Otakar Borůvka
Sur les systèmes multiplicatifs

C. R. Acad. Sci. Paris t. 204, 1937, 1779-1781

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500050

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur les systèmes multiplicatifs.*
Note de M. **Ottokar Borůvka.**

1. Un système multiplicatif (système *m*) $\mathfrak{M}$ est un ensemble abstrait non vide pour lequel une multiplication *associative* a été définie. Pour désigner le produit et la somme de deux ensembles, dans le sens de la théorie des ensembles, nous utilisons les symboles $\cup$, $\vee$ et nous réservons le signe . pour la multiplication. Le produit de deux éléments $a, b \in \mathfrak{M}$ est alors ab et la loi associative supposée s'exprime par la formule suivante : $(ab)c = a(bc)$ pour a, b, $c \in \mathfrak{M}$. A, B étant deux sous-ensembles de $\mathfrak{M}$, A, B, $C \subset \mathfrak{M}$, nous entendons par AB l'ensemble vide ($\emptyset$) si au moins un facteur jouit de cette propriété; autrement le symbole en question désigne l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{M}$ tels qu'il existe $a \in A$, $b \in B$, $x = ab$.

2. Soit $\mathfrak{M}$ un système *m*. Pour $\alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}^\alpha$ est un sous-système *m*, et l'on a $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}^2 \supset \mathfrak{M}^3 \supset \ldots.$ Nous définissons les ensembles M_α, $\alpha = 1, 2, \ldots$, par les formules suivantes :

$$\mathfrak{M}^\alpha = M_\alpha \vee \mathfrak{M}^{\alpha+1}, \qquad M_\alpha \cap \mathfrak{M}^{\alpha+1} \quad \emptyset$$

et nous appelons, en particulier, l'ensemble M_1 l'*excentre* et ses éléments les *facteurs primaires* du système *m*. $\mathfrak{M}$. On démontre que tout élément de M_α est le produit de α facteurs primaires convenables, mais il n'est pas le produit d'un nombre plus grand que α d'éléments de $\mathfrak{M}$.

3. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien 1° il existe un nombre naturel β tel que $M_\alpha \neq \emptyset$ pour $1 \leq \alpha \leq \beta$ et $M_\alpha = \emptyset$ pour $\alpha \geq \beta + 1$. Dans ce cas les égalités suivantes ont lieu : $\mathfrak{M}^{\beta+1} = \mathfrak{M}^{\beta+2} = \ldots$; nous appelons *noyau* du système $m.\mathfrak{M}$ le sous-système $m.\mathfrak{M}^{\beta+1}$. Ou bien 2° on a $M_\alpha \neq \emptyset$ pour $\alpha = 1, 2, \ldots.$ Dans ce cas nous disons que le système $m.\mathfrak{M}$ est *sans noyau* et nous écrivons $\mathfrak{M} = M_1 \vee M_2 \vee \ldots.$

Nous ne considérons dans la suite que les systèmes *m* sans noyau. Dans un tel système *m* l'élément-unité n'existe pas.

4. Soit $\mathfrak{M} = M_1 \vee M_2 \vee \ldots$ un système *m* sans noyau. Tout élément $a \in \mathfrak{M}$ étant dans un certain M_α, il lui est associé un nombre naturel α, nombre maximum de facteurs primaires de $\mathfrak{M}$ dont a est le produit. Nous

appelons α l'*indice* de l'élément a. Il existe, évidemment, un élément d'indice α quel que soit le nombre naturel α. Le système $m.\mathfrak{M}$ s'appelle *homogène* si tout produit de α facteurs primaires, $\alpha = 1, 2, \ldots$, est de l'indice α. Autrement $\mathfrak{M}$ est *non-homogène*. L'exemple le plus simple d'un système m homogène est fourni par le système cyclique infini

$$\mathfrak{Z} = \{z, z^2, z^3, \ldots\}.$$

L'excentre de ce système m est donné, évidemment, par le facteur primaire unique z et, plus généralement, il n'y a qu'un seul élément z^α d'indice α, quel que soit le nombre naturel α. On démontre que le système $m.\mathfrak{M}^\alpha$ est non-homogène quels que soient le système m sans noyau $\mathfrak{M}$ et le nombre naturel $\alpha > 1$. Tout système m sans noyau peut être immergé dans un système m non-homogène convenable.

5. Dans la théorie qui nous occupe la question de la représentation homomorphique de systèmes m sur le système cyclique $\mathfrak{Z}$ joue un rôle important. Si un système m est homomorphiquement représentable sur $\mathfrak{Z}$, il est nécessairement sans noyau. Nous dirons qu'une décomposition $M_1 = A_1 \vee A_2 \vee \ldots$ de son excentre M_1 est *génératrice* si $A_1 \neq \emptyset$ et si les ensembles de différents *poids* correspondants

$$A_1, \quad A_1^2 \vee A_2, \quad A_1^3 \vee A_1^2 A_2 \vee A_2 A_1^2 \vee A_3, \quad \ldots$$

sont disjoints deux à deux. On a alors le résultat que les représentations homomorphiques du système $m.\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{Z}$ et les décompositions génératrices de son excentre se correspondent biunivoquement. En particulier, le système $m.\mathfrak{M}$ est homomorphiquement représentable sur $\mathfrak{Z}$ dans le cas et dans le cas seulement où il existe une décomposition génératrice de son excentre. Si le système $m.\mathfrak{M}$ est homogène il est homomorphiquement représentable sur $\mathfrak{Z}$ de manière que les images des facteurs primaires de $\mathfrak{M}$ se confondent dans le facteur primaire unique de $\mathfrak{Z}$. Inversement, l'existence d'une telle représentation caractérise les systèmes m homogènes. Ainsi par exemple le système m dont les éléments sont des matrices carrées d'ordre $n (> 1)$ et dont la multiplication est la composition habituelle de matrices est homogène s'il se trouve engendré par des matrices carrées d'ordre n jouissant de la propriété suivante : Toutes les matrices en question ont une matrice associée (compound), soit la $(1 <) j (< n)^{-\text{ième}}$, en commun, et les différentes puissances de cette dernière sont mutuellement distinctes. Quant aux systèmes m non-homogènes, il en existe bien qui sont homomorphiquement représentables sur $\mathfrak{Z}$. Mais, quels que soient le système $m.\mathfrak{M}$ et le nombre naturel $\alpha > 1$, le système $m.\mathfrak{M}^{\alpha}$ ne jouit pas de cette propriété. Par conséquent, les systèmes m non-homogènes qui sont des puissances supérieures à 1 d'autres systèmes m ont un caractère particulier en ce sens qu'un système m non-homogène donné n'est, en général, pas une puissance supérieure à 1 d'un système m convenable [1].

---

(1) Voir mon Mémoire *Studies on multiplicative systems*. Part I, *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* (sous presse).

(Extrait des *Comptes rendus des seances de l'Académie des Sciences*, t. 204, p. 1779, séance du 14 juin 1937.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
107472-37 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.