Otakar Borůvka

Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle $y'' = q(t)y$

Tensor, N.S., Vol. 26, 1972, 121-128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500144

TENSOR, N. S.
VOL. 26 (1972)

SUR LA PÉRIODICITÉ DE LA DISTANCE DES ZÉROS DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $Y'' = Q(T)Y$.

Dédié à M. le Professeur Akitsugu Kawaguchi pour son 70e anniversaire.

Par O. BORŮVKA.

1. Position du problème. Considérons une équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre de la forme jacobienne

$$(q) \qquad y'' = q(t)y\ ,$$

dont le coefficient q, appelé par occasion porteur de l'équation (q), est une fonction continue dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$: $q(t) \in C_j^\circ$.

Rappelons que l'équation (q) s'appelle oscillatoire si toute intégrale de (q) admet infiniment beaucoup de zéros vers les deux extrémités de l'intervalle j.

Supposons que l'équation (q) est oscillatoire. Dans ces conditions on définit dans l'intervalle j un système dénombrable des fonctions appelées les dispersions centrales de première espèce,

$$\ldots,\ \varphi_{-2},\ \varphi_{-1},\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,$$

de manière que, pour chaque nombre $t \in j$ la valeur $\varphi_n(t)$, $\varphi_{-n}(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre conjugué avec t et situé à droite resp. à gauche de t. En d'autres termes, si l'on considère une intégrale de l'équation (q), y, s'annulant en t, alors la valeur $\varphi_n(t)$, $\varphi_{-n}(t)$ est le $n^{\text{ième}}$ zéro de cette intégrale y, qui est supérieur resp. inférieur à t. On appelle, en particulier, φ_1 la dispersion fondamentale (de première espèce) de l'équation (q) et on écrit, pour simplifier, φ au lieu de φ_1. Quant à la fonction φ_0, on pose pour $t \in j : \varphi_0(t) = t$. Remarquons que la fonction φ_1 et son inverse φ_{-1} engendrent par itération le groupe monogène consistant en dispersions centrales indiquées ci-dessus; ces deux fonctions sont par conséquent les générateurs du groupe en question.

Appelons *fonction-distance* de l'équation (q) la fonction $d(t)$ définie dans l'intervalle j par la formule

$$d(t) = \varphi(t) - t\ .$$

La valeur $d(t)$, pour $t \in j$, est par conséquent la distance du zéro t de chaque intégrale y s'annulant en t, au premier zéro $\varphi(t)$ supérieur à t, de la même intégrale y.

L'objet de l'article présent est une étude des équations (q) qui admettent la function-distance $d(t)$ périodique avec π.

2. Préliminaires. Dans ce Chapitre nous allons indiquer, pour la commodité du lecteur, quelques éléments de la théorie des équations (q) qui nous seront utiles

Reçu le 22 mars, 1972.

dans la suite ([**1**][1]). Comme le problème dont nous allons nous occuper concerne les équations (q) oscillatoires, nous supposons dès le commencement, pour simplifier, que les équations (q) considérées sont oscillatoires.

Soit alors (q) une équation oscillatoire, $q(t) \in C^{0}_{j=(-\infty,\infty)}$.

Phases. Etant donnée une base de l'équation (q), c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de (q), u, v, on entend sous une (première) phase de cette base toute fonction continue dans j, $\alpha(t)$, satisfaisant en dehors des zéros de la fonction v à la relation $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t) : v(t)$.

Sous une (première) phase de l'équation (q) on entend une phase d'une base de (q).

Pour simplifier le langage nous parlons, par occasion, des phases du porteur q au lieu des phases de l'équation (q) et nous employons cette manière d'expression aussi dans d'autres cas (p. ex., la dispersion fondamentale du porteuer q, etc.).

Toute phase α de (q) jouit dans l'intervalle j des propriétés suivantes:

$$(1) \qquad 1.\ \alpha(t) \in C^{3}_{j}; \qquad 2.\ \alpha'(t) \neq 0; \qquad 3.\ \lim_{t \to \sigma\infty} \alpha(t) = (\sigma \operatorname{sgn} \alpha')\, \infty \quad (\sigma = \pm 1).$$

On a en outre les relations

$$(2) \qquad \alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \operatorname{sgn} \alpha',$$

$$(3) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)\,.$$

Dans ces formules $\varphi_\nu (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a la signification indiquée ci-dessus et $\{\ \}$ désigne la dérivée schwarzienne de la fonction α au point t:

$$\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha'''(t)}{\alpha'(t)} - \frac{3}{4}\,\frac{\alpha''^2(t)}{\alpha'^2(t)}\,;$$

nous avons écrit, pour simplifier, $\alpha\varphi_\nu(t)$ au lieu de $\alpha[\varphi_\nu(t)]$.

Remarquons que, pour toute phase $\alpha(t)$ du porteur $q(t)$ la function $\alpha(t + \pi)$ est une phase du porteur $q(t + \pi)$.

Une phase α s'appelle élémentaire si elle satisfait pour $t \in j$ à la relation

$$(4) \qquad \alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn} \alpha'.$$

Fonctions-phases. On appelle fonction-phase toute fonction α définie dans l'intervalle j et vérifiant dans cet intervalle les trois conditions (1).

Il est clair que, toute phase de (q) est une fonction-phase; inversement, toute fonction-phase α représente une phase de cette équation (q) dont le porteur est donné par la formule (3).

Remarquons que, toute dispersion centrale φ_ν est elle-même une fonction-phase. Inversement, une fonction-phase α représent, par exemple, la dispersion fondamentale d'une équation (q) alors et alors seulement, si elle vérifie, dans j, les deux conditions: $\alpha'(t) > 0$, $\alpha(t) > t$.

Groupe des phases. On appelle groupe des phases, $\mathfrak{G}$, le groupe formé par toutes les fonctions-phases et dont la multiplication est donnée par la composition des fonctions. On constate facilement que, la structure en question représente, en effet, un groupe dont l'élément neutre est la fonction-phase t.

1) Les nombres entre crochets renvoient aux références à la fin de cet article.

Rappelons les faits suivants qui interviennent dans nos considérations ultérieures.

Les fonctions-phases qui sont croissantes forment un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, qui est invariant dans $\mathfrak{G}$ et dont l'indice est 2. L'autre élément du groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, G_1, consiste en fonctions-phases décroissantes.

Les phases de l'équation (-1), c'est-à-dire de l'équation $y'' = -y$, forment un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$, appelé le sous-groupe fondamental. Son importance s'attache à ceci: Pour toute équation (q), les phases de (q) forment précisément une classe latérale à droite par rapport à $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire un élément de la décomposition à droite $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$; inversement, les fonctions-phases contenues dans une telle classe représentent les phases précisément d'une équation (q) qui est déterminée par une formule telle que (3), $\alpha(t)$ étant n'importe quel élément de la classe en question.

Désignons, pour un élément $\alpha \in \mathfrak{G}$ quelconque, par q_α le porteur admettant la phase α; la fonction q_α est par conséquent donnée par une formule telle que (3). On a alors, pour $\varepsilon(t) \in \mathfrak{F}$; $\alpha(t), \beta(t) \in \mathfrak{G}$ les formules ([2]):

$$q_\varepsilon(t) = -1\,, \tag{5}$$

$$q_{\alpha\beta}(t) = [1 + q_\alpha\beta(t)] \cdot \beta'^2(t) + q_\beta(t)\,, \tag{6}$$

$$q_{\alpha^{-1}}(t) = -1 - [1 + q_\alpha\alpha^{-1}(t)][\alpha^{-1}(t)]'^2; \tag{7}$$

nous avons écrit, par ex., $q_\alpha\beta(t)$ au lieu de $q_\alpha[\beta(t)]$.

La structure du groupe des phases. En vue des considérations qui vont suivre nous indiquons rapidement quelques propriétés de structure du groupe des phases, $\mathfrak{G}$.

Le centre $\mathfrak{Z}$ du groupe $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{F}$ est le groupe monogène engendré par la fonction-phase $c(t) = t + \pi$:

$$\mathfrak{Z} = \{\ldots, t-2\pi, t-\pi, t, t+\pi, t+2\pi, \ldots\}\,.$$

Les phases élémentaires de différentes équations (q) constituent un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}$, appelé le groupe des phases élémentaires. Ce groupe $\mathfrak{L}$ est le normalisateur du centre $\mathfrak{Z}$. On a $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{F}$ et par conséquent: $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{L} \geqslant \mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$; $\mathfrak{G}/_g\mathfrak{L} \geqslant \mathfrak{G}/_g\mathfrak{F}$ ([3]). Le rôle que joue le groupe $\mathfrak{L}$ dans la théorie des équations (q) consiste en ceci que, les équations (q) dont les phases sont contenues dans la même classe latérale à droite par rapport à $\mathfrak{L}$ ont la même dispersion fondamentale φ_1, et, par conséquent, toutes les dispersions centrales φ_ν.

D'importantes relations existent entre les deux décompositions $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}/_g\mathfrak{F}$ ([4]).

Les fonctions inverses des phases formant une classe-élément d'une des deux décompositions en question constituent une classe-élément de l'autre.—Nous appelons inverses deux classes dont chacune consiste en fonctions inverses des phases formant une classe de l'autre décomposition.

Les deux décompositions considérées sont associables. Cela veut dire ceci: Il existe une décomposition du groupe $\mathfrak{G}$, $\bar{U}$, telle que chaque élément $\bar{u} \in \bar{U}$ est la réunion de certains éléments de l'une, et, en même temps, de l'autre décomposition $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}/_g\mathfrak{F}$, et, de plus, deux arbitraires éléments $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$, $\bar{c} \in \mathfrak{G}/_g\mathfrak{F}$ qui sont contenus dans le même élément $\bar{u} \in \bar{U}$ se coupent dans un ensemble non vide: $\bar{a} \cap \bar{c} \neq \emptyset$.—Nous appelons *blocs* les éléments de $\bar{U}$.

A tout bloc $\bar{u}$ correspond précisément un bloc $\bar{u}^{-1}$ appelé inverse de $\bar{u}$; ce bloc

$\bar{u}^{-1}$ est la réunion de toutes les classes de l'une des deux décompositions en question, qui sont inverses des classes de l'autre décomposition contenues dans $\bar{u}$. On a, évidemment, $(\bar{u}^{-1})^{-1} = \bar{u}$.

Convenons de dire qu'une équation (q) et de même so nporteur q appartient au un bloc $\bar{u}$ si les phases de (q) sont contenues dans $\bar{u}$.

Si une équation (q) admettant la phase α appartient au bloc $\bar{u}$, la classe latérale $\alpha\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}/_g\mathfrak{F}$ se trouve située, évidemment, dans $\bar{u}$. Cette classe coupe l'ensemble des phases de toute équation (q^*) appartenant au même bloc $\bar{u}$ dans un ensemble non vide. Il en résulte que l'équation (q^*) admet la phase $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathfrak{F}$ étant un convenable élément du sous-groupe $\mathfrak{F}$. En appliquant les formales (5) et (6) on trouve

$$(8) \qquad q^*(t) = -1 + [1 + q\varepsilon(t)] \cdot \varepsilon'^2(t) \,.$$

On voit que toute équation (q^*) appartenant au même bloc que (q) est donnée par la formule (8), $\varepsilon(t) \in \mathfrak{F}$ étant une convenable phase située dans $\mathfrak{F}$.

En se servant de la formule (2) on trouve facilement qu'il subsiste entre les dispersions φ_1, φ_{-1} de (q) et la dispersion fondamentale φ^* de (q^*) la relation suivante

$$(9) \qquad \varphi^*(t) = \varepsilon^{-1}\varphi_{\operatorname{sgn}\varepsilon'}\varepsilon(t) \,.$$

Équations inverses. Nous appelons une équation $(\bar{q})$ *inverse de* (q) si elle admet au moins une phase $\bar{\alpha}(t)$ qui est la fonction inverse d'une phase de l'équation (q), $\alpha(t)$: $\bar{\alpha}(t) = \alpha^{-1}(t)$. La relation en question est, évidemment, symmétrique par rapport aux équations (q), $(\bar{q})$.

À la base des considérations précédentes on constate que, deux équations (q), $(\bar{q})$ sont inverses l'une de l'autre si et seulement si elles appartiennent aux blocs mutuellement inverses.

En appliquant les formules (6), (7) on démontre que, toute équation $(\bar{q}^*)$ inverse de (q^*) se trouve donnée par la formule

$$(10) \qquad \bar{q}^*(t) = -1 - [1 + q\alpha^{-1}\eta(t)][\alpha^{-1}\eta(t)]'^2 \,,$$

α étant une phase de (q) choissie arbitrairement et $\eta \in \mathfrak{F}$ un convenable élément de $\mathfrak{F}$.

Finalement, subsiste entre les dispersions φ_1, φ_{-1} de (q) et la dispersion fondamentale de $(\bar{q}^*)$, $\bar{\varphi}^*$, la relation

$$(11) \qquad \bar{\varphi}^*(t) = \eta^{-1}\alpha^2\varphi_{\operatorname{sgn}\eta'}\alpha^{-2}\eta(t).$$

3. L'étude du problème proposé. Nous allons passer dans ce Chapitre à une étude détaillée du problème proposé en nous appuyant, naturellement, sur les faits indiqués précédemment. Rappelons qu'il s'agit de l'étude des équations (q) dont la fonction-distance est périodique avec π.

Théorie générale. Dans la suite nous conservons les notations précédentes. En particulier, la fonction-distance d'une équation (q) est désignée par $d(t)$ $(t \in j)$.

1. *La fonction-distance d'une équation* (q) *résulte périodique avec* π *si et seulement si la dispersion fondamentale correspondante est élémentaire.*

Cette proposition est évidemment une conséquence immédiate de la relation $\varphi(t) = t + d(t)$.—Rappelons que, la dispersion φ étant élémentaire, on a pour $t \in j$

$\varphi(t+\pi) = \varphi(t) + \pi$ ([**4**]).

2. *Si la fonction-distance de l'équation* (q) *est périodique avec* π, *il existe, pour toute phase* α *de* (q), *une phase élémentaire*, h, *telle que*

$$\alpha(t+\pi) = h\alpha(t)\,. \tag{12}$$

Inversement, s'il existe pour une phase α *de* (q) *une phase élémentaire*, h, *satisfaisant à la formule* (12), *la fonction-distance de* (q) *résulte périodique avec* π.

Démonstration. a. Supposons que d est périodique avec π. Soit α une phase quelconque de (q). D'après 1. la function φ est élémentaire. On a par conséquent, en vertu de (2),

$$\alpha[\varphi(t)+\pi] = \alpha\varphi(t+\pi) = \alpha(t+\pi) + \pi \operatorname{sgn}\alpha'. \tag{13}$$

On en tire

$$\alpha[\varphi(t)+\pi] - \alpha\varphi(t) = \alpha(t+\pi) - \alpha(t) \qquad (= H(t))\,. \tag{14}$$

Désignons par H la fonction figurant dans le second membre de cette équation et définissons, dans l'intervalle j, la fonction G suivant la formule

$$H(t) = G\alpha(t)\,. \tag{15}$$

On a évidemment, pour $t \in j$,

$$H(t) \in C_j^3\,, \qquad H[\varphi(t)] = H(t)$$

et, par conséquent,

$$G(t) = H\alpha^{-1}(t)\,,$$

$$G[\alpha(t) + \pi \operatorname{sgn}\alpha'] = G\alpha\varphi(t) = H\varphi(t) = H(t) = G\alpha(t)\,,$$

α^{-1} étant, naturellement, la fonction inverse de α.

Ces relations entraînent

$$G(t) \in C_j^3\,, \qquad G(t+\pi) = G(t) \tag{16}$$

de sorte que, la fonction G résulte de classe C_j^3 et périodique avec π.

Posons, pour $t \in j$,

$$h(t) = t + G(t)\,. \tag{17}$$

Nous avons, d'après (14), (15),

$$\alpha(t+\pi) = h\alpha(t)\,. \tag{18}$$

La fonction h jouit, en vertu de (16), (17), (18), des propriétés suivantes:

$$1^\circ \ \lim_{t\to\pm\infty} h(t) = \pm\infty, \quad 2^\circ \ h(t) \in C_j^3, \quad 3^\circ \ h'(t) > 0\,, \quad 4^\circ \ h(t+\pi) = h(t) + \pi\,.$$

On voit que la function h est une phase élémentaire et croissante.

b. Supposons qu'il existe pour une phase α de (q) une phase élémentaire $h(t)$ satisfaisant à l'équation (12).

On a alors $\operatorname{sgn} h' = 1$ et puis

$$\begin{aligned}\alpha[\varphi(t)+\pi] = h\alpha\varphi(t) = h[\alpha(t) + \pi \operatorname{sgn}\alpha'] &= h\alpha(t) + \pi \operatorname{sgn}\alpha' \\ &= \alpha(t+\pi) + \pi \operatorname{sgn}\alpha' = \alpha\varphi(t+\pi)\,;\end{aligned}$$

il en résulte que la fonction φ est élémentaire.

3. *La fonction-distance de l'équation* (q) *est périodique avec* π *si et seulement si les porteurs* $q(t)$, $q(t+\pi)$ *ont la même dispersion fondamentale.*

En effet, pour toute phase α du porteur q la fonction $\alpha(t+\pi)$ est une phase du porteur $q(t+\pi)$. La formule (12) exprime, à son tour, que les phases $\alpha(t+\pi)$, $\alpha(t)$ sont contenues dans la même classe latérale à droite par rapport au groupe $\mathfrak{L}$, ou bien, ce qui revient au même, que les porteurs $q(t+\pi)$, $q(t)$ ont la même dispersion fondamentale. Il en résulte facilement la proposition.

Le résultat que nous venons de trouver permet d'appliquer, dans l'étude de notre problème, les résultats de la théorie des équations jacobiennes admettant la même dispersion fondamentale ([**1**]).

A ce sujet nous nous bornons d'énoncer les deux théorèmes suivants.

4. *Si la function-distance* d *de l'équation* (q) *est périodique avec* π, *il existe, dans tout intervalle* $[t, t+d(t))$, $t \in j$, *au moins quatre points* t_i *tels que*

$$q(t_i+\pi) = q(t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,.$$

5. *La fonction-distance de l'équation* (q) *est périodique avec* π *si et seulement si le porteur* $q(t)$ *vérifie la formule*

$$q(t+\pi) = q(t) + [f''\alpha(t) + f'^2\alpha(t) + 2f'\alpha(t)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha(t)]\alpha'^2(t)\,,$$

$\alpha(t)$ *étant une phase de* (q) *et* f *une fonction périodique avec* π *et telle que*

$$f(0) = f'(0) = 0\,, \qquad \int_0^\pi [\exp(-2f(\sigma)) - 1]d\sigma : \sin^2\sigma = 0\,.$$

Cela étant, nous allons porter notre attention aux propriétés des équations $(\bar{q})$ qui sont inverses des équations (q) admettant la fonction-dístant périodique.

6. *Si la fonction-distance de l'équation* (q) *est périodique avec* π, *alors la fonction-distance de toute équation* $(\bar{q})$ *inverse de* (q) *est encore périodique avec* π.

Démonstration. Supposons que la fonction-distance de l'équation (q), d, est périodique avec π.

Soit $(\bar{q})$ une équation inverse de (q). Il existe alors une phase de (q), α, telle que la fonction inverse α^{-1} est une phase de $(\bar{q})$. En tenant compte de (2) nous voyons que la dispersion fondamentale de l'équation $(\bar{q})$, $\bar{\varphi}_1$, ou bien son inverse $\bar{\varphi}_{-1}$, est donnée par la formule

$$\bar{\varphi}_{\operatorname{sgn}\alpha'}(t) = \alpha[\alpha^{-1}(t) + \pi]\,. \tag{19}$$

Or, la fonction d étant périodique avec π, subsiste une formule telle que (12), h étant une phase élémentaire. Si nous écrivons cette formule pour la valeur $\alpha^{-1}(t)$ de la variable indépendante, nous avons, en tenant compte de (19),

$$\bar{\varphi}_{\operatorname{sgn}\alpha'}(t) = h(t)\,.$$

Il en résulte, évidemment,

$$\bar{\varphi}_1(t) = h^{\operatorname{sgn}\alpha'}(t) \in \mathfrak{L}\,, \tag{20}$$

ce qui démontre, en vertu de 1, la proposition.

7. *Si la fonction-distance de l'équation* (q) *est périodique avec* π, *alors la fonction-distauce de toute équation* (q^*) *appartenant au même bloc que* (q) *est encore périodique avec* π.

Cette proposition résulte immédiatement du théorème précédent, ou encore de la formule (9).

Équations (q) *aux porteurs périodiques.*

Les équations (q) dont les porteurs sont des fonctions périodiques avec π figurent dans les considérations précédentes en tant qu'un cas particulier.

La base d'études à ce sujet est fournie par le théorème suivant.

8. *Si le porteur* q *de l'équation* (q) *est périodique avec* π, *il existe, pour toute phase* α *de* (q), *une phase* $\varepsilon \in \mathfrak{F}$ *telle que*

$$\alpha(t + \pi) = \varepsilon\alpha(t) \ . \tag{21}$$

Inversement, s'il existe, pour une phase α *de* (q) *une phase* $\varepsilon \in \mathfrak{F}$, *satisfaisant à la formule* (21), *le porteur* q *de* (q) *résulte périodique avec* π.

En effet, s'il subsiste dans l'intervalle j la relation $q(t + \pi) = q(t)$ et que la fonction $y(t)$ est une intégrale de (q), la fonction $y(t + \pi)$ est encore une intégrale de (q). Il en résulte que, pour toute phase $\alpha(t)$ de (q), la fonction $\alpha(t + \pi)$ est elle aussi une phase de (q). On en tire que la fonction $\alpha(t + \pi)$ se trouve contenue dans la classe latérale $\mathfrak{F}\alpha(t)$: $\alpha(t + \pi) \in \mathfrak{F}\alpha(t)$. Subsiste, par conséquent, la formule (21) pour une convenable phase $\varepsilon \in \mathfrak{F}$. La seconde partie du théorème suit des formules (3), (5), (6).

9. *La fonction-distance de toute équation* (q) *dont le porteur* q *est périodique avec* π *est elle aussi périodique avec* π.

Cette proposition est, en vertu de la relation $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}$, une conséquence des théorèmes 2 et 8.

10. *Si le porteur* q *de l'équation* (q) *est périodique avec* π, *alors la dispersion fondamentale de toute équation* ($\bar{q}$) *inverse de* (q), *est contenue dans le sous-groupe* $\mathfrak{F}$. *Inversement, si la dispersion fondamentale d'une équation* ($\bar{q}$) *inverse de* (q) *jouit de cette propriété, le porteur* q *est périodique avec* π.

Démonstration. Supposons que le porteur q de (q) est périodique avec π. ($\bar{q}$) étant une équation inverse de (q), il existe une phase α de (q) telle que la fonction inverse α^{-1} est une phase de ($\bar{q}$). Subsiste, d'après 9 et 2 une formule telle que (20) particularisée, en vertu de 8., par $h = \varepsilon \in \mathfrak{F}$. Il en résulte

$$\bar{\varphi}(t) = \varepsilon^{\operatorname{sgn} \alpha'}(t) \in \mathfrak{F} \ ,$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

Inversement, la formule $\bar{\varphi}(t) = \varepsilon(t) \in \mathfrak{F}$ entraîne

$$\varepsilon^{\operatorname{sgn} \alpha'}(t) = \alpha[\alpha^{-1}(t) + \pi]$$

et puis

$$\alpha(t + \pi) = \varepsilon^{\operatorname{sgn} \alpha'}\alpha(t) \ .$$

En se rappelant que $\varepsilon \in \mathfrak{F}$ entraîne $\varepsilon^{-1} \in \mathfrak{F}$, on voit que la phase α vérifie une formule telle que (21). Cela achève la démonstration.

11. *Si le porteur q est périodique avec π, alors le porteur de toute équation* (q^*) *appartenant au même bloc que* (q) *est encore périodique avec* π.

Cette proposition résulte immédiatement du théorème précédent, ou encore de la formule (8).

Institut Mathématique
de l'Académie tchecoslovaque des Sciences
Brno (ČSSR), Janáčkovo nám. 2a.

RÉFÉRENCES

[1] O. Borůvka: Linear differential transformations of the second order, *The English Universities Press, London*, (1971).

[2] O. Borůvka: Sur l'ensemble des équations differéntielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale, *Bul. Inst. Polit. Iași*, **9** (1963), 11-20.

[3] O. Borůvka: Sur quelques propriétés de structure du groupe des phases des équations differéntielles linéaires du deuxième ordre, *Rev. Roum. Math. p. et appl.*, **15** (1970), 1345-1356.

[4] O. Borůvka: Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, *Deutscher Verlag der Wiss., Berlin (DDR)*, (1960).