$

$$\alpha^*(t+\pi)=\alpha\varepsilon(t+\pi)=\alpha[\varepsilon(t)+\pi \operatorname{sgn} \varepsilon']=h^{\operatorname{sgn} \varepsilon'}\alpha\varepsilon(t)=h^{\operatorname{sgn} \varepsilon'}\alpha^*(t).$$

Так как $\mathfrak{H}$ является группой, то $h^{\operatorname{sgn} \varepsilon'} \in \mathfrak{H}$ и поэтому класс А является объединением некоторых блоков уравнений (q) (V.6).

Далее из (34) вытекает

$$\alpha[\alpha^{-1}(t)+\pi]=h(t). \tag{35}$$

Левая часть представляет собой основную центральную дисперсию $\bar{\varphi}_1(t)$ уравнения $(q_{\bar{\alpha}^{-1}})$, обратного относительно (q), с фазой $\bar{\alpha}=\alpha^{-1}$ или относительно нее обратную центральную дисперсию $\bar{\varphi}_{-1}$ в зависимости от того, $\alpha'>0$ или $\alpha'<0$. Отсюда вытекает: а) элементарная фаза h в формуле (34) является дисперсной (гл. II, п. 7), а именно верхней или нижней в зависимости от того, $\alpha'>0$ или $\alpha'<0$; б) основная центральная дисперсия каждого уравнения $(\bar{q})$, обратного относительно $(q) \in$ А, является тоже элементарной.

Из б) следует:

Класс А вместо с каждым блоком уравнений (q) содержит также блок уравнений, обратных относительно их.

Далее справедливо

Утверждение. *Класс* А *содержит все уравнения (q) с π-периодическими носителями.*

В самом деле, носитель q является π-периодическим тогда и только тогда, когда вместе с каждой фазой $\alpha(t)$ уравнения (q) функция

$\alpha(t+\pi)$ также является его фазой, или когда для всякой фазы α уравнения (q) существует фаза $\varepsilon \in \mathfrak{C}$ такая, что

$$\alpha(t+\pi) = \varepsilon\alpha(t) \qquad (t \in j). \tag{36}$$

Отсюда и из отношения (34) и из $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{H}$ вытекает утверждение.

Из (36) следует: уравнение (q) с π-периодическим носителем характеризуется тем, что центральные дисперсии уравнений, обратных относительно нее, являются специальными, а также тем, что группа его дисперсий (1-го рода) содержит группу $\mathfrak{Z}$ (гл. V, п. 4б).

Отметим, что носители уравнений, обратных относительно уравнения (q), с π-периодическим носителем не являются, вообще говоря, π-периодическими функциями. Они обладают этим свойством тогда и только тогда, когда центральные дисперсии уравнения (q) являются специальными. В частности, каждый элементарный носитель q является π-периодическим и носитель каждого уравнения, обратного относительно (q), является также π-периодическим.

Структура класса A. Класс A представляет собой объединение некоторого множества $\bar{A}$ блоков уравнений (q). Множество $\bar{A}$ содержит блок $\{(-1)\}$ и с каждым блоком $\bar{u}$ — обратный блок $\bar{u}^{-1}$. К множеству $\bar{A}$ принадлежат именно все блоки уравнений (q) с π-периодическими носителями.

4. Свойства уравнений класса A. Из (34) и (30) следует: уравнение (q) относится к классу A тогда и только тогда, когда для каждой его фазы α существует элементарный носитель H такой, что

$$q(t+\pi) - q(t) = (1 + H\alpha(t))\,\alpha'^2(t) \qquad (t \in j).$$

Из (34) и гл. V п. 4 следует

Теорема. *Если $(q) \in$ A, то $(qc) \in$ A $(c(t) = t+\pi)$ и оба уравнения (q), (qc) имеют одинаковые центральные дисперсии.*

Теория уравнений класса A связана этой теоремой с результатами, касающимися уравнений (q) с одними и теми же центральными дисперсиями (IV.4), и использует их для изучения свойств уравнений класса A. В частности, носители каждых двух уравнений (q), $(qc) \in$ A имеют в каждом интервале $[x, \varphi_1(x))$, $x \in j$, одни и те же значения по крайней мере в четырех точках $t_i \in [x, \varphi_1(x))$, $i = 1, 2, 3, 4$, $q(t_i+\pi) = q(t_i)$.

5. Уравнения (q) с π-периодическими носителями. В теории Флоке к каждому уравнению (q) с π-периодическим носителем присоединяется алгебраическое уравнение $s^2 - As + 1 = 0$, в котором постоянная A дана формулой $A = u(x+\pi) + v'(x+\pi)$; $x \in j$ означает произвольное число и u, v — интегралы уравнения (q) с начальными значениями $u(x) = 1$, $u'(x) = 0$; $v(x) = 0$, $v'(x) = 1$. Корни этого уравнения, так называемые характеристические корни уравнения (q), обозначаем через s_1, s_{-1}. Очевидно, $s_1 s_{-1} = 1$. Далее обозначаем: $m = \min|q(t)|$, $M = \max|q(t)|$, для $t \in j$.

В дальнейшем рассматриваем только (колеблющиеся) уравнения (q) с π-периодическими носителями: $q(t+\pi) = q(t)$ для $t \in j$ $(= (-\infty, \infty))$.

а) Характеристические корни действительные. Число $x \in j$ называем определяющим числом 1-го рода типа n уравнения (q), где n — натуральное число, т. е. определяющим числом типа n, если

$$\varphi_n(x) = x + \pi. \tag{37}$$

Теорема о распределении корней утверждает, что определяющие числа уравнения (q), пока они существуют, будут одного типа.

Основная теорема. *Для каждого определяющего числа x типа n уравнения (q) и его интегралов u, v с приведенными начальными значениями справедливы формулы*

$$u(x+\pi)=(-1)^n[\varphi_n'(x)]^{\frac{1}{2}}; \quad u'(x+\pi)=\frac{1}{2}(-1)^n[\varphi_n'(x)]^{-\frac{3}{2}}\varphi_n''(x),$$
$$v(x+\pi)=0; \quad v'(x+\pi)=(-1)^n[\varphi_n'(x)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Доказательство получим, применяя формулы (29), (37) к интегралам u, v в точке x.

Если характеристические корни уравнения (q) вещественны, то для каждого корня s существует его интеграл y со свойством $y(t+\pi)=$ $=sy(t)$. Так как уравнение (q) является колеблющимся, то для некоторого числа $x\in j$ имеем $y(x)=0$; $y(x+\pi)=0$ и, следовательно, $\varphi_n(x+\pi)=$ $=x+\pi$ с соответствующим $n(\geqslant 1)$. Видно, что корни интеграла y являются определяющими числами уравнения (q).

Следовательно, уравнение (q) допускает определяющие числа тогда и только тогда, когда его характеристические корни s_1, s_{-1} являются действительными. В этом случае справедливы формулы

$$s_1=u(x+\pi)=(-1)^n[\varphi_n'(x)]^{\frac{1}{2}};$$
$$s_{-1}=v'(x+\pi)=(-1)^n[\varphi_n'(x)]^{-\frac{1}{2}}; \tag{39}$$

$x\in j$ означает произвольное определяющее число типа $n(\geqslant 1)$ уравнения (q) и u, v — его интегралы с приведенными начальными значениями.

Из теории Флоке следует, что все интегралы уравнения (q) π-полупериодические (π-периодические) только тогда, когда $s_1=s_{-1}=-1$ ($s_1=s_{-1}=1$) и $v(x+\pi)=u'(x+\pi)=0$. Отсюда и из (38) следует:

Все интегралы уравнения (q) π-полупериодические (π-периодические) тогда и только тогда, когда при подходящем нечетном (четном) n и подходящем $x\in j$ справедливо

$$\varphi_n(x)=x+\pi, \quad \varphi_n'(x)=1, \quad \varphi_n''(x)=0.$$

Если $q(t)<0$ для $t\in j$, то имеет место формула (28). В этом случае можно выразить характеристические корни уравнения (q), s_σ $(\sigma=\pm 1)$ с помощью значений носителя в подходящих точках $(x<)x_1<x_3<\ldots<$ $<x_{4n-1}(<x+\pi)$ в смысле формулы ([15]):

$$s_\sigma=(-1)^n\left(\frac{q(x_1)}{q(x_3)}\cdots\frac{q(x_{4n-3})}{q(x_{4n-1})}\right)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Отсюда для $s=s_1$, s_{-1} вытекает: $(m:M)^{\frac{n}{2}}\leqslant|s|\leqslant(M:m)^{\frac{n}{2}}$, и на основании отношения $\sqrt{m}\leqslant n\leqslant\sqrt{M}$

$$(m:M)^{-\frac{1}{2}\sqrt{M}} \leqslant |s| \leqslant (M:m)^{\frac{1}{2}\sqrt{M}}.$$

б) Характеристические корни комплексные. Число $a \in (0, 1)$ называем определяющим числом 2-го рода типа m уравнения (q), m целое, или просто определяющим числом типа m, в случае, если существует фаза α уравнения (q) со свойством

$$\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + (2m-a)\pi \qquad (t \in j). \tag{40}$$

Все определяющие числа уравнения (q), пока они существуют, представляют собой один тип. В самом деле, если b — определяющее число уравнения (q) типа m', то существует специальная фаза ε, удовлетворяющая в интервале j уравнению $\varepsilon\alpha(t+\pi) = \varepsilon\alpha(t) + (2m'-b)\pi$. Отсюда и из (40) получим

$$\varepsilon(t-a\pi) - \varepsilon(t) = 2(m'-\sigma m)\pi - b\pi \qquad (\sigma = \operatorname{sgn} \varepsilon').$$

Слева стоящая величина находится в интервале $(-\pi, 0)$ или $(0, \pi)$ в зависимости от того, $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Из этого можно легко заключить, что $\sigma = 1$, $m' = m$.

Уравнение (q) имеет характеристические корни комплексные, а именно $s_\sigma = \exp(i\sigma\pi a)$, $0 < a < 1$, $\sigma = \pm 1$, только тогда, когда a является его определяющим числом 2-го рода.

Схема доказательства. Уравнение (q) имеет характеристический корень $\exp(ia\pi)$ тогда и только тогда, когда допускает базис (y_1, y_2) такой, что в j справедливо

$$y_1(t+\pi) = \cos a\pi \cdot y_1(t) - \sin a\pi \cdot y_2(t);$$

$$y_2(t+\pi) = \sin a\pi \cdot y_1(t) + \cos a\pi \cdot y_2(t).$$

Каждая фаза α этого базиса удовлетворяет уравнению вида (40).

в) Закон инерции характеристических корней. Вышеприведенные рассуждения содержат ту идею, что каждое уравнение (q) с π-периодическим носителем допускает определяющие числа 1-го или 2-го рода некоторого типа, однозначно определенного этим уравнением. Об уравнении (q) говорим, что оно категории (i, m) $(i = 1, 2$; m целое), если допускает определяющие числа i-го рода типа m.

Справедлив «закон инерции характеристических корней» ([16]):

Все уравнения (q) с π-периодическими носителями, находящимися в одном блоке, той же самой категории и имеют одни и те же характеристические корни.

Отметим, что все такие уравнения одновременно имеют или не имеют все интегралы π-полупериодические или π-периодические ([16], 527).

Пока речь идет об определении всех блоков уравнений (q) с π-периодическими носителями одной категории и с одними и теми же характеристическими корнями (см. [37]).

VII. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

1. Введение. Эта глава содержит основы теории глобальных преобразований линейных дифференциальных уравнений n-го порядка $(n \geqslant 2)$, и она органически связана с такой теорией в случае $n = 2$. Здесь получены явные глобальные канонические формы уравнений, принадлежащих к каждому классу эквивалентных уравнений (в отличие от локального характера форм Лагера—Форсайта, требующих, кроме того, некоторой гладкости коэффициентов) и рассмотрены геометрические аспекты принятого метода, открывающие путь для решения открытых проблем глобального характера.

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)y=0, \qquad (a)$$

определенное в открытом (ограниченном или неограниченном) интервале j, $\alpha_i \in C^0_j$, $i=1, \dots, n$; $n\geqslant 2$.

2. Глобальные преобразования. Для целого $s\geqslant 0$ **C** означает множество всех векторных функций $\mathbf{g}=(g_1, \dots, g_n)^T$, определенных на интервале j и имеющих в нем непрерывные производные до s-го порядка включительно; $\mathbf{g}$ — вектор-столбец, $\mathbf{c}^T$ означает транспозицию $\mathbf{c}$; $d^r\mathbf{g}/dx^r := (d^r g_1/dx^r, \dots, d^r g_n/dx^r)^T$ означает r-ую производную векторной функции $\mathbf{g}$, которая обозначается также через $\mathbf{g}^{(r)}$. Для $x \in j$ определим $|\mathbf{g}(x)| := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}$ и $S_{n-1} := \{\mathbf{c};\ |\mathbf{c}|=1\}$. Для $\mathbf{g}\in \mathbf{C}^{n-1}_j$ $W[\mathbf{g}](x) := [\mathbf{g}(x), \mathbf{g}'(x), \dots, \mathbf{g}^{(n-1)}(x)]$ означает вронскиан функции $\mathbf{g}$ в x.

Можно показать, что для $f\in C^{n-1}_J$, $f(t)\neq 0$ на J и $h\in C^{n-1}_J$, $dh(t)/dt\neq 0$ на J, $h(J)=j$, справедливо $W[\mathbf{g}](x)\neq 0$ на j тогда и только тогда, когда $W[f\cdot \mathbf{g}h](t)\neq 0$ на J.

Под интегралом уравнения (a) подразумеваем его решение, определяемое на всем интервале j.

Учитывая самую общую форму преобразования (T), мы говорим, что уравнение (a) на интервале j является глобально эквивалентным уравнению

$$Y^{(n)}+A_1(t)Y^{(n-1)}+\ \dots\ +A_n(t)Y=0 \qquad (A)$$

на интервале J, если существуют $f\in C^n_J$, $f(t)\neq 0$ на J и $h\in C^n_J$, $dh(t)/dt\neq 0$ на J, $h(J)=j$ такие, что

$$Y(t) := f(t)\cdot y(h(t)) \qquad (41)$$

представляет собой интеграл уравнения (A) для каждого интеграла y уравнения (a).

На множестве всех уравнений n-го порядка $(n\geqslant 2)$ существует разложение в классы глобально эквивалентных уравнений.

3. Фазы и канонические уравнения. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — n линейно независимых интегралов уравнения (a); эти интегралы образуют базис уравнения (a); обозначим $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)^T$ и запишем уравнение (a) в виде $L[\mathbf{y}]=0$, показывающем, что компоненты векторной функции $\mathbf{y}$ $(y_i\in C^n_j$, $W[\mathbf{y}](x)\neq 0$ на $j)$ являются интегралами уравнения (a).

Мы определяем $\mathbf{v} := \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$. Так как для $x\in j$ справедливо $W[\mathbf{v}](x)\neq 0$ (гл. VII, п. 2), согласно (41), уравнение $L[\mathbf{v}]=0$ на j является глобально эквивалентным $L[\mathbf{y}]=0$ на j.

Выберем произвольно $t_0\in \mathbf{R}$, $\alpha'_0=\pm 1$, $x_0\in j$. Положим

$$\alpha(x) := t_0+\alpha'_0\int\limits_{x_0}^{x} |\mathbf{v}(\sigma)/d\sigma|\, d\sigma.$$

Очевидно, $\alpha\in C^n_j$ и $d\alpha(x)/dx\neq 0$ для $x\in j$.

Функция α представляет собой биекцию интервала j на J и отличается тем, что $\alpha \in C^n_j$, $d\alpha(x)/dx \neq 0$ для $x \in j$. Она называется фазой базиса $\mathbf{y}$; очевидно, она зависит от одной постоянной (t_0) и от ориентации ($\alpha'_0 = \pm 1$). Отметим, что в случае $n=2$ множество всех фаз α, определенных таким образом, совпадает с множеством всех первых фаз уравнения 2-го порядка в смысле гл. II, п. 4.

Пусть $J = \alpha(j)$ и $\mathbf{u} := \mathbf{v}(\alpha^{-1})$. Уравнение $L[\mathbf{u}] = 0$ на интервале J является глобально эквивалентным уравнению $L[\mathbf{v}] = 0$ на j, а следовательно, и уравнению (a). Уравнение $L[\mathbf{u}] = 0$ на J мы называем каноническим уравнением класса глобально эквивалентных уравнений, содержащего (a).

Таким образом, для каждого базиса $\mathbf{y}$ уравнения (a) существуют фазы, зависимые от одной постоянной и от ориентации, определяемые в j. Класс глобально эквивалентных уравнений, содержащий (a), содержит уравнение $L[\mathbf{u}] = 0$ с базисом $\mathbf{u} := (u_1, \ldots, u_n)^T$, $|\mathbf{u}(t)| = 1$, $|d\mathbf{u}(t)/dt| = 1$ для $t \in J$. Этот класс состоит из всех уравнений $L[\mathbf{y}] = 0$ на j, для которых $\mathbf{y}(x) := f(x) \cdot \mathbf{u}(\alpha(x))$, $x \in j$; $f \in C^n_j$ $(f(x) \neq 0)$ и $\alpha \in C^n_j$ $(d\alpha(x)/dx \neq 0$ для $x \in j$, $\alpha(j) = J)$ являются произвольными функциями.

4. Явная форма канонических уравнений. Пусть $L[\mathbf{u}] = 0$ является каноническим уравнением на J, так что $|\mathbf{u}(t)| = 1$, $|d\mathbf{u}(t)/dt| = 1$ или $\mathbf{u} \subset S_{n-1}$, $\mathbf{u}' \subset S_{n-1}$ для $t \in J$. Так как $\mathbf{u} \in C^n_J$ и $W[\mathbf{u}](t) \neq 0$, то в J справедливы формулы Френе ($\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1' &= \mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_2' &= -\mathbf{u}_1 + \alpha_2(t)\,\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{u}_3' &= -\alpha_2(t)\mathbf{u}_2 + \alpha_3(t)\,\mathbf{u}_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{u}_{n-1}' &= -\alpha_{n-2}(t)\,\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_{n-1}(t)\,\mathbf{u}_n \\
\mathbf{u}_n' &= -\alpha_{n-1}(t)\,\mathbf{u}_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (42)
$$

(Сравни, например, Г. Е. Шилов: Математический анализ, ч. 3, § 16.42. М., «Наука», 1970).

Легко показать ([29]), что $\alpha_i \in C^{n-i}_J$, $\alpha_i(t) \neq 0$ для $t \in J$, $i = 2, \ldots, n$ (можно предполагать $\alpha_i(t) > 0$ не уменьшая общности). Наоборот, для произвольных функций α_i, удовлетворяющих этим условиям, можно из (42) исключить $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ и затем получить для $\mathbf{u}_1$ уравнение n-го порядка в канонической форме. Каждый выбор функций $\alpha_i \in C^{n-i}_J$, $\alpha_i(t) > 0$ для $t \in J$ дает каноническую форму некоторого уравнения (a).

Например, для $n=2$, 3 мы получим следующие канонические формы уравнения (a) в (произвольном или подходящем) интервале J:

$$u'' + u = 0,$$

$$u''' - \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} u'' + (1 + \alpha_2^2(t)) u' - \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} u = 0,$$

$\alpha_2 \in C^1_J$, $\alpha_2(t) > 0$ для $t \in J$.

5. Дисперсии. Всякая дисперсия 1-го рода колеблющегося уравнения (q) 2-го порядка в интервале $(-\infty, \infty)$ превращает каждый ее базис опять в базис (§ IV, п. 6). Это свойство способствует расширению понятия дисперсии на уравнения порядка $n \geqslant 2$ ([36]).

Рассмотрим уравнение n-го порядка $L[\mathbf{y}]=0$ ($n\geqslant 2$) на интервале j.

Функция $\xi\in C_I^n$, $d\xi(x)/dx>0$ на I, $I\cup\xi(I)=j$, называется дисперсией уравнения $L[\mathbf{y}]=0$, если существуют $f\in C_I^n$, $f(x)\neq 0$ на I и регулярная постоянная $n\times n$ матрица A со свойством

$$\mathbf{y}(\xi(x))=f(x)\cdot A\cdot\mathbf{y}(x)\qquad (x\in I). \tag{43}$$

В случае $A=E$ или $A=-E$, мы говорим о центральных дисперсиях; E означает единичную матрицу $n\times n$.

Очевидно, что уравнение $L[\mathbf{y}]=0$ всегда имеет тривиальную центральную дисперсию $\xi=\mathrm{id}$ на интервале j. Интересным является следующий результат, подчеркивающий роль уравнений n-го порядка с периодическими коэффициентами ([36]):

Если уравнение $L[\mathbf{y}]=0$ допускает дисперсию $\xi\neq\mathrm{id}$, то оно на каждом интервале, где $\xi(x)\neq x$, глобально эквивалентно уравнению n-го порядка с ω-периодическими коэффициентами, $\omega=\mathrm{const}$. Нетривиальные центральные дисперсии уравнения $L[\mathbf{y}]=0$ существуют тогда и только тогда, когда уравнение на интервале j глобально эквивалентно уравнению только с периодическими интегралами с тем же периодом.

В связи с понятием дисперсий можно утверждать, например, следующее: в пространстве нечетной размерности n не существует замкнутой, центрально симметрической кривой $\mathbf{y}$ класса C_j^{n-1}, кривизны которой являются везде ненулевыми, т. е. такими, что

$$[\mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}(x)]\neq 0 \text{ для } x\in j.$$

6. Геометрические аспекты теории преобразований. Приведенный аналитический подход к глобальным преобразованиям уравнений n-го порядка имеет свою геометрическую сторону, которая позволяет наглядно проникнуть в сущность аналитического аппарата теории глобальных преобразований ([28], [29], [30]), решать открытые проблемы ([34]) и находить случайные неточности в сложных аналитических процессах, не проводя конкретных вычислений.

Основой геометрической интерпретации является применение центральной проекции интегральных кривых уравнения $L[\mathbf{y}]=0$ на единичный шар S_{n-1}:

Уравнению $L[\mathbf{y}]=0$ отвечает в n-мерном пространстве кривая $\mathbf{u}$ класса $\mathbf{C}^n$, лежащая на единичном шаре S_{n-1}, вронскиан которой везде ненулевой (и в определенном смысле наоборот); каждому интегралу y этого уравнения соответствует гиперплоскость $p(y)$, проходящая через начало, т. е. центр шара (и в определенном смысле наоборот), и линейно независимым интегралам соответствуют разные гиперплоскости; каждая нулевая точка интеграла y является параметром точки пересечения кривой $\mathbf{u}$ с гиперплоскостью $p(y)$ (с той же кратностью).

При этой интерпретации, например в случае $n=2$, содержание теоремы по распределению нулевых точек интегралов заключается в том, что при каждой ориентации единичной окружности S_1 между двумя последовательными точками пересечения (с параметрами $x_1<x_3$) произвольной линии p_1, проходящей через начало с окружностью S_1, находится одна и только одна точка пересечения (с параметром x_2) всякой другой прямой p_2, проходящей через начало с окружностью $S_1: x_1<x_2<x_3$ (рис. 3).

В случае $n=3$ существование уравнения 3-го порядка со всеми колеблющимися интегралами дается существованием кривой класса $\mathbf{C}^3$

без точек перегиба на единичном шаре в 3-мерном пространстве, которая пересечена бесконечно много раз каждой плоскостью.

На приведенной геометрической модели очень наглядно изображены понятия, связанные с нулевыми точками интегралов, как например несопряженность, сопряжение точки, колебание и т. п. В частности, показывается, что изучение уравнений n-го порядка с колеблющимися интегралами ведет к изучению некоторых объектов на компактных множествах, что допускает применение сильных средств топологии. (См., например, решение вопроса существования уравнения 3-го порядка, у которого каждое 2-мерное интегральное подпространство содержит одновременно колеблющийся и неколеблющийся интегралы, [34]).

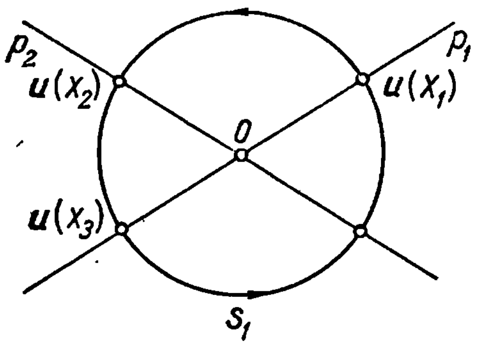

Рис. 3

7. Заключение. Приведенные основы теории глобальных преобразований уравнений n-го порядка дают первое представление о сложности изучения глобальных свойств этих уравнений. Методы и результаты разных дисциплин (аналитический аппарат преобразований, алгебраическая теория колеблющихся уравнений 2-го порядка, функциональные уравнения, центроаффинная дифференциальная геометрия кривых в n-мерном пространстве, топология, теория динамических систем), существенно применяющиеся уже в этих основах, являются средствами, от которых можно ожидать, что они составят полную теорию глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка — недостижимой цели многих до сих пор существующих стремлений.

Литература

1. Bartušek M. Connection between asymptotic properties and zeros of solutions of $y''=q(t)y$, Arch. Math. (Brno), 8, 1972, 113—124.

2. Bartušek M. On relations among dispersions of an oscillatory differential equation $y''=q(t)y$, Acta Univ. Palackianae Olomucensis, 41, 1973, 55—61.

3. Bartušek M. Note on the theory of dispersions of the differential equation $y''=q(t)y$, Arch. Math. (Brno), 9, 1973, 99—104.

4. Bartušek M. On L^p — solutions of the differential equation $y''=q(t)y$, Čas. pěst. mat., 100, 1975, 109—115.

5. Bartušek M. On asymptotic behaviour of central dispersions of linear differential equations of the second order, Čas. pěst mat., 100, 1975, 255—260.

6. Batušek M. On asymptotic properties and distribution of zeros and solutions of $y''=q(t)y$, Acta F. R. N. Univ. Comen. (в печати).

7. Blaško R. Poznámka o splynuti difer. rovnice $y''q(t)y$ s jej spriievodnou rovnicou vzhíadom na váhové konštanty a, b, Praice štúdie VŠD v Žiline, 1974, č. 1, 33—36.

8. Borůvka O. Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, 218 S.

9. Borůvka O. Linear Differential Transformation of the Second Order. The English Universities Press, London, 1971, 254 p.

10. Borůvka O. Foundations of the Theory of Groupoids and Groups. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974, 215 S.

11. Borůvka O. Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle $y''=q(t)y$, Tensor, N. S., 26, 1972, 121—128.

12. Borůvka O. On central dispersions of the differential equation $y''=q(t)y$ with periodic coefficients, Lecture Notes in Mathematics, 415, Proceedings of the Conference held at Dundee, Scotland, 26—29, March, 1974, 47—60.

13. Borůvka O. Sur la structure algébrique de la theorie des transformations différentielles linéaires du deuxième ordre. Acta F. R. N. Univ. Comen.-Mathematica, XXXI, 1975, 59—71.

14. Borůvka O. Über die Differentialgleichungen $y''=q(t)y$ mit periodischen Abständen der Nullstellen ihrer Intergrale, Wiss. Schriftenreihe der Techn. Hochschule Karl-

Marx-Stadt-1975 (5. Tagung über Probleme und Methoden der math. Physik) 1975, 239—255.

15. Borůvka O. Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre, Ann. mat. p. ed appl. S. IV, CII, 1975, 71—77.

16. Borůvka O. Sur les blocs des équations différentielles $y''=q(t)y$ aux coefficients périodiques, Rend. Mat. (2), 8, S. VI, 1975, 519—532.

17. Boruvka O. Contribution à la théorie algébrique des équations $y''=q(t)y$, Boll. U. M. I. (в печати).

18. Háčik M. O splynutí diferenciálnej rovnice $y''=q(t)y$ s jej sprievodnou rovnicou, Sborník prací VŠD a VÚD, 1969, č. 25, 21—25.

19. Háčik M. Generalization of amplitude, phase and accompanying differential equation, Acta Univ. Palackianae Olomucensis, 33, 1971, 7—17.

20. Laitoch M. Homogene lineare zu sich selbst begleitende Differentialgleichung zweiter Ordnung, Acta Univ. Palackianae Olomucensis, 33, 1971, 61—72.

21. Neuman F. Closed plane curves and differential equations, Rend. Mat., 3, 1970, 423—433.

22. Neuman F. A note on differential equations with periodic solutions, Arch. Math. (Brno), 6, 1970, 189—192.

23. Neuman F. Periodic curvatures and closed curves, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 48, 1970, 494—498.

24. Neuman F. Construction of differential equations with coexisting periodic solutions, Bull. Polyt. Inst. Jassy, 14, 20, 1970, 67—75.

25. Neuman F. Note on Kummer's transformation, Arch. Math. (Brno), 6, 1970, 185—188.

26. Neuman F. Linear differential equations of the second order and their applications, Rend. Mat., 4, 1971, 559—617.

27. Neuman F. A note on Santaló's isoperimetric theorem, Rev. Mat. y Fis. teór. Univ. Tucuman, 21, 1971, 203—206.

28. Neuman F. Some results on geometrical approach to linear differential equations of the n-th order, Comm. Math. Univ. Carol., 12, 1971, 307—315.

29. Neuman F. Geometrical approach to linear differential equations of the n-th order, Rend. Mat., 5, 1972, 579—602.

30. Neuman F. Oscillation in linear differential equations, Proceedings of the Conference Equadiff III, Brno, 1972, 119—125.

31. Neuman F. On n-dimensional closed curves and periodic solutions of linear differential equations of the n-th order, Demonstratio Math., 6, 1973, 329—337.

32. Neuman F. Distribution of zeros of solutions of $y''=q(t)y$ in relation to their behaviour in large, Studia Sci. Math. Hungar., 8, 1973, 177—185.

33. Neuman F. On a problem of transformations between limit-circle and limit-point differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 72, 1973/74, 187—193.

34. Neuman F. On two problems about oscillations of linear differential equations of the third order, J. Diff. Equations, 15, 1974, 589—596.

35. Neuman F. Global transformations of linear differential equations of the n-th order, Knižnice odb. a ved. spisu Vysokého učení techn. Brno. B-56, 1975, 165—171.

36. Neuman F. On solutions of the vector functional equation $y(\zeta(x))=f(x)\cdot A\cdot y(x)$ (в печати).

37. Neuman F., Staněk S. On the structure of the second order periodic differential equations having the same characteristic exponents (в печати).

38. Rachunková I. On the theory of phases of Academician O. Borůvka, Acta Univ. Palackianae Olomucensis, 45, 1974, 63—75.

39. Rachůnková I. On algebraic properties of dispersions of the 3^{rd} and 4^{th} kind of the differential equation $y''=q(t)y$, Čas. pěst. mat., 100, 1975, 15—26.

40. Rachůnková I. On the coincidence of central dispersions of the first and second kind in connection with periodic solutions of the differential equation $y''=q(t)y$, Arch. Math. (Brno) (в печати).

41. Staněk S. A criterion for determining the 2^{nd} order linear differential equations possessing the central dispersion with the index n equal to $t+\pi$, Acta Univ. Palackianae Olomucensis (в печати).

42. Staněk S. Asymptotic properties of derivatives of central dispersions of the k-th kind for the differential equation $y''=q(t)y$, $k=1, 2, 3, 4$; Czech. Math. Journ. (в печати).

43. Staněk S. On asymptotic properties of central dispersions of k-th kind of $y''=q(t)y$ with $k=1, 2, 3, 4$, Arch. Math. (Brno) (в печати).

44. Staněk S. Asymptotic properties of the dispersion of the differential equation $y''=q(t)y$, Arch. Math. (Brno) (в печати).

*Поступила в редакцию
24 марта 1975 г.*

ЧССР, г. Брно