Otakar Borůvka

Sur la transformation des intégrales des équations differentielles linéaires ordinaires du second ordre

Ann. Mat. Pura Appl., IV Ser., Vol. 41, 1956, 325-342

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500076

Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre.

Mémoire par O. Borůvka (à Brno).

Resumé. - ***Le présent Mémoire contient la partie analytique d'une théorie des transformations des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Il s'agit des équations réelles (a), (A) (p. 327) et des questions de caractère global. La théorie développée gravite autour des propriétés des équations différentielles non-linéaires du troisième ordre (b), (B) (p. 327). Sont donnés, en particulier, les théorèmes sur l'existence et l'unicité ainsi que les expressions explicites pour les intégrales des équations (b), (B).***

1. Introduction.

L'origine de la théorie des transformations des intégrales concernant les équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre remonte à l'illustre géomètre allemand E. E. Kummer. Dans son Mémoire latin « *De generali quadam equatione differentiali tertii ordinis* », inséré en 1834 dans le programme de lycée à Liegnitz et republié en 1887 dans le Journal de Crelle (Vol. 100), Kummer s'occupe de l'équation différentielle du troisième ordre

$$2\frac{z'''}{z'} - 3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 - Z\cdot z'^2 + X = 0, \tag{1}$$

Z étant une fonction de z et X fonction de la variable indépendante x.

Le point de départ du Mémoire de Kummer constitue un problème concernant deux équations différentielles du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\cdot\frac{dy}{dx} + q\cdot y = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + P\cdot\frac{dv}{dz} + Q\cdot v = 0, \tag{3}$$

dans lesquelles, naturellement, les coefficients p, q et P, Q sont fonctions de x et z.

Le problème en question est le suivant. Soit $v(z)$ une intégrale de l'équation (3). Il s'agit de trouver des fonctions $w(x)$, $z(x)$ de manière que, la fonction, y, composée suivant la formule

$$y(x) = w(x)\cdot v[z(x)], \tag{4}$$

soit une intégrale de l'équation (2). En d'autres termes, il s'agit de transformer, les unes aux autres, de la façon indiquée par la formule (4), les intégrales des deux équations différentielles (2) et (3).

Le résultat principal de KUMMER consiste en ceci que, l'existence des fonctions w, z étant supposée, la fonction z vérifie l'équation du troisième ordre (1) aux coefficients Z, X suivants

$$Z = 2\frac{dP}{dz} + P^2 - 4Q, \qquad X = 2\frac{dp}{dx} + p^2 - 4q;$$

en même temps, la fonction w, appelée *multiplicateur*, se trouve exprimée par la formule

$$w^2 = c \cdot e^{\int P dz} \cdot e^{-\int p dx} \cdot \frac{dx}{dz},$$

c étant une constante. De plus, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ et $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ étant des couples d'intégrales linéairement indépendantes des équations (2) et (3), la fonction $z(x)$ remplit identiquement une relation bilinéaire à coefficients constants

$$A\varphi(x)\psi(z) + B\varphi(x)\psi_1(z) + C\varphi_1(x)\psi(z) + D\varphi_1(x)\psi_1(z) = 0. \tag{5}$$

Si l'on connait les fonctions φ, φ_1; ψ, ψ_1, alors la relation (5), formée avec d'arbitraires constantes A, B, C, D, réalise, d'après KUMMER, l'intégrale complète de l'équation du troisième ordre (1).

La théorie de KUMMER a trouvé d'extensions, au cours du XIX^e siècle, surtout dans le domaine des équations différentielles linéaires ordinaires d'ordres supérieurs [1]. Cependant, les raisonnements originaux de KUMMER n'ont pas été approfondis jusqu'ici, d'après ma connaissance, de manière à former une théorie satisfaisante du point de vue de théories modernes; c'est là, probablement, la raison que, la théorie des transformations des intégrales concernant les équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre ne se trouve pas contenue dans les livres récents s'occupant de ces équations. Pourtant, la nature de nombreux problèmes classiques et modernes dont on s'occupe dans la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre, p. ex. les questions autour de la théorie classique de FLOQUET, les critères concernant le caractère oscillatoire des solutions, l'allure asymptotique des intégrales, problèmes aux limites, etc., laisse prévoir que, la méthode de transformer les integrales d'une équation donnée aux cas beaucoup plus simples, même aux intégrales des équations telles que $y'' = 0$ ou bien $y'' = -k^2y$, peut fournir de grands avantages. Les raisonnements de KUMMER se trouvent basés sur les seuls procédés de différentiation et sur certaines opérations algébriques tandis que les questions plus profondes d'intégration, surtout les théorèmes précis concernant l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation du troisième ordre (1), y sont

[1] L. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig (1897), T II, 1; p. 185.

entièrement négligées. Voilà les problèmes de départ dont doit s'occuper toute revision moderne de la théorie de Kummer pourqu' on en puisse espérer un progrès essentiel de la théorie des équations différentielles lineaires du second ordre et celles d' ordres supérieurs.

Nous allons donner, dans ce Mémoire, les fondements de la théorie en question. Il s'agit, bien entendu, de matières concernant le domaine réel et de caractère global. La théorie présentée généralise, en grands traits, la partie analytique de ma théorie des dispersions qui s'occupe des transformations des intégrales d'une équation différentielle linéaire ordinaire du second ordre aux intégrales de la même équation différentielle, sous conditions particulières ([2]).

2. Description de la situation de départ.

Nous partons des deux équations différentielles linéaires du second ordre du type de Jacobi

$$a) \qquad y'' = q(t)y; \qquad Y'' = Q(T)Y, \qquad (A)$$

les fonctions q, Q étant supposées continues dans les intervalles ouverts j, J.

A côté de ces équations nous considérons les deux équations différentielles non-linéaires du troisième ordre

$$b) \quad \sqrt{|X'|}\left[\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right]'' + Q(X)X'^2 = q(t); \qquad \sqrt{|\dot{x}|}\left[\frac{1}{\sqrt{|\dot{x}|}}\right]^{\cdot\cdot} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T). \qquad (B)$$

dans lesquelles les X, x désignent les fonctions inconnues.

Nous aurons aussi à considérer les cas particuliers de ces équations

$$b) \quad \sqrt{|X'|}\left[\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right]'' + q(X)X'^2 = q(t); \qquad \sqrt{|\dot{x}|}\left[\frac{1}{\sqrt{|\dot{x}|}}\right]^{\cdot\cdot} + Q(x)\dot{x}^2 = Q(T). \qquad (B)$$

En désignant par $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ les dérivées schwarziennes des fonctions X, x,

$$\{X, t\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\cdot\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}, \qquad \{X, T\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\dddot{x}(T)}{\dot{x}(T)} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\ddot{x}^2(T)}{\dot{x}^2(T)},$$

les équations (b), (B) et (b), (B) peuvent s'écrire

$$b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t); \qquad -\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T); \qquad (B)$$

$$(b) \qquad -\{X, t\} + q(X)X'^2 = q(t); \qquad -\{x, T\} + Q(x)\dot{x}^2 = Q(T). \qquad (B)$$

([2]) O. Borůvka, *Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du second ordre*, Czech. Math. Journ., **3** (78), 1953, p. 199-255. (En russe. Résumé français).

Les équations (*b*), (*B*) sont évidemment de la forme considérée par Kummer dans son Mémoire mentionné dans le nº 1.

3. La transformation birationnelle $\mathfrak{T}$.

Nous commençons par considérer la transformation ponctuelle birationnelle, $\mathfrak{T}$, opérant dans l'espace à trois dimensions, qui fait associer l'un à l'autre, deux points arbitraires X' $(\neq 0)$, X'', X''' et $\dot{x}$ $(\neq 0)$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, d'après les formules

$$(\mathfrak{T}) \qquad \begin{aligned} X' &= \frac{1}{\dot{x}}, & \dot{x} &= \frac{1}{X'}, \\ X'' &= -\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}, & \ddot{x} &= -\frac{X''}{X'^3}, \\ X''' &= 3\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^5} - \frac{\dddot{x}}{\dot{x}^4}; & \dddot{x} &= 3\frac{X''^2}{X'^5} - \frac{X'''}{X'^4}. \end{aligned}$$

Dans cette transformation, $\mathfrak{T}$, la fonction $K(X)$ définie par la formule

$$K(X) = \frac{X''^2}{X'^3},$$

résulte invariante:

$$(6) \qquad \frac{X''^2}{X'^3} = \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3}.$$

La fonction schwarzienne

$$S(X) = \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2},$$

à son tour, se transforme suivant la formule

$$(7) \qquad \frac{S(X)}{X'} + \frac{S(x)}{\dot{x}} = 0.$$

On arrive à la notion de la transformation $\mathfrak{T}$ en considérant les relations existant entre les valeurs de deux fonctions d'un argument, mutuellement inverses, et celles de leurs dérivées.

Soient $X(t)$, $x(T)$ deux fonctions inverses l'une à l'autre, définies dans les intervalles i, I. On suppose, par conséquent, que les fonctions X, x sont proprement monotones dans les intervalles $i = x(I)$, $I = X(i)$.

Nous appelons *associés* par rapport aux fonctions X, x) deux nombres arbitraires, $t \in i$, $T \in I$, liés par les formules $T = X(t)$, $t = x(T)$; nous disons aussi que le nombre t (T) est associé au nombre T (t).

Supposons que les fonctions X, x possèdent partout (dans les intervalles i, I) les dérivées du troisième ordre. Alors, en vertu de théorèmes élémentaires, les valeurs des dérivées X', X'', X''' de la fonction X et celles des dérivées $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, de la fonction x, prises en deux nombres $t \in i$, $T \in I$ associés quelconques, sont liés par les relations

$$X'\dot{x} = 1,$$

$$X''\dot{x} + X'^2\ddot{x} = 0; \qquad \ddot{x}X' + \dot{x}^2X'' = 0;$$

$$X'''\dot{x} + 3X''\ddot{x} + \dddot{x}X'^2 = 0.$$

On en déduit facilement que, *les valeurs des dérivées des fonctions X, x, prises en deux nombres associés arbitraires, se transforment, les unes aux autres, par la transformation $\mathfrak{T}$.*

Ce résultat met en évidence la possibilité d'élargir la notion de la transformation $\mathfrak{T}$ aux espaces possédant un nombre arbitraire de dimensions.

4. Remarques sur la dérivée schwarzienne.

Nous allons indiquer rapidement quelques propriétés de la dérivée schwarzienne dont nous aurons besoin dans la suite.

Considérons deux fonctions $X(t)$, $x(T)$ mutuellement inverses, définies dans les intervalles i, I; nous supposons, que ces fonctions possèdent partout les dérivées du troisième ordre.

a On démontre facilement qu'on a, en deux nombres quelconques, $t \in i$, $T \in I$, les formules

$$\frac{\{X, t\}}{X'} = \frac{1}{4}\frac{X''^2}{X'^3} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X'}\right]'',$$

$$\frac{\{x, T\}}{\dot{x}} = \frac{1}{4}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\dot{x}}\right]^{\cdot\cdot}.$$

En prenant, en particulier, deux nombres associés et en appliquant les formules (6), (7), valables pour les fonctions K, S, on voit qu'*on a en deux nombres associeés quelconques, $t \in i$, $T \in I$, la relation symétrique*

$$\frac{\{X, t\}}{X'} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X'}\right]'' = \frac{\{x, T\}}{\dot{x}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\dot{x}}\right]^{\cdot\cdot}. \tag{8}$$

b Soit $Z(t)$ une fonction proprement monotone, définie dans l'intervalle h. Nous supposons que les valeurs de la fonction Z appartiennent à l'intervalle i et que cette fonction possède partout la dérivée du troisième ordre.

Désignons par XZ la fonction composée $X[Z(t)]$, définie, manifestement, dans l'intervalle h.

Dans ces suppositions *la fonction XZ admet en chaque nombre $t \in h$ la dérivée schwarzienne qui s'exprime par la formule* ([3])

$$\{XZ, t\} = \{X, Z(t)\} Z'^2(t) + \{Z, t\}. \tag{9}$$

5. **Propriétés des intégrales des équations (b), (B).**

1. *Soit X une intégrale de l'équation* (b)*, définie dans l'intervalle $i \subset j$. Alors la fonction inverse, x, définie dans l'intervalle $I = X(i)$, satisfait à l'équation* (B).

En effet, soit $T \in I$ un nombre arbitraire et $t = x(T) \in i$ le nombre associé. X étant une intégrale de l'équation (b), nous avons, au nombre t,

$$-\frac{\{X, t\}}{X'} + Q(X)X' = \frac{q(t)}{X'}. \tag{10}$$

En vertu de (7) et de la première formule ($\mathfrak{T}$), l'équation en question s'écrit

$$\frac{\{x, T\}}{\dot{x}} + Q(T)\frac{1}{\dot{x}} = q(x)\dot{x}.$$

On en tire la formule

$$-\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T),$$

conformément à la proposition.

2. *Soient X, x deux intégrales des équations* (b), (B)*, mutuellement inverses, définies dans les intervalles $i \subset j$, $I \subset J$. Alors on a, en deux nombres associés quelconques, $t \in i$, $T \in I$,* les relations

$$Q(X)X' - \frac{1}{2}\cdot\frac{\{X, t\}}{X'} = q(x)\dot{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\{x, T\}}{\dot{x}}, \tag{11}$$

$$Q(X)X' + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{X'}\right]'' = q(x)\dot{x} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\dot{x}}\right]^{\cdot\cdot}. \tag{12}$$

En effet, on a d'abord une relation telle que (10). On en tire la formule

$$Q(X)X' - \frac{1}{2}\cdot\frac{\{X, t\}}{X'} = q(x)\dot{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\{X, t\}}{X'},$$

qui entraîne, d'après (7), la relation (11).

La formule (12) est valable en vertu des équations (11) et (8).

3. *Soient X; y; $\bar{X}$; $\bar{y}$ d'arbitraires intégrales des équations respectivement* (b); (B); ($\bar{b}$); ($\bar{B}$). *Alors les fonctions composées $X\bar{X}$; $y\bar{X}$; $y\bar{y}$; $X\bar{y}$; $\bar{y}X$; $\bar{X}y$, en tant qu'elles existent, vérifient les équations respectivement* (b); (b); (B); (B); ($\bar{b}$); ($\bar{B}$).

[3] V. p. ex. A. R. Forsyth, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*. 2. *Aufl.*, Braunschweig (1912), p. 232.

Supposons, p. ex., que les valeurs de la fonction X appartiennent à l'intervalle de définition de la fonction X, de sorte que la fonction XX existe dans le même intervalle que X.

Les fonctions X, X étant intégrales des équations (b), (b), nous avons, pour chaque valeur, t, située dans l'intervalle de définition de la fonction X,

$$-\{X, t\} + q(X)X'^2 = q(t),$$

$$-\{X, X\} + Q(XX)X'^2(X) = q(X).$$

et en même temps, d'après (9),

$$\{XX, t\} = \{X, X\} \cdot X'^2 + \{X, t\}.$$

Ces formules entraînent les relations

$$-\{XX, t\} = [-Q(XX)X'^2(X) + q(X)]X'^2 - \{X, t\} = -Q(XX)(XX)'^2 + q(t).$$

Il en résulte

$$-\{XX, t\} + Q(XX)(X\bar{X})^2 = q(t),$$

de sorte que la fonction XX vérifie l'équation (b).

Les autres propositions du théorème en question se démontrent d'une manière analogue.

6. Relation entre les intégrales des équations (a), (A), (b), (B).

Il y a, naturellement, des relations existant entre les intégrales des équations en question qui gravitent autour de la relation telle que (4) laquelle se trouve au début de la théorie classique de Kummer.

Dans la suite nous aurons à considérer des intégrales des équations (a), (A); il s'agit, bien entendu, des intégrales définies dans les intervalles j, J toutes entières, s'il n'y a pas d'avis contraire.

Soit X une intégrale de l'équation (b), définie dans un intervalle $i \subset j$. D'après 5,1, la fonction inverse, x, définie dans l'intervalle $I = X(i)$, satisfait à l'équation (B).

Choisissons un nombre arbitraire $t_0 \in i$ et désignons par X_0, X_0' $(\neq 0)$, X_0'' les valeurs des fonctions X, X', X'' au nombre t_0; de même, posons $T_0 = X(t_0)$ $(= X_0) \in I$ et désignons par x_0, $\dot{x}_0$ $(\neq 0)$, $\ddot{x}_0$ les valeurs des fonctions x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, au nombre T_0. Les nombres X_0', X_0'' et $\dot{x}_0$, $\ddot{x}_0$ se rattachent mutuellement suivant les formules (7).

Les relations existant entre les intégrales des équations (a), (A), (b), (B) peuvent se décrire par les théorèmes suivants.

1. *Soit U une intégrale de l'équation (A). Alors la fonction*

$$u(t) = \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \tag{13}$$

définie dans l'intervalle i, représente l'intégrale de l'équation (a), déterminée par les conditions initiales cauchyennes

$$\begin{aligned} u(t_0) &= \frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}, \\ u'(t_0) &= \frac{U'(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} \cdot X_0' - \frac{1}{2} \frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} \cdot \frac{X_0''}{X_0'}. \end{aligned} \tag{14}$$

En effet, la fonction u possède pour chaque $t \in i$ la dérivée première et la seconde qui s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{U'(X)}{\sqrt{|X'|}} \cdot X' + U(X)\left[\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right]', \\ u''(t) &= \frac{U''(X)}{\sqrt{|X'|}} X'^2 - \frac{U(X)}{\sqrt{|X'|}} \cdot \{X, t\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Les fonctions U et X étant intégrales des équations (A) et (b), nous avons, pour chaque $t \in i$, les relations

$$\begin{aligned} U''(X) &= Q(X)U(X), \\ -\{X, t\} &= -Q(X)X'^2 + q(t). \end{aligned}$$

Il résulte de ces formules

$$u''(t) = \frac{U(X)}{\sqrt{|X'|}} Q(X)X'^2 + \frac{U(X)}{\sqrt{|X'|}}[-Q(X)X'^2 + q(t)],$$

et par conséquent

$$u''(t) = q(t)u(t).$$

La fonction u résulte ainsi une intégrale de l'équation (a). En vertu des formules (13) et (15) cette intégrale vérifie les conditions (14).

2. *L'intégrale U considérée au théorème précédent s'exprime, dans l'intervalle I, au moyen de l'intégrale u, suivant la formule inverse*

$$U(T) = \frac{u[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}}; \tag{16}$$

celle intégrale U est celle déterminée par les conditions initiales cauchyennes

$$
\begin{aligned}
&U(T_0) = \frac{u(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\,; \\
(17)\qquad &U'(T_0) = \frac{u'(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\,\dot{x}_0 - \frac{1}{2}\,\frac{u(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\,\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}.
\end{aligned}
$$

En effet, d'après le théorème précédent, la fonction

$$\bar{U}(T) = \frac{u[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}},$$

définie dans l'intervalle I, représente l'intégrale de l'équation (A), déterminée par les conditions initiales cauchyennes

$$\bar{U}(T_0) = \frac{u(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}},$$

$$\bar{U}'(T_0) = \frac{u'(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\,\dot{x}_0 - \frac{1}{2}\,\frac{u(x_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\cdot\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}.$$

En tenant compte de ces équations et des formules (14) et ($\mathfrak{T}$), nous avons

$$\bar{U}(T_0) = \frac{u(t_0)}{\sqrt{|\dot{x}_0|}} = \frac{1}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\cdot\frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} = \bar{U}(X_0) = U(T_0),$$

$$\bar{U}'(T_0) = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\left[\frac{U'(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\cdot X_0' - \frac{1}{2}\cdot\frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\,\frac{X_0''}{X_0'}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\dot{x}_0|}}\cdot\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}\cdot\frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}} =$$

$$= U'(X_0) - \frac{1}{2}\,U(X_0)\left[\frac{X_0''}{X_0'^2} + \frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}\right] = \bar{U}'(X_0) = U'(T_0).$$

ou bien, en définitive,

$$U(T_0) = \bar{U}(T_0),$$

$$\bar{U}'(T_0) = U'(T_0).$$

Il en résulte l'identité $\bar{U}(T) = U(T)$ valable dans l'intervalle I, c'est ce qui achève la démonstration.

3. ***Les valeurs des intégrales en question, U, u, et de leurs dérivées U', u', prises en deux nombres associés quelconques, $T \in I$, $t \in i$, remplissent les équations suivantes***

$$\frac{U(X)}{\sqrt[4]{|X'|}} = \frac{u(x)}{\sqrt[4]{|\dot{x}|}},$$

$$\varepsilon \cdot U'(X)\sqrt[4]{|X'|} - \frac{1}{4}\cdot\frac{U(X)}{\sqrt[4]{|X'|}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\cdot\frac{X''}{X'} = u'(x)\sqrt[4]{|\dot{x}|} - \frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{u(x)}{\sqrt[4]{|\dot{x}|}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\dot{x}|}}\cdot\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}.$$

où l'on a posé $\varepsilon = \operatorname{sgn} X_0' = \operatorname{sgn} \dot{x}_0$.

On obtient ces équations en se servant des formules (13), (16) et de leurs dérivées et en tenant compte des formules ($\mathfrak{T}$).

7. Théorème sur l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation (b).

Nous allons démontrer le théorème fondamental suivant:

Soient $t_0 \in j$; $X_0 \in J$, X_0' ($\neq 0$), X_0'' des nombres arbitraires. Il existe précisément une intégrale $X(t)$ de l'équation (b), définie dans un intervalle ouvert, i, qui satisfait aux conditions initiales cauchyennes

$$X(t_0) = X_0, \qquad X'(t_0) = X_0', \qquad X''(t_0) = X_0'',$$

et qui est en même temps la plus large en ce sens que, toute intégrale de l'équation (b) vérifiant les mêmes conditions initiales, en fait partie.

Soient U, V des intégrales arbitraires de l'équation (A), linéairement indépendantes, définies dans l'intervalle J; soient u, v les intégrales de l'équation (a), définies dans j et déterminées par les conditions initiales

$$u(t_0) = \frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}; \qquad u'(t_0) = \frac{U'(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\cdot X_0' - \frac{1}{2}\cdot\frac{U(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\cdot\frac{X_0''}{X_0'},$$

18)
$$v(t_0) = \frac{V(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}; \qquad v'(t_0) = \frac{V'(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\cdot X_0' - \frac{1}{2}\cdot\frac{V(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\cdot\frac{X_0''}{X_0'};$$

finalement, soient P, ρ les premières amplitudes de ces couples d'intégrales,

$$P = \sqrt{U^2 + V^2}, \qquad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Alors l'intégrale $X(t)$ en question coïncide avec la plus large intégrale (unique) de l'équation différentielle du premier ordre, à variables séparées,

c)
$$X' = \operatorname{sgn} X_0' \cdot \frac{P^2(X)}{\rho^2(t)},$$

qui prend au nombre t_0 la valeur X_0.

Démonstration. - Désignons par W (w) la wronskienne du couple ordonné d'intégrales U, V (u, v); nous avons, par conséquent.

$$W = UV' - U'V; \qquad w = uv' - u'v.$$

En vertu des formules (18) on a la relation

$$w = \operatorname{sgn} X_0' \cdot W. \tag{19}$$

Il en résulte que les intégrales u, v sont linéairement indépendantes de sorte que, la fonction ρ, définie dans l'intervalle j, est toujours positive.

Nous remarquons que les formules (18) entraînent les relations

$$X_0' = \operatorname{sgn} X_0' \cdot \frac{P^2(X_0)}{\rho^2(t_0)}; \qquad P(X_0)P'(X_0) - \operatorname{sgn} X_0' \cdot \rho(t_0)\rho'(t_0) = \frac{1}{2} P^2(X_0)\frac{X_0''}{X_0'^2}. \tag{20}$$

L'équation (c) possède précisément une intégrale, X, définie dans un intervalle $i \subset j$, qui prend au nombre t_0 la valeur X_0 et qui est la plus large en ce sens que, toute intégrale de l'équation (c), vérifiante la même condition initiale. en fait partie. Au sujet de l'intervalle i nous donnerons une explication plus détaillée au n° 8. L'intégrale X appartient, évidemment, à la classe C_3.

Nous allons donner la démonstration du théorème ci-dessus en s'assurant successivement des trois propositions suivantes:

a) La fonction X satisfait, dans l'intervalle i, à l'équation (b);

b) sont vérifiées les relations $X'(t_0) = X_0'$; $X''(t_0) = X_0''$;

c toute solution de l'équation (b), $\bar{X}$, vérifiant les conditions initiales $\bar{X}(t_0) = X_0$; $\bar{X}'(t_0) = X_0'$; $\bar{X}''(t_0) = X_0''$, fait partie de l'intégrale X.

Nous passons à la démonstration de ces propositions.

a) Nous avons, évidemment, pour $t \in i$, la formule

$$\rho(t) = \frac{P(X)}{\sqrt{|X'|}}.$$

On en déduit facilement

$$\rho''(t) = \frac{P''(X)}{\sqrt{|X'|}} X'^2 - \frac{P(X)}{\sqrt{|X'|}} \{X, t\}.$$

Les fonctions P, ρ satisfont, d'après leur définition, aux équations

$$P''(X) = Q(X)P(X) + \frac{W^2}{P^3(X)}$$

$$\rho''(t) = q(t)\rho(t) + \frac{w^2}{\rho^3(t)}.$$

On a donc, d'après les formules précédentes

$$\rho''(t) = \frac{P''(X)}{\sqrt{|X'|}} X'^2 - \frac{P(X)}{\sqrt{|X'|}} \{X, t\}$$
$$= \frac{P(X)}{\sqrt{|X'|}} Q(X) X'^2 + \frac{W^2}{P^3(X)\sqrt{|X'|}} X'^2 - \frac{P(X)}{\sqrt{|X'|}} \{X, t\}$$
$$= \rho(t) \cdot [Q(X) X'^2 - \{X, t\}] + \frac{W^2}{\rho^3(t)},$$

et finalement, en remplaçant $\rho''(t)$ par sa valeur indiquée ci-dessus,

$$\rho(t) \cdot [-\{X, t\} + Q(X) X'^2 - q(t)] = 0.$$

Or, la fonction ρ étant positive, cette formule montre bien que la fonction X satisfait, dans l'intervalle i, à l'équation (b).

$b)$ On a, pour $t \in i$, les formules

$$X'(t) = \operatorname{sgn} X_0' \cdot \frac{P^2(X)}{\rho^2(t)},$$

$$X''(t) = 2\frac{P^2(X)}{\rho^4(t)} [P(X)P'(X) - \operatorname{sgn} X_0' \cdot \rho(t)\rho'(t)].$$

Il en résulte, d'après (20),

$$X'(t_0) = X_0'; \qquad X''(t_0) = X_0''.$$

$c)$ Soit $\bar{X}$ une solution de l'équation (b), définie dans un intervalle $\bar{i} \subset j$, vérifiante les conditions initiales $\bar{X}(t_0) = X_0$, $\bar{X}'(t_0) = X_0'$, $\bar{X}''(t_0) = X_0''$.

D'après le théorème 6,1 les fonctions

(21)
$$\bar{u}(t) = \frac{U(\bar{X})}{\sqrt{|\bar{X}'|}}, \qquad \bar{v}(t) = \frac{V(\bar{X})}{\sqrt{|\bar{X}'|}},$$

définies dans l'intervalle $\bar{i}$, satisfont à l'équation (a) et vérifient les mêmes conditions initiales que les intégrales u, v:

$$\bar{u}(t_0) = u(t_0); \qquad \bar{u}'(t_0) = u'(t_0);$$
$$\bar{v}(t_0) = v(t_0); \qquad \bar{v}'(t_0) = v'(t_0).$$

Il en résulte que, dans l'intervalle $\bar{i}$, la fonction $\bar{u}$ $(\bar{v})$ fait partie de u (v) et par conséquent la fonction $\bar{\rho} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$ fait partie de ρ. Les formules (21) entraînent qu'on a, pour tout $t \in \bar{i}$, les équations

$$\bar{X}'(t) = \operatorname{sgn} X_0' \cdot \frac{P^2(\bar{X})}{\bar{\rho}^2(t)} = \operatorname{sgn} X_0' \cdot \frac{P^2(\bar{X})}{\rho^2(t)}.$$

On voit que la fonction X représente, dans l'intervalle i, une intégrale de l'équation c). Comme cette intégrale X prend au nombre t_0 la valeur X, elle fait partie de l'intégrale X.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

8. Les intervalles de définition de la plus large intégrale X et de son inverse, x.

Reprenons les notations du n° 7 et posons, pour abréger, $\varepsilon = \operatorname{sgn} X_0'$.

Nous allons établir les propriétés des intervalles i, I, qui représentent les domaines d'existence de la plus large intégrale de l'équation (c, X, prenant au nombre $t_0 \in j$ la valeur $X_0 \in J$, et de son inverse, x.

D'après le théorème du n° 7 et les formules (18), (19), nous pouvons, sans restreindre la généralité de nos considérations, particulariser les intégrales U, V; u, v des équations (a), (A) de manière à satisfaire aux relations

$$(22) \qquad U(X_0) = 0, \qquad W = -1; \qquad u(t_0) = 0, \qquad w = -\varepsilon.$$

Cela étant, soient α; $\mathfrak{A}$ les premières phases des couples ordonnés d'intégrales u, v; U, V, s'annulant en t_0, X_0. Nous rappelons que la fonction α ($\mathfrak{A}$) est définie dans l'intervalle j (J); elle est, dans cet intervalle la seule fonction continue qui s'annule en t_0 (X_0) et dont les valeurs sont celles de convenables branches de la fonction $\operatorname{arc\,tg}(u(t) : v(t))$ ($\operatorname{arc\,tg}(U(T) : V(T))$).

On se rend compte facilement que les fonctions $\varepsilon\alpha$, $\mathfrak{A}$ sont toujours croissantes. Ces fonctions prennent les valeurs $\pi, 2\pi, \ldots$ ($-\pi$, $-2\pi, \ldots$) précisément aux nombres successifs conjugués avec t_0, X_0 et situés à droit (à gauche) de t_0, X_0, dès qu'il y a de tels nombres dans les intervalles j, J. La fonction $\varepsilon\alpha$ ($\mathfrak{A}$) possède partout la dérivée $\varepsilon\alpha'(t) = 1 : \rho^2(t)$ ($\mathfrak{A}'(T) = 1 : P^2(T)$) de sorte qu'on a, pour $t \in j$, $T \in J$,

$$\varepsilon\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}, \qquad \mathfrak{A}(T) = \int_{X_0}^{T} \frac{d\tau}{P^2(\tau)}.$$

Nous désignons par k, K les intervalles (ouverts) formés par les valeurs des fonctions α, $\mathfrak{A}$. Leur intersection $k \cap K$ représente, manifestement, un intervalle ouvert contenant le nombre 0.

a) Il est facile à montrer que, *l'intervalle i (I) est l'image de l'intervalle $k \cap K$ effectuée par la fonction inverse à α ($\mathfrak{A}$), t_0 (X_0) étant en particulier l'image du nombre* 0.

En effet, soient $\bar{i}$, $\bar{I}$ les images de l'intervalle $k \cap K$ effectuées par les inverses aux fonctions α, $\mathfrak{A}$. Envisageons l'équation suivante

$$(23) \qquad \alpha(t) = \mathfrak{A}(T).$$

X étant l'intégrale de l'équation c), définie dans l'intervalle i et prenant au nombre t_0 la valeur X_0, l'équation (23 admet, pour tout $t \in i$, la solution $T = X(t)$. On en tire $t \in i$, $X(t) \in I$ et *a fortiori* $i \subset \bar{i}$, $I \subset I$.

D'autre part, quelque soit $t \in i$, l'équation (23) admet précisément une solution $T \in I$. La fonction correspondante, $T(t)$, définie dans i, satisfait, manifestement, à l'équation différentielle (c) et vérifie la condition initiale $T(t_0) = X_0$; par conséquent la fonction T fait partie de l'intégrale X. Il en résulte $i \subset i$, $I \subset I$.

On a donc $i = i$, $I = I$ conformément à la proposition. La remarque finale de la proposition est évidente.

b) Nous allons montrer que les intervalles i, I contiennent le même nombre de valeurs conjuguées avec les valeurs t, X_0 et qu'ils s'étendent, dans un certain sens, jusqu'aux extrémités des intervalles j, J.

Il s'agit, bien entendu, des valeurs de l'intervalle j (J), qui sont conjuguées avec la valeur t_0 (X_0) par rapport à l'équation différentielle (a) (A)).

Pour préciser, désignons par n_1 (N_1) le nombre de valeurs de l'intervalle j (J), qui sont conjuguées avec la valeur t_0 (X_0) et se trouvent à droit de t_0 (X_0); de même, désignons par n_2 (N_2) le nombre de valeurs analogues à gauche de t_0 (X_0). Les nombres en question peuvent être, naturellement, les extrêmes 0, ∞. Finalement, posons $\nu_1 = \text{Min}(n_1, N_1)$, $\nu = \text{Min}\ n_2, N_2)$, $\mu_1 = \text{Min}(n_2, N_1)$, $\mu_2 = \text{Min}(n_1, N_2)$.

Cela étant, nous allons établir la proposition suivante:

Dans le cas $\varepsilon = 1$, *les deux intervalles* i, I *contiennent précisément* ν_1 (ν_2) *valeurs conjuguées avec* t_0, X_0 *qui sont supérieures (inférieures) à* t_0, X_0. *Ces intervalles s'étendent aux extrémités des intervalles* j, J *dans le sens suivant: Ou bien l'extrémité droite (gauche) de l'intervalle* i *coïncide avec celle de l'intervalle* j, *ou bien l'extrémité droite (gauche) de l'intervalle* I *coïncide avec celle de l'intervalle* J; *ces éventualités ne s'excluent pas mutuellement.*

Dans les cas $\varepsilon = -1$, *les deux intervalles* i, I *contiennent précisément* μ_1 (μ_2) *valeurs conjuguées avec* t_0, X_0 *qui sont inférieures (supérieures à* t *et supérieures (inférieures) à* X_0. *Ces intervalles s'étendent aux extrémités des intervalles* j, J *dans le sens suivant: Ou bien l'extrémité gauche (droite de l'intervalle* i *coïncide avec celle de l'intervalle* j, *ou bien l'extrémité droite (gauche) de l'intervalle* I *coïncide avec celle de l'intervalle* J; *ces éventualités ne s'excluent pas mutuellement.*

Nous nous bornons à établir la proposition pour $\varepsilon = 1$ et à droit des nombres t_0, X_0 car les autres situations sont analogues.

Nous allons distinguer deux cas suivants que coïncident les extrémités droites des intervalles $k \cap K$, k ou bien celles des intervalles $k \cap K$, K. Il est clair que ces eventualités ne s'excluent pas mutuellement.

Dans le premier second) cas coïncident les extrémités droites des intervalles i, j (I, J). On en tire successivement les conclusions suivantes: L'intervalle

i (I) contient précisément n_1 (N_1) valeurs conjuguées avec t_0 (X_0) supérieures à t_0 (X_0); l'intervalle $k \cap K$ contient précisément n_1 (N_1) multiples naturels de π; l'intervalle I (i) contient précisément n_1 (N_1) valeurs conjuguées avec X_0 (t_0) supérieures à X_0 (t_0). D'autre part on a la relation $I \subset J$ ($i \subset j$) qui entraîne $n_1 \leq N_1$ ($N_1 \leq n_1$), de sorte qu'on a $n_1 = \nu_1$ ($N_1 = \nu_1$). La proposition à démontrer est établie.

9. Expressions explicites pour la plus large intégrale X et son inverse, x.

Les considérations précédentes permettent d'établir, immédiatement, des expressions explicites pour la plus large intégrale X et son inverse, x.

Nous continuons à utiliser les notations précédentes et nous désignons par α^{-1}, $\mathcal{A}^{-1}$ les fonctions inverses à α, $\mathcal{A}$.

Nous avons vu que, l'équation (23) admet, pour tout $t \in i$, la solution $T = X(t)$; par conséquent cette équation admet aussi, pour tout $T \in I$, la solution $t = x(T)$.

Il en résulte que, *la plus large intégrale de l'équation* (b), X, *satisfaisant aux conditions initiales* $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X_0'$ ($\neq 0$), $X''(t_0) = X_0''$, *et son inverse*, x, *s'expriment par les formules*

$$X(t) = \mathcal{A}^{-1}[\alpha(t)], \qquad x(T) = \alpha^{-1}[\mathcal{A}(T)],$$

qui sont valables dans les intervalles i, I. Nous rappelons que, *les* α, $\mathcal{A}$, *désignent les premières phases, s'annulant en* t_0, X_0, *des couples ordonnés d'intégrales linéairement indépendantes* u, v: U, V *des équations* (a), (A), *ces intégrales étant soumises à remplir les conditions initiales* (18), (22).

10. Transformation mutuelle de deux intégrales données des équations (a), (A).

Il se pose, naturellement, la question si l'on peut transformer de la manière indiquée, l'une à l'autre, deux intégrales arbitrairement données, u, U, des équations (a), (A), en choisissant convenablement une intégrale $X(t)$ de l'équation (b). La réponse à cette question résulte affirmative à moins qu'on change, au besoin, le signe d'une des intégrales u, U. On peut même prescrire, largement à volonté, les valeurs initiales $t_0 \in j$, ($X_0 =$) $X(t_0) \in J$. Cependant, les données en question ne peuvent pas être absolument arbitraires car, d'après les formules de transformation elles mêmes

$$u(t) = \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \qquad U(T) = \frac{u[x(T)]}{\sqrt{|x'(T)|}},$$

les valeurs des intégrales u, U, en deux nombres associés quelconques, sont de même signe ou bien s'annulent simultanément.

Nous allons préciser la situation par le théorème suivant:

Soient données d'arbitraires intégrales u, U des équations (a), (A) et, en outre, deux nombres quelconques, $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, soumis à la seule condition de vérifier les relations a) ou bien b), à savoir

$$a)\quad u(t_0) \neq 0 \neq U(X_0) \qquad\qquad b)\quad u(t_0) = 0 = U(X_0).$$

Il existe toujours de plus larges intégrales de l'équation (b), X, qui prennent en t_0 la valeur X_0 et transforment, dans leurs intervalles de définition, les intégrales u, U d'après la formule

$$u(t) = \eta \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}.$$

Dans le cas a) il y a précisément une intégrale X qui est croissante et une qui est décroissante; dans le cas b) il y a une infinité dépendant d'un paramètre qui sont croissantes et autant de décroissantes.

On a désigné par η, dans les deux cas, la quantité ± 1, d'après les formules

$$a)\quad \eta = \operatorname{sgn} u(t_0)U(X_0);$$

$$b)\quad \eta = \begin{cases} \operatorname{sgn} u'(t_0)U'(X_0) & \textit{pour les intégrales } X \textit{ croissantes}, \\ -\operatorname{sgn} u'(t_0)U'(X_0) & \textit{pour les intégrales } X \textit{ décroissantes}. \end{cases}$$

Démonstration. - Toute intégrale de l'équation (b), X, s'il en existe, remplit dans son intervalle de définition, i, les relations

$$(24)\qquad \begin{aligned} u(t) &= \eta \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \\ u'(t) &= \eta \left[\frac{U'[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} X'(t) - \frac{1}{2} \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \cdot \frac{X''(t)}{X'(t)}\right]. \end{aligned}$$

On en voit facilement que les fonctions X, X', X'' prennent en t_0, dans les deux cas $a)$, $b)$, les valeurs

$$(25)\qquad \begin{aligned} &a)\ X(t_0) = X_0;\ X'(t_0) = \varepsilon \frac{U^2(X_0)}{u^2(t_0)};\ X''(t_0) = 2\frac{U^2(X_0)}{u^4(t_0)}[U(X_0)U'(X_0) - \varepsilon u(t_0)u'(t_0)], \\ &b)\ X(t_0) = X_0;\ X'(t_0) = \varepsilon \frac{u'^2(t_0)}{U'^2(X_0)}, \end{aligned}$$

ε étant ± 1; dans le cas $b)$ la valeur $X''(t_0)$ n'est pas déterminée par les relations (24).

Si $\varepsilon = +1$ (-1) l'intégrale correspondante, X, est nécéssairement croissante (décroissante) car la fonction X' est de même signe dans toute l'intervalle i.

En se rappelant de l'unicité qui subsiste, d'après le théorème du n° 7, pour les plus larges intégrales de l'équation (b), on voit, par conséquent, que le nombre de plus larges intégrales X, satisfaisantes aux conditions du théorème ne surpasse pas le nombre indiqué dans ce théorème.

Cela étant, soit maintenant X la plus large intégrale de l'équation (b déterminée par les conditions initiales (25) a) ou b); dans le cas b) on prend pour $X''(t_0$ un nombre arbitraire. D'après le n° 7, l'intégrale X en question se trouve complètement déterminée. Nous désignons par i ($\subset j$) son intervalle de définition.

D'après le théorème 6.1, la fonction

$$u(t) = \frac{U[X(t)]}{\sqrt{X'(t)}}\,.$$

définie dans l'intervalle i, représente l'intégrale de l'équation (a) déterminée par les conditions initiales cauchyennes

$$u(t_0) = \frac{U(X_0)}{\sqrt{X'(t_0)}}\,,$$

$$u'(t_0) = \frac{U'(X_0)}{\sqrt{X'(t_0)}}\,X'(t_0) - \frac{1}{2}\,\frac{U(X_0)}{\sqrt{X'(t_0)}}\,\frac{X''(t_0)}{X'(t_0)}\,.$$

Or, en substituant dans ces formules les valeurs $X(t_0)$, $X''(t_0)$ correspondantes (25), on obtient, dans les deux cas a), b,

$$u(t_0) = \eta\cdot \bar{u}(t_0), \qquad \bar{u}'(t_0) = \eta\cdot u'(t_0).$$

Par conséquent on a toujours, pour $t \in i$, la relation

$$u\,t = \eta\cdot u(t\,,$$

c'est ce qui achève la démonstration.

Il paraît utile de souligner que la possibilité de transformer, de la façon considérée, deux intégrales données u, U, par les intégrales X de l'équation (b), ne concerne pas les intégrales u, U toutes entières, mais seulement leurs pièces, dont les intervalles de définition possèdent le même nombre de valeurs conjuguées avec t_0, X_0, conformément avec le théoréme du n° 8 b). Ainsi p. ex., *toute intégrale d'une equation différentielle linéaire du second ordre, possédant vers les deux extrémités de son intervalle de définition une infinité de racines, peut être transformée d'une infinité de manières considérées dépendant d'un paramètre* (X_0) *à la function sinus ou bien cosinus dans l'intervalle* ($-\infty$, $+\infty$).

11. Transformation des dérivées du premier ordre des intégrales des équations (a), (A).

On peut appliquer la théorie précédente à transformer les dérivées (du premier ordre) des intégrales d'une équation (a), (A) aux intégrales ou bien aux dérivées des intégrales de l'autre equation.

Supposons que les fonctions q, Q soient toujours différentes de zéro et possèdent partout les dérivées continues du second ordre.

Posons, pour $t \in j$, $T \in J$,

$$q_1(t) = q(t) + \sqrt{|q(t)|}\left[\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right]'', \qquad Q_1(T) = Q(T) + \sqrt{|Q(T)|}\left[\frac{1}{\sqrt{|Q(T)|}}\right]''$$

et envisageons les équations différentielles

$$(a_1) \qquad y'' = q_1(t)y, \qquad Y'' = Q_1(T)Y, \qquad (A_1)$$

définies, manifestement, dans les intervalles j, J.

On se rend compte facilement que, pour toutes intégrales $u(t)$, $U(T)$ des équations (a), (A), les fonctions

$$u_1(t) = \frac{u'(t)}{\sqrt{|q(t)|}}, \qquad U_1(T) = \frac{U'(T)}{\sqrt{|Q(T)|}}$$

sont des intégrales des équations (a_1), (A_1).

Par conséquent, la théorie précédente, appliquée aux équations (a_1), (A) et (a_1), (A_1) représente une théorie de transformations des intégrales et des dérivées des intégrales de l'équation (A) aux dérivées des intégrales de l'équation (a). Les formules de transformation sont de la forme

$$u'(t) = \sqrt{|q(t)|}\,\frac{U[X_1(t)]}{\sqrt{|X_1'(t)|}}, \qquad u'(t) = \sqrt{\frac{|q(t)|}{|Q[X_2(t)]|}}\cdot\frac{U'[X_2(t)]}{\sqrt{|X_2'(t)|}},$$

$X_1(t)$ et $X_2(t)$ étant solutions des équations du troisième ordre

$$-\{X_1, t\} + Q(X_1)X_1'^2 = q_1(t), \qquad -\{X_2, t\} + Q_1(X_2)X_2'^2 = q_1(t).$$

Ainsi p. ex., les formules exprimant les dérivées des dispersions centrales des différentes espèces ([1]), apparaissent, en relation avec la théorie précédente, comme formules de transformation des intégrales et des dérivées des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre en elles mêmes.

([1]) O. Borůvka, loc. cit., p. 210-211.