Otakar Borůvka

Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica, IV-VI, 1956, 155-167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500078

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

TOM. I., FASC. IV-VI **MATHEMATICA** **1956**

Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung $y' - f(x, y)$

O. BORŮVKA, Brno

(Gewidmet dem Herrn Professor Dr. J. Hronec zu seinem 75. Geburtstage)

1. Für die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

kennt man bekanntlich eine Reihe von Eindeutigkeitssätzen, die hinreichende Bedingungen für die Unizität von Integralen in einem gegebenen Punkte beschreiben. Meistens werden diese Bedingungen durch Angabe von geeigneten Majoranten der Funktion $f(x, y_2) - f(x, y_1)$ oder deren absoluten Wertes dargestellt.[1]) Diese Sonderstellung der Differenz scheint zwar methodisch, nicht aber sachlich berechtigt zu sein, da die Betrachtung von anderen, dem Felde der Differentialgleichung angepaßten Funktionen von $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$ in einzelnen Fällen sehr nützlich sein kann. Ich werde nun eine in diesem Sinne weitgehende Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze angeben. Die Resultate und Beweismethode lassen sich unschwer auf Systeme von expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen. Ich werde mich jedoch der Kürze der Bezeichnungen halber auf eine Differentialgleichung, und wie üblich, auf die Verhältnisse rechts vom betrachteten Punkt beschränken.

2. Vorbereitung zum Hauptsatz.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$z' = G(x, z) \tag{A}$$

in dem Bereich

O: $\quad \xi \leq x \leq \xi + a; \qquad -c \leq z \leq c \qquad (a, c > 0).$

Wir setzen voraus, daß die Funktion G im Bereich O stetig ist.

Es sei M eine Zahl, $M \geq \operatorname{Max} |G|$ im Bereich O, und ferner $\alpha = \operatorname{Min}(a, c : M)$ oder $\alpha = a$ jenachdem $M > 0$ oder $M = 0$ ist.

Die aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehenden Integrale der Differentialgleichung (A),

[1]) Eine bemerkenswerte Ausnahme bildet das unlängst von L. **Markus** entdeckte Kriterium. (A uniqueness theorem for ordinary differential equations involving smooth functions. Proc. Amer. Math. Soc., 4 [1953], 88.)

deren rechte Enden am Rande des Bereiches O gelegen sind,[2]) existieren wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir bezeichnen mit Z das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (A), dessen rechtes Ende am Rande des Bereiches O gelegen ist. Dieses Integral existiert wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir betrachten nun eine aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende und im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ definierte Unterfunktion z bezüglich der Differentialgleichung (A). Diesen Begriff meinen wir im folgenden Sinne:

z ist eine der Anfangsbedingung $z(\xi) = 0$ genügende, im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ definierte und stetige Funktion, die daselbst fast überall die Differentialungleichung

$$Dz(x) \leqq G[x, z(x)] \tag{1}$$

erfüllt.

D bedeutet die untere (immer) links- oder rechtsseitige Derivierte und das Wort *fast* das Zulassen einer höchstens abzählbaren Menge von Ausnahmen.

Natürlich gelten für alle $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ die Beziehungen $-c \leqq z(x) \leqq c$.

Wir werden zeigen, daß *in dieser Situation für alle* $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ *die folgende Ungleichung besteht*

$$z(x) \leqq Z(x). \tag{2}$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Differentialgleichung

$$z' = \overline{G}(x, z) \tag{$\overline{\mathrm{A}}$}$$

in dem Bereich

$$\overline{\mathrm{O}}: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + \alpha; \qquad -\infty < z \leqq c,$$

wobei die Werte der Funktion $\overline{G}$ für jedes $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ in folgender Weise definiert sind:

$$\overline{G}(x, z) = \begin{cases} G(x, z) & \text{für} \quad z(x) \leqq z \leqq c; \\ G[x, z(x)] & \text{für} \quad -\infty < z \leqq z(x). \end{cases}$$

Die Funktion $\overline{G}$ ist im Bereich $\overline{\mathrm{O}}$ stetig und erfüllt daselbst die Ungleichung $|\overline{G}| \leqq M$.

Die aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehenden Integrale der Differentialgleichung $(\overline{\mathrm{A}})$, deren rechte Enden am Rande des Bereiches $\overline{\mathrm{O}}$ gelegen sind, existieren wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Es sei $\bar{z}$ ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes und im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ definiertes Integral der Differentialgleichung $(\overline{\mathrm{A}})$.

Auf Grund der Beziehung (1) folgt mittels klassischer Schlußweise[3]) die für $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ bestehende Ungleichung

$$z(x) \leqq \bar{z}(x).$$

---

[2]) D. h. die in kompakten Intervallen $[\xi, \xi_1]$, $\xi < \xi_1$, definierten Integrale $\dot{z}$ von der Beschaffenheit, daß die rechten Enden $(\xi_1, z(\xi_1))$, sonst aber keine anderen Punkte der entsprechenden Integralkurven am Rande des Bereiches liegen.

[3]) S. z. B. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale. Parte seconda.* Bologna, (1941), 98.

Dieselbe enthält, daß die Funktion $\bar{z}$ ein Integral der Differentialgleichung (A) darstellt. Folglich gilt für alle $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ die Beziehung

$$\bar{z}(x) \leqq Z(x)$$

und somit auch die Ungleichung (2).

3. Der Hauptsatz.

Wir betrachten die folgende Situation:
Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y' = f(x, y) \tag{α}$$

in dem Bereich

Δ: $\quad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \quad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \quad (a, b > 0).$

Wir nehmen an, daß wir zu der Differentialgleichung (α) zwei Funktionen φ, Φ von drei Veränderlichen haben, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $\varphi(x; u, v)$ ist in dem Bereich

ω: $\quad \xi < x \leqq \xi + a; \quad \eta - b < u \leqq v < \eta + b$

definiert und von folgender Beschaffenheit:

a) ihr Wert in jedem Punkt $(x; u, v) \in \omega$ ist positiv oder Null, jenachdem $u < v$ oder $u = v$ ist;

b) sie ist im Bereich ω stetig und besitzt daselbst stetige partielle Ableitungen $\varphi'_x, \varphi'_u, \varphi'_v$;

c) es gilt die Beziehung

$$\lim_{x \to \xi +} \varphi[x; u(x), v(x)] = 0$$

für beliebige, vom Punkt (ξ, η) ausgehende und den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$ genügende Integrale u, v der Differentialgleichung (α).

2. Die Funktion $\Phi(x; u, z)$ ist im Bereich

Ω: $\quad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \quad \eta - b \leqq u \leqq \eta + b, \quad 0 \leqq z < +\infty$

definiert und von folgender Beschaffenheit:

a) sie ist im Bereich Ω stetig;

b) im Bereich ω gilt die Ungleichung:

$$\varphi'_x(x; u, v) + \varphi'_u(x; u, v)f(x, u) + \varphi'_v(x; u, v)f(x, v) \leqq \Phi[x; u, \varphi(x; u, v)].$$

In dieser Situation gilt der folgende, für die erwähnte Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze grundlegende Hauptsatz:

Zu je zwei beliebigen vom Punkt (ξ, η) ausgehenden, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierten und den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$ genügenden Integralen u, v der Differentialgleichung (α), gibt es eine rechts von ξ gelegene Umgebung $(\xi, \xi + \alpha]$, $0 < \alpha \leqq a$, in der das vom Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral Z der Differentialgleichung

$$z' = \Phi\,[x; u(x), z] \tag{β}$$

existiert und die Ungleichung

$$\varphi[x; u(x), v(x)] \leq Z(x)$$

besteht. Wenn die Funktion φ im Bereich ω (von oben) beschränkt ist, so hängt diese Umgebung von der Wahl der Integrale u, v nicht ab.

Ersichtlich ist die Differentialgleichung (β) in dem Bereich

$$\Omega': \qquad \xi \leq x \leq \xi + a; \qquad 0 \leq z < +\infty$$

definiert.

Beweis. Es seien $u(x)$, $v(x)$ zwei beliebige vom Punkt (ξ, η) ausgehende, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierte und den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq \leqq v(x) < \eta + b$ genügende Integrale der Differentialgleichung (α).

Wir betrachten die im Intervall $[\xi, \xi + a]$ folgendermassen definierte Funktion z:

$$z(\xi) = 0; \qquad z(x) = \varphi[x; u(x), v(x)] \text{ für } x \in (\xi, \xi + a].$$

Die Funktion z nimmt nur nicht negative Werte an [1a)]; dieselbe ist im Intervall $[\xi, \xi + a]$ stetig [1b), c)] und besitzt für $x \in (\xi, \xi + a]$ die Ableitung $z'(x)$ [1b)]; ferner gilt für $x \in (\xi, \xi + a]$ die Ungleichung

$$z'(x) \leqq \Phi[x; u(x), z(x)] \tag{1}$$

[2b)].

Wir bilden nun mittels der Funktion Φ die folgende Differentialgleichung (A), um für dieselbe und die Funktion z die in der N° 2 betrachtete Situation zu schaffen.

Die Funktion z nimmt im Intervall $[\xi, \xi + a]$ ein nichtnegatives Maximum an; dasselbe hängt im allgemeinen von der Wahl der beiden Integrale u, v ab. Wir wählen eine dieses Maximum übersteigende Zahl $c > 0$; falls die Funktion φ im Bereich ω beschränkt ist, so wählen wir c größer als die obere Grenze von φ in ω. Sodann haben wir für $x \in [\xi, \xi + a]$ die Ungleichungen

$$0 \leqq z(x) < c. \tag{2}$$

Es sei M das Maximum von $|\Phi|$ in dem Teil $z \leq c$ von Ω, und ferner $\alpha = \text{Min}\,(a, c : M)$ oder $\alpha = a$ jenachdem $M > 0$ oder $M = 0$ ist.

Wir bilden die Differentialgleichung

$$z' = G(x, z) \tag{A}$$

in dem Bereich

$$O: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad -c \leqq z \leqq c,$$

wobei die Funktion G für jedes $x \in [\xi, \xi + a]$ folgendermassen definiert ist:

$$G(x, z) = \begin{cases} \Phi[x; u(x), z] & \text{für } \quad 0 \leqq z \leqq c; \\ \Phi[x; u(x), 0] & \text{für } -c \leqq z \leqq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Aus den Formeln (2), (3), (1) entnehmen wir, daß $z(x)$ eine aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierte Unterfunktion bezüglich der Differentialgleichung (A) darstellt.

Die aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehenden Integrale der Differentialgleichung (A), deren rechte Enden am Rande des Bereiches O gelegen sind, existieren wenigstens im Interwall $[\xi, \xi + \alpha]$.

Wir bezeichnen mit Z das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (A), dessen rechtes Ende am Rande des Bereiches O gelegen ist. Dieses Integral existiert wenigstens im Intervall $[\xi, \xi \quad \alpha]$

Wir haben nun bezüglich der Differentialgleichung (A) und der Funktion z die in der N 2 betrachtete Situation. Folglich bestehen für alle $x \in [\xi, \xi \quad \alpha]$ die Ungleichungen

$$0 \quad z(x) < Z(x) \quad c, \tag{4}$$

wobei im letzten Glied das Gleichheitszeichen nur für $x \quad \alpha$ gelten kann

Wir sehen, daß es zur Vollendung des Beweises genügt zu zeigen, daß Z im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (β) darstellt.

Aus den formeln (4), (3) entnehmen wir, das Z ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes und wenigstens im Interval $[\xi, \xi + \alpha]$ definiertes Integral der Differentialgleichung (β) darstellt.

Wir nehmen an, es gäbe ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes, in einer Umgebung j rechts von ξ definiertes und für ein $x_1 \in (\xi, \xi + \alpha)$ der Ungleichung $\zeta(x_1) > Z(x_1)$ genügendes Integral ζ der Differentialgleichung (β). Sodann haben wir für einen Wert $x_0 \in [\xi, x_1)$ die Beziehungen

$$\zeta(x_0) \quad Z(x_0); \qquad \zeta(x) > Z(x) \quad \text{für} \quad x \in (x_0, x_1].$$

Wir betrachten die im Intervall $[\xi, x_1]$ definierte Funktion $\bar{\zeta}$:

$$\bar{\zeta}(x) \quad \begin{cases} Z(x) & \text{für} \quad x \in [\xi, x_0], \\ \zeta(x) & \text{für} \quad x \in [x_0, x_1]. \end{cases}$$

Im Fall $\xi = x_0$ liest man natürlich in diesen Formeln nur die zweite Zeile.

Die Funktion $\bar{\zeta}$ ist offenbar ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes, im Intervall $[\xi, x_1]$ definiertes Integral der Differentialgleichung (β).

Dieses Integral $\bar{\zeta}$ nimmt den Wert c nicht an. In der Tat, anderfalls stellt ein geeigneter, in einem kleineren Intervall als $[\xi, \xi \quad \alpha]$ definierter Teil von $\bar{\zeta}$ ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes Integral der Differentialgleichung (A) dar, dessen rechtes Ende am Rand des Bereiches O gelegen ist. Ein solches Integral gibt es jedoch nicht, da jedes aus $(\xi, 0)$ ausgehende Integral von (A), dessen rechtes Ende am Rand des Bereiches O liegt, wenigstens im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ existiert.

Folglich ist die Funktion $\bar{\zeta}$ ein aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehendes, im Intervall $[\xi, x_1]$ definiertes Integral der Differentialgleichung (A). Dieses Integral erfüllt die Ungleichung $\bar{\zeta}(x_1) > Z(x_1)$, die jedoch der Maximaleigenschaft von Z widerspricht.

Wir sehen, daß Z in dem Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ das aus dem Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende Maximalintegral der Differentialgleichung (β) darstellt und der Beweis ist fertig.

Zusatz. Ursprünglich habe ich den Hauptsatz unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß die Funktion φ im bezug auf v für beliebige Werte von $x \in (\xi, \xi \quad a]$, $u \in (\eta - b, \eta + b)$ wachse. Auf die Möglichkeit des Fortlassens dieser Voraussetzung im Zusammenhang mit Betrachtung von Unterfunktionen wurde ich in einer Diskussion von der Fr. Doz. S Mikolajska in Krakau aufmerksam gemacht.

4. Der Eindeutigkeitssatz.

Es sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{α}$$

in dem Bereich

$$\Delta: \qquad \xi \leq x \leqq \xi + a; \quad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \qquad (a, b > 0)$$

gegeben.

Wir setzen voraus, daß es zu der Differentialgleichung (α) zwei Funktionen φ, Φ von drei Veränderlichen gibt mit den in dem Hauptsatz beschriebenen Eigenschaften 1a), b), c) und 2a), b). Wir übernehmen auch die Bezeichnung der Zahlen c, M, α, die für je zwei vom Punkt (ξ, η) ausgehende, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ existierende und daselbst den Ungleichungen $\eta - b < u(x) \leqq \leqq v(x) < \eta + b$ genügende Integrale u, v der Differentialgleichung (α) definiert waren.

Außerdem soll die Funktion Φ die folgende Eigenschaft besitzen:

2c) Für jedes vom Punkt (ξ, η) ausgehende und im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierte Integral $u(x)$ von (α), ist $z(x) = 0$ das einzige vom Punkt $(\xi, 0)$ ausgehende und in einem Teilintervall von $[\xi, \xi + a]$ existierende Integral der Differentialgleichung

$$z' = \Phi[x; u(x), z].$$

In dieser Situation gilt die folgende Behauptung:

Je zwei vom Punkt (ξ, η) ausgehende Integrale der Differentialgleichung (α) *fallen in einer gewissen Umgebung rechts von ξ zusammen.*

Wenn die Funktion φ im Bereich ω beschränkt ist oder die Funktion f in Δ stetig, so ist die Lösung der Differentialgleichung (α) *im Punkt (ξ, η), rechts von ξ, lokal eindeutig.*

Wir bemerken, daß unter lokaler Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (α) im Punkt (ξ, η), rechts von ξ, folgendes gemeint ist: Es gibt eine rechts von ξ gelegene kompakte Umgebung von ξ derart, daß alle zwei vom Punkt (ξ, η) ausgehende Integrale der Differentialgleichung (α) in dem gemeinsamen Teil ihrer Definitionsintervalle und der erwähnten Umgebung zusammenfallen.

Beweis. a) Es seien u, v beliebige aus dem Punkt (ξ, η) ausgehende Integrale der Differentialgleichung (α). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die u, v im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definiert sind und daselbst die Werte $\eta \pm b$ nicht annehmen. In der Tat, diese Situation kann durch die Wahl einer kleineren Zahl a als die ursprüngliche immer geschafft werden.

Es seien U, V die durch $U(x) = \text{Min}\, \{u(x), v(x)\}$, $V(x) = \text{Max}\, \{u(x), v(x)\}$ im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierten Integrale der Differentialgleichung (α). Die U, V genügen im Intervall $[\xi, \xi + a]$ den Ungleichungen: $\eta - b < U(x) \leqq \leqq V(x) < \eta + b$. Nach dem Hauptsatz und der zusätzlichen Voraussetzung 2c), gilt im Intervall $(\xi, \xi + \alpha]$ die Beziehung:

$$\varphi[x; U(x), V(x)] \leqq 0.$$

Aus ihr folgt, mit Rücksicht auf 1a), die für $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ giltige Gleichheit $V(x) = U(x)$ und somit auch $v(x) = u(x)$.

b) Wir nehmen an, daß die Funktion φ im Bereich ω beschränkt ist. Sodann hängen die Zahlen c, M, α von der Wahl der Integrale u, v nicht ab. Nach a) fällt im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ das Integral v mit u zusammen und dasselbe gilt von jedem anderen, im Intervall $[\xi, \xi + a]$ definierten Integral der Differentialgleichung (α), dessen Werte sämtlich von $\eta \pm b$ verschieden sind. Es bleibt also folgendes zu zeigen: Jedes vom Punkt (ξ, η) ausgehende Integral $w(x)$ von (α), das in einem (nicht notwendig echten) Teil von $[\xi, \xi + a]$ definiert ist und dort eventuell auch die Werte $\eta \pm b$ annimmt, fällt in dem gemeinsamen Teil seines Definitionsintervalles und der Umgebung $[\xi, \xi + \alpha]$ von ξ mit u zusammen.

Es sei $x_0 \in (\xi + \alpha]$ eine beliebige im Definitionsintervall von w gelegene Zahl, die genügend nahe an ξ liegt, so daß die Funktion w im Intervall $[\xi, x_0]$ keinen der Werte $\eta \pm b$ annimmt. Wir verengen die Diferentialgleichung (α) auf den Bereich Δ_0: $\xi < x < x_0$: $\eta - b \leq y < \eta + b$ und bezeichnen für die engere Differentialgleichung mit c_0, M_0, α_0 die Zahlen, die den für die Differentialgleichung (α) definierten Konstanten c, M, α entsprechen. Wegen der Beschränktheit von φ können wir $c_0 = c$ wählen und haben dann $M_0 \quad M$, $\alpha_0 \quad x_0 - \xi$. Nach a) gilt für $x \in [\xi, x_0]$ die Gleichheit $w(x) \quad u(x)$, also speziell $w(x_0) = u(x_0)$. Daraus folgt, daß w im Intervall $[\xi, \xi \quad \alpha]$ keinen der Werte $\eta \pm b$ annimmt, da sonst auch das Integral u einen solchen Wert annehmen müßte, was jedoch unserer Voraussetzung widerspricht. Damit ist gezeigt, daß das Integral w in dem gemeinsamen Teil seines Definitionsintervalls und der Umgebung $[\xi, \xi + \alpha]$ von ξ mit u zasammenfällt.

c) Wir nehmen an, daß die Funktion f im Bereich Δ stetig ist. Es seien u und v das vom Punkt (ξ, η) ausgehende Minimal- und Maximalintegral der Differentialgleichung (α). Nach a) haben wir die für $x \in [\xi, \xi + \alpha]$ giltige Beziehung $v(x) = u(x)$. In dieser Situation fallen also das vom Punkt (ξ, η) ausgehende Minimal- und Maximalintegral und somit alle vom Punkt (ξ, η) ausgehenden Integrale von (α) im Intervall $[\xi, \xi + \alpha]$ zusammen.

5. Spezielle Eindeutigkeitskriterien.

Der obige Eindeutigkeitssatz enthält bei spezieller Wahl der Funktionen φ, Φ die meisten bekannten Eindeutigkeitskriterien für Integrale der Differentialgleichung (α) und ferner deren Verallgemeinerungen und Kriterien neuer Struktur. Wir übernehmen im weiteren die in der Literatur übliche Bezeichnung und schreiben y_1, y_2 anstatt von u, v; dementsprechend setzen wir $y_1 < y_2$ voraus.

1. Die Wahl

$$\varphi(x; y_1, y_2) \qquad y_2 - y_1$$

in unserem Hauptsatz führt zu dem Vergleichungssatz von P. Montel[4]) und den sich daraus durch geeignete Spezialisation der Funktion Φ ergebenden Kriterien von Peano, Tonnelli, Bompiani, Osgood u. Tamarkine, Lipschitz

[4]) P. Montel, *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inferieure d'une équation differentielle.* Bull. Sci. Math., 2e serie, **50** (1926), 215.

2. Wählt man in dem Eindeutigkeitssatz

$$\varphi(x, y_1, y_2) = \frac{y_2 - y_1}{x - \xi}; \qquad \Phi(x; y_1, z) = 0; \qquad f \text{ stetig},$$

so erhält man das (modifizierte) Kriterium von Rosenblatt—Nagumo:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq \frac{y_2 - y_1}{x - \xi}.$$

Dasselbe kann mittels einer breiteren Wahl von Φ verallgemeinert werden. Z. B. erhält man für

$$\Phi(x; y_1, z) = Lz \qquad (0 \leqq L = \text{Konst.})$$

die folgende Verallgemeinerung:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq (y_2 - y_1) \cdot \left\{\frac{1}{x - \xi} + L\right\}.$$

3. Wählt man

$$\varphi(x; y_1, y_2) = \frac{y_2 - y_1}{1 + y_2 - y_1} \cdot \frac{1 + x - \xi}{x - \xi}; \quad \Phi(x; y_1, z) = 0; \qquad f \text{ stetig},$$

so kommt die folgende Abänderung des Rosenblatt—Nagumoschen Kriteriums für stetige Funktionen f heraus (vgl.[5]):

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq \frac{y_2 - y_1}{x - \xi} \cdot \frac{1 + y_2 - y_1}{1 + x - \xi}.$$

4. Wenn man für φ Funktionen wählt, die im Bezug auf y_1, y_2 allgemeiner als allein von der Differenz $y_2 - y_1$ obhängen, so bekommt man Eindeutigkeitskriterien von neuer Struktur. Wir begnügen uns mit der Angabe eines Kriteriums dieser Art. Eine umfassendere Sammlung von solchen Sätzen scheint überflüssig, da man in einzelnen Fällen versuchen wird die Wahl der Funktionen φ und Φ dem Feld der gegebenen Differentialgleichung in geeigneter Weise anzupassen.

Wir wählen

$$\varphi(x; y_1, y_2) = \frac{1}{x - \xi} \int_{y_1}^{y_2} \varrho(x, t)\, dt; \quad \Phi(x; y_1, z) = Lz \ (L = \text{Konst.} \geqq 0); \quad f \text{ stetig},$$

wobei $\varrho(x, y)$, $\varrho'_x(x, y)$ im Bereich Δ stetig sind und die Funktion ϱ für jedes $x \in (\xi, \xi + a]$ im Intervall $[\eta - b, \eta + b]$ fast überall, d. h. mit Ausnahme von einer höchstens abzählbaren Menge von Fällen, nur positive Werte annimmt.

Wir sehen, daß *die Lösung der Differentialgleichung* (α) *im Punkt* (ξ, η), *rechts von* ξ, *immer dann lokal eindeutig ist, wenn es eine Funktion* $\varrho(x, y)$

---

[5]) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* Leipzig (1930), 142.

mit den obigen Eigenschaften gibt, die für $(x, y_1, y_2) \in \omega$ *die folgende Ungleichung befriedigt:*

$$(x - \xi)\,\{\varrho(x, y_2)\,f(x, y_2) - \varrho(x, y_1)\,f(x, y_1)\} \leq$$

$$\leqq \int_{y_1}^{y_2} \{(1 + L\overline{x - \xi})\,\varrho(x, t) - (x - \xi)\,\varrho'_x(x, t)\}\,dt. \tag{1}$$

6. Beispiel.

a) Wir wollen die im Bereich

Δ: $\quad 0 \leq x \leqq a; \qquad b \leq y \leq b \qquad (a, b > 0)$

definierte Differentialgleichung

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{α}$$

hinsichtlich der lokalen Eindeutigkeit der Lösung im Punkte (0, 0), rechts von $\xi = 0$, untersuchen.

Wir setzen voraus, daß die Funktionen P, Q im Bereich Δ definiert sind; ferner, daß die rechte Seite von (α) sowie die Funktionen Q, Q'_x im Bereich Δ stetig sind und die Funktion Q für jedes $x \in (0, a]$ im Intervall $[-b, b]$ fast überall nur positive Werte annimmt.

Man kann auf die Differentialgleichung (α) das mit den Werten $\xi = \eta = 0$, $\varrho(x, y) = Q(x, y)$, $L = 0$ realisierte Kriterium 5,4 (1) anwenden.

Dasselbe ergibt, daß *vom Punkt* (0, 0) *lokal genau ein Integral der Differentialgleichung* (α) *ausgeht, wenn für* $(x;\ y_1, y_2) \in \omega$ *die folgende Ungleichung besteht:*

$$x\,.\,\{P(x, y_2) - P(x, y_1)\} \leqq \int_{y_1}^{y_2} \{Q(x, t) - xQ'_x(x, t)\}\,dt. \tag{1}$$

b) Man kann die Funktionen P, Q mit einem geeigneten willkürlichen Faktor $\sigma(x, y)$ multiplizieren, ohne die Eigenschaften der Integrale von (α) zu beeinflussen. Wählt man z. B. $\sigma(x, y) = x\,.\,\sigma(y)$, σ im Intervall $[-b, b]$ stetig und daselbst fast überall positiv, und wendet man die Formel (1) an, so kommt die folgende Beziehung heraus:

$$\sigma(y_2)\,P(x, y_2) - \sigma(y_1)\,P(x, y_1) \leqq -\int_{y_1}^{y_2} \sigma(t)\,Q'_x(x, t)\,dt. \tag{2}$$

Wir sehen, daß *vom Punkt* (0, 0) *lokal genau ein Integral der Differentialgleichung* (α) *ausgeht, wenn es eine im Intervall* $[-b, b]$ *stetige und daselbst fast überall positive Funktion* σ *gibt, die für* $(x;\ y_1, y_2) \in \omega$ *die Ungleichung* (2) *befriedigt.*

c) Wir machen die zusätzliche Voraussetzung, daß die Funktion P für jedes $x \in (0, a]$ eine partielle Ableitung im bezug auf y besitzt, die in dem Intervall $[-b, b]$ von oben beshränkt ist.

Wir bezeichnen für jedes $x \in (0, a]$ mit $M(x)$ bzw. $N(x)$ die obere Grenze von $P'_y(x, t)$ bzw. das Maximum von $Q'_x(x, t)$ im Intervall $[-b, b]$, und mit $n(x)$ das Minimum von $Q(x, t)$ ebenfalls in $[-b, b]$.

Wir wenden auf beide Seiten der Ungleichung (1) die entsprechenden Mittelwertsätze an und sehen, daß die Ungleichung (1) immer dann erfüllt ist, wenn die folgende Beziehung besteht:

$$x \cdot \{M(x) + N(x)\} \leq n(x), \tag{3}$$

und umsomehr, wenn

$$M(x) + N(x) \leqq 0. \tag{4}$$

Wir sehen, daß *unter der zusätzlichen Voraussetzug* c) *über die Funktion P, vom Punkt* (0, 0) *lokal genau ein Integral der Differentialgleichung* (α) *ausgeht, wenn für jedes* $x \in (0, a]$ *eine der Ungleichungen* (3), (4) *erfüllt ist.*

d) Wir wollen die Tragweite unserer Überlegungen an einem speziellen Fall überprüfen.

Wendet man z. B. die obigen Resultate auf die in der Literatur mehrmals[6][7][8] erwähnte Differentialgleichung

$$y' = a \cdot \frac{x^3 \cdot y}{x^4 + y^2} \qquad (a = \text{Konst.}) \tag{α'}$$

an, wobei der rechten Seite für $x = y = 0$ der Wert 0 zukommt, so ist die Ungleichung (1)

$$a \cdot x^4(y_2 - y_1) \leqq \{-3x^4 + \frac{1}{3}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\}(y_2 - y_1).$$

Daraus folgt für $y_2 - y_1 > 0$ die Beziehung:

$$[3x^4(a + 3) \leqq y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2,$$

und man sieht, daß die Lösung der Differentialgleichung (α') im Punkt (0, 0), für $x > 0$, immer dann lokal eindeutig ist, wenn $a \leqq -3$.

Wendet man die Formel (2) an, so folgt die Beziehung:

$$a\{y_2\sigma(y_2) - y_1\sigma(y_1)\} \leqq -4 \int_{y_1}^{y_2} \sigma(t)\, dt$$

und daraus, für $\sigma(y) = y^{2k}$, $k > 0$,

$$a \leqq -\frac{4}{2k+1}.$$

Man sieht, daß die rechtsseitige lokale Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (α') für alle $a < 0$ und offenbar auch für $a = 0$ gesichert ist.

---

[6]) G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* Math. Ann., 37 (1890), 182.

[7]) M. Nagumo, *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.* Japanese Journ. Math., 3 (1926), 107.

[8]) T. Yosie, *Über die Unität der Lösung der gewöhnlichen Differentialleicghungen erster Ordnung.* Japanese Journ. Math., 2 (1925), 161.

Für die Differentialgleichung (α') hat man:

$$M(x) \quad a \,.\, x^3; \qquad N(x) = 4x^3; \qquad n(x) - x^4.$$

Die Ungleichung (3) ergibt $a \leq -3$, während die Ungleichung (4): $a < -4$. Das Kriterium von Peano und eine Nebenbetrachtung ergeben die Eindeutigkeit für alle $a < 0$ während das Kriterium von Rosenblatt—Naguno für $-1 < a < +1$[7]).

Do redakcie dodané 20. III. 1956

Zobecnění vět o jednoznačnosti integrálů diferenciální rovnice $y' - f(x, y)$

O. Boruvka, Brno

Výtah

1. Pro diferenciální rovnici

$$y' \quad f(x, y) \tag{α}$$

je známa řada vět popisujících dostatečné podmínky pro unicitu integrálů v daném bodě. Zpravidla jsou tato kriteria založena na majorisaci funkce $f(x, y_2) - f(x, y_1)$ nebo její absolutní hodnoty. Toto význačné postavení rozdílu se nezdá zcela opráv něné, protože v konkretních případech může být mnohem výhodnější majorisace jiných funkcí závislých na $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, které by byly přizpůsobeny poli diferenciální rovnice. Na této myšlence je založena předložená práce, obsahující obecnou větu, která zahrnuje většinu známých kriterií a umožňuje přizpůsobení struktury kriteria povaze dané diferenciální rovnice.

2. Obecné kriterium pro jednoznačnost integrálů.

Nechť oborem diferenciální rovnice (α) je dvojrozměrný interval:

$$\Delta: \qquad \xi < x < \xi + a; \qquad \eta - b < y < \eta + b \qquad (a, b > 0).$$

Nechť φ, Φ jsou funkce tří proměnných mající tyto vlastnosti:

1. Funkce $\varphi(x; u, v)$ je definována v oboru

$$\omega: \qquad \xi < x \leq \xi + a; \qquad \eta - b < u \quad v < \eta + b$$

a vyznačuje se tím, že

a) její hodnota v každém bodě $(x; u, v) \in \omega$ je větší nebo rovna nule podle toho, zda jest $u < v$ nebo $u - v$;

b) v oboru ω je spojitá a má v něm spojité parciální derivace φ'_x, φ'_u, φ'_v;

c) splňuje relaci

$$\lim_{x \to \xi} \varphi[x; u(x), v(x)] \quad 0$$

pro každé dva integrály u, v diferenciální rovnice (α), které vycházejí z bodu (ξ, η) a splňují nerovnosti $\eta - b < u(x) \leqq v(x) < \eta + b$.

2. Funkce $\Phi(x; u, z)$ je definována v oboru

$$\Omega: \quad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq u \leqq \eta + b; \qquad 0 \leqq z < +\infty$$

a vyznačuje se tím, že

a) je v oboru Ω spojitá;

b) v oboru ω platí nerovnost:

$$\varphi'_x(x; u, v) + \varphi'_u(x; u, v)\, f(x, u) + \varphi'_v(x; u, v)\, f(x, v) \leqq \Phi[x; u, \varphi(x; u, v)];$$

c) pro každý integrál $u(x)$ diferenciální rovnice (α), který vychází z bodu (ξ, η) a existuje v intervalu $[\xi, \xi + a]$, je $z(x) \equiv 0$ jediné řešení diferenciální rovnice

$$z' = \Phi[x; u(x), z],$$

které vychází z bodu $(\xi, 0)$, a existuje v části intervalu $[\xi, \xi + a]$.

Za těchto předpokladů platí následující tvrzení:

Každé dva integrály diferenciální rovnice (α), *vycházející z bodu* (ξ, η), *v jistém okolí vpravo od čísla* ξ *splývají.*

Když funkce φ *je v oboru* ω *ohraničená nebo funkce* f *v oboru* Δ *spojitá, je řešení diferenciální rovnice* (α) *v bodě* (ξ, η), *vpravo od čísla* ξ, *lokálně jednoznačné.*

3. Vhodnou volbou funkcí φ, Φ plyne z této věty převážná většina známých kriterií pro jednoznačnost integrálů diferenciální rovnice (α) a též další kriteria nového druhu.

Обобщение теорем об однозначности дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$

О. Борувка, Брно

Резюме

1. Для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \qquad (\alpha)$$

известен ряд теорем, описывающих достаточные условия для однозначности интегралов в данной точке. Обычно, эти критерии основаны на майоризации функции $f(x, y_2) - f(x, y_1)$ или её абсолютной величине. Это знаменательное положение разности кажется не совсем регулярным, потому что в конкретных случаях может быть более выгодная майоризация других функций, зависимых от $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, которые были бы приспособлены полю дифференциального уравнения. На этой идее основана предложенная работа, содержащая общую теорему, которая включает большинство известных критерий и позволяет приспособление структуры критерия свойству данного дифференциального уравнения.

2. Общий критерий для однозначности интегралов.

Пусть областью определения дифференциялього уравнения (α) является двумерный интервал:

$$\Delta: \qquad \xi \leqq x \leqq \xi + a; \qquad \eta - b \leqq y \leqq \eta + b \quad (a, b > 0).$$

Пусть φ, Φ функции трех переменных, обладающие следующими свойствами:

1. Функция $\varphi(x; u, v)$ определена в области определения

$$\omega: \qquad \xi < x \_ \xi + a; \qquad \eta - b \quad u < v < \eta \quad b$$

и характеризуется тем, что

а) её значение в каждой точке $(x; u, v) \in \omega$ больше нуля, или равно нулю, в зависимости от того, естьли $u < v$, или $u - v$;

в) в области ω она непрерывна и имеет в этой области непрерывные частные производные φ'_x, φ'_u, φ'_v;

с) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \to \xi +} \varphi[x; u(x), v(x)] \quad 0$$

для каждых двух интегралов u, v дифференциального уравнения (α), выходящих из точки (ξ, η) и удовлетворяющих неравенствам: $\eta - b < u(x) \leq v(x) \quad \eta + b$.

2. Функция $\Phi(x; u, z)$ определена в области

$$\Omega: \qquad \xi < x < \xi + a; \qquad \eta - b < u \leq \eta + b, \qquad 0 < z \qquad \infty$$

и характеризуется тем, что

а) в области Ω она непрерывна;

b) в области ω имеет место неравенство:

$$\varphi'_x(x; u, v) + \varphi'_u(x; u, v) f(x, u) + \varphi'_v(x; u, v) f(x, v) < \Phi[x; u, \varphi(x; u, v)];$$

c) для каждого интеграла $u(x)$ дифференциального уравнения (α), выходящего из точки (ξ, η) и существующего в интервале $[\xi, \xi + a]$, $z(x) \quad 0$ является единственным решением дифференциального уравнения

$$z' \quad \Phi[x; u(x), z],$$

выходящим из точки $(\xi, 0)$ и существующим в части промежутка $\xi, \xi + a]$.

При этих предположениях имеет место следующее утверждение:

Каждые два интеграла дифференциального уравнения (α), *выходящие из точки* (ξ, η), *в определённой окрестности справа числа* ξ *совпадают.*

Если функция φ *в области* ω *ограничена или функция* f *в области* Δ *непрерывна, то решение дифференциального уравнения* (α) *в точке* (ξ, η) *вправо числа* ξ, *является локально однозначным.*

3. Удобным выбором функций φ, Φ из этой теоремы вытекает значительное большинство известных критерий для однозначности интегралов дифференциального уравнения (α) и тоже дальнейшие критерии нового рода.