Otakar Borůvka

Über die parteilen Differentialgleichungen, denen hermitesche Formen genügen

Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 11, 1934, 65-72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500038

Über die partiellen Differentialgleichungen, denen hermitesche Formen genügen.

Von O. BORŮVKA in Brünn.

Unter diesem Titel hat Herr L. SCHLESINGER eine Arbeit veröffentlicht[1]), in der er einen Zusammenhang zwischen Lösungen gewisser Systeme von partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und denen linearer homogener Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit hermitescher Monodromiegruppe erkannte. Seine diesbezüglichen Resultate finden sich jedoch a. a. O. nur für $n = 2, 3$ formuliert und bewiesen und sind meines Wissens auch nicht später für beliebige n verallgemeinert worden. Ich werde nun einen allgemeinen Satz, durch den diese Verallgemeinerung geleistet wird, beweisen.

Im folgenden wird stets die zu einer komplexen Zahl x komplex konjugierte mit x bezeichnet.

1. Vorbemerkungen. Zu jeder hermiteschen Form $(y, \overline{y}) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n-1} a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, y_\beta\, (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha})$ mit nicht verschwindender Determinante gibt es gerade n abgeleitete hermitesche Formen: die nullte, die erste usw. abgeleitete hermitesche Form. Die $l\,(>0)$-te abgeleitete hermitesche Form H_l ist aus den $l+1$ Systemen $y_0^j, \cdots, y_{n-1}^j\, (j = 0, \cdots, l)$ eines quadratischen Schemas $y_k^j\, (j, k = 0, \cdots, n-1;\ y_k^0 = y_k)$ von Veränderlichen gebildet und durch

$$H_l = \sum_{\substack{\alpha_0<\cdots<\alpha_l \\ \beta_0<\cdots<\beta_l}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_0\beta_0} & \cdots & a_{\alpha_0\beta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_l\beta_0} & \cdots & a_{\alpha_l\beta_l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{\alpha_0}^0 & \cdots & y_{\alpha_l}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha_0}^l & \cdots & y_{\alpha_l}^l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{\beta_0}^0 & \cdots & y_{\beta_l}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\beta_0}^l & \cdots & y_{\beta_l}^l \end{vmatrix}$$

definiert. Dabei ist in bezug auf alle in einer bestimmten Reihenfolge genommenen Kombinationen $l+1$-ter Klasse ohne Wiederholung der Zahlen $0, \cdots, n-1$ zu summieren. Es ist also im besonderen $H_0 = (y, \overline{y})$. Jede der Formen $H_l\, (0 \leqq l \leqq n-1)$ ist in bezug auf die Gruppe aller linearen, auf die Systeme $y_0^j, \cdots, y_{n-1}^j\, (j = 0, \cdots, n-1)$ kogredient angewandten Substitutionen mit der Form H_0 kovariant. Also wird im besonderen, durch jede lineare, die Form H_0 reproduzierende und auf die Systeme $y_0^j, \cdots, y_{n-1}^j\, (j = 0, \cdots, l)$ kogredient angewandte Substitution die Form H_l reproduziert. Die Form $H_l\, (0 \leq l < n-1)$ ist

[1]) Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 1 (1901), S. 262.

in der Determinantenform

$$H_l = |(y^i, y^k)| \qquad (i, k = 0, \cdots, l) \tag{1}$$

darstellbar.

2. Hilfssatz 1. *Sei (y, y) eine hermitesche Form mit nicht verschwindender Determinante in den Veränderlichen $y_0, \cdots, y_{n-1}$. $y_0^j, \cdots, y_{n-1}^j$ $(j = 0, \cdots, n-1)$ seien unabhängige Systeme von irgendwelchen komplexen Zahlen, für die keine der von (y, y) abgeleiteten hermiteschen Formen H_l $(0 \leqq l < n-1)$ verschwindet. Dann gelten von dem Gleichungssysteme $(0 \leqq j < n-1;\ H_{-1} = 1)$*

$$\begin{aligned} x_{j0}(y^0, y^k) + x_{j1}(y^1, y^k) + \cdots + x_{jj}(y^j, y^k) &= 0, \text{ für } k = 0, \cdots, j-1, \\ &= \frac{H_{j-1} \cdot H_j}{x_{jj}}, \text{ für } k = j \end{aligned} \tag{2}$$

folgende Aussagen:

a) *das System ist auflösbar, und es ist insbesondere*

$$x_{jj} \cdot x_{jj} = H_{j-1}^2; \tag{3}$$

b) *die mit den Lösungen x gebildeten Zahlensysteme $(j = 0, \cdots, n-1)$*

$$Y_k^j = x_{j0} y_k^0 + \cdots + x_{jj} y_k^j \qquad (k = 0, \cdots, n-1) \tag{4}$$

sind unabhängig und es gilt

$$(Y^j, Y^i) = 0 \text{ für } i \neq j, \ = H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j; \tag{5}$$

c) *sind n Zahlensysteme $Y_0^j, \cdots, Y_{n-1}^j$ $(j = 0, \cdots, n-1)$ von der Form (4) unabhängig und gilt (5) für $i, j = 0, \cdots, n-1$, so sind die x Lösungen von (2).*

Beweis. a) Folgt unmittelbar aus (1) und der Voraussetzung $H_j \neq 0$.

b) Es ist offenbar

$$|Y_k^j| = x_{00} x_{11} \cdots x_{n-1, n-1} |y_k^j|, \tag{6}$$

$$(Y^j, Y^i) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} Y_\alpha^j \cdot Y_\beta^i = \sum_{\delta}^{i}{}_{0} \bar{x}_{i\delta} \sum_{\gamma}^{j}{}_{0} x_{j\gamma} (y^\gamma, \bar{y}^\delta). \tag{7}$$

Nach (6) und (3) sind die Zahlensysteme Y_k^j unabhängig. Da ferner $(Y^j, Y^i) = 0$ $(Y^i, Y^j) = 0$ impliziert, genügt es (5) für $i \leq j$ festzustellen. Für $i \leqq j$ folgt aber (5) unmittelbar aus (7) und (2).

c) Sind n Zahlensysteme $Y_0^j, \cdots, Y_{n-1}^j$ $(j = 0, \cdots, n-1)$ von der Form (4) unabhängig, so ist nach (6)

$$x_{00} \cdot x_{11} \cdots \bar{x}_{n\ 1, n-1} \neq 0. \tag{8}$$

Gilt (5) für $i, j = 0, \cdots, n-1$, so ist nach (7), für $0 < j \leq n-1$,

$$\begin{aligned} x_{i0} \sum_{\gamma-0}^{j} x_{j\gamma}(y^\gamma, \bar{y}^0) + \cdots + \bar{x}_{ii} \sum_{\gamma=0}^{j} x_{j\gamma}(y^\gamma, y^i) &= 0 \text{ für } i = 0, \cdots, j-1, \\ &= H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j. \end{aligned}$$

Daraus folgt (2) wegen (8).

3. Im folgenden bedeutet A eine lineare homogene Differentialgleichung $n\,(\geq 1)$-ter Ordnung mit eindeutigen, in der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ analytischen Koeffizienten.

$\frac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ bedeutet die Operation $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ bzw. $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Ist also z. B. y eine analytische Funktion von $z = x + iy$, so ist $\frac{\partial y}{\partial \bar z} \equiv 0$; ist y eine analytische Funktion der reellen Veränderlichen x, y und gilt identisch $\frac{\partial y}{\partial \bar z} = 0$, so ist y eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$.

Definitionen. 1. *Die Monodromiegruppe von A ist hermitesch, wenn es eine hermitesche Form $(y, \bar y) = \sum_{\alpha,\beta\ 0}^{n-1} a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, \bar y_\beta$ mit nicht verschwindender Determinante und ein Fundamentalsystem von Integralen von A gibt, so daß die Form durch die zu diesem Systeme gehörige Monodromiegruppe reproduziert wird.*

2. *Ist die Monodromiegruppe von A hermitesch und wird die hermitesche Form $(y, \bar y)$ durch die zum Fundamentalsysteme $y_0, \cdots, y_{n-1}$ von Integralen von A gehörige Monodromiegruppe reproduziert, so wird das System der von $(y, \bar y)$ abgeleiteten hermiteschen Formen $H_l\ (0 \leq l < n-1)$, gebildet mit den Integralen des Fundamentalsystems und ihren Ableitungen $y_0^j, \cdots, y_{n-1}^j\ (j = 0, \cdots, l)$, Monodromiesystem von A genannt.*

Bemerkung. Offenbar sind die Funktionen eines Monodromiesystems reelle, (nach **1.**) eindeutige, analytische Funktionen in den reellen Veränderlichen x, y. Sind die Integrale eines Fundamentalsystems von A eindeutige analytische Funktionen, so ist die Monodromiegruppe von A eine hermitesche und das System der von einer beliebigen hermiteschen Form mit nicht verschwindender Determinante abgeleiteten und mit den Integralen und ihren Ableitungen gebildeten hermiteschen Formen stellt ein Monodromiesystem von A dar.

4. Hilfssatz 2. *Die Monodromiegruppe von A sei hermitesch. Das Monodromiesystem $H_0, \cdots, H_{n-1}$ von A sei mit den Integralen $y_0, \cdots, y_{n-1}$ eines Fundamentalsystems von A gebildet. Es gibt Punkte (x, y), für die sowohl die Determinante $|y_k^j|$ $(j, k = 0, \cdots, n-1)$ als auch jede der Funktionen H regulär und von Null verschieden ist.*

Beweis. Das Monodromiesystem sei von der hermiteschen Form $(y, \bar y) = \sum a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, \bar y_\beta$ abgeleitet.

a) $H_0 \not\equiv 0$.

Denn aus $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, \bar y_\beta \equiv 0$ folgt durch wiederholte Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\sum_\beta \bar y_\beta^j \sum_\alpha a_{\alpha\beta}\, y_\alpha \equiv 0 \qquad (j = 0, \cdots, n-1),$$

also wegen $|\bar{y}_k^j| \not\equiv 0$

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta}\, y_\alpha \equiv 0 \qquad (\beta = 0, \cdots, n-1).$$

Daraus durch wiederholte Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta}\, y_\alpha^j \equiv 0,$$

also wegen $|y_k^j| \not\equiv 0: a_{\alpha\beta} = 0$, gegen die Voraussetzung $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$.

b) $H_{l-1} \not\equiv 0$ impliziert $H_l \not\equiv 0$ $(1 \leqq l \leq n-1)$.

Denn aus $H_{l-1} \not\equiv 0$, $H_l \equiv 0$ folgt durch wiederholte Anwendung der Operationen $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ und eines bekannten Kroneckerschen Determinantensatzes[2])

$$\begin{vmatrix} (y^0, y^0) & \cdots & (y^0, y^{l-1}) & (y^0, y^k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (y^{l-1}, y^0) & \cdots & (y^{l-1}, y^{l-1}) & (y^{l-1}, y^k) \\ (y^i, \bar{y}^0) & \cdots & (y^i, y^{l-1}) & (y^i, y^k) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

für $i, k = l, \cdots, n-1$, also auch

$$\begin{vmatrix} (y^{r_0}, y^{s_0}) & \cdots & (y^{r_0}, \bar{y}^{s_l}) \\ \vdots & & \vdots \\ (g^{r_l}, y^{s_0}) & \cdots & (y^{r_l}, y^{s_l}) \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder

$$(9) \quad \sum_{\beta_0 < \cdots < \beta_l} \begin{vmatrix} y_{\beta_0}^{s_0} & \cdots & y_{\beta_l}^{s_0} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\beta_0}^{s_l} & \cdots & y_{\beta_l}^{s_l} \end{vmatrix} \sum_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_l} \begin{vmatrix} a_{\alpha_0\beta_0} & \cdots & a_{\alpha_0\beta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_l\beta_0} & \cdots & a_{\alpha_l\beta_l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{\alpha_0}^{r_0} & \cdots & y_{\alpha_l}^{r_0} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha_0}^{r_l} & \cdots & y_{\alpha_l}^{r_l} \end{vmatrix} \equiv 0$$

für $0 \leq r_0 < \cdots < r_l \leq n-1$, $0 \leqq s_0 < \cdots < s_l < n-1$. Da nun die aus den Elementen

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_{\beta_0}^{s_0} & \cdots & \bar{y}_{\beta_l}^{s_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{y}_{\beta_0}^{s_l} & \cdots & y_{\beta_l}^{s_l} \end{vmatrix} \text{ bzw. } \begin{vmatrix} y_{\alpha_0}^{r_0} & \cdots & y_{\alpha_l}^{r_0} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha_0}^{r_l} & \cdots & y_{\alpha_l}^{r_l} \end{vmatrix}$$

gebildete Determinante (nach dem sog. Frankeschen Satze) eine Potenz von $|\bar{y}_k^j|$ bzw. $|y_k^j|$ also nicht identisch Null ist, so folgt aus (9)

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_0\beta_0} & \cdots & a_{\alpha_0\beta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_l\beta_0} & \cdots & a_{\alpha_l\beta_l} \end{vmatrix} = 0$$

[2]) L. Kronecker, Bemerkungen zur Determinantentheorie (Journ. f. Math. Bd. 72, 1870; S. 152).

für $0 < \alpha_0 < \cdots < \alpha_l < n-1$, $0 < \beta_0 < \cdots < \beta_l \leqq n-1$, gegen die Voraussetzung $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$.

c) Es gibt Punkte, in denen die $y_0, \cdots, y_{n-1}$ regulär sind und $|y_k^j| \neq 0$. In einer Umgebung Ω eines solchen Punktes ist $|y_k^j|$ regulär und von Null verschieden und auch jede der Funktionen H ist regulär. Ist in einem Punkte $(x, y) \in \Omega : |y_k^j| \cdot H_{-1} \cdot H_0 \cdots H_i \neq 0$ $(-1 \leq i < n-1;$ $H_{-1} = 1)$, so ist dies auch in einer Umgebung $\Omega_i \subset \Omega$ von (x, y) der Fall. Da H_{i+1} nicht identisch verschwindet, so gibt es in Ω_i Punkte, in denen $H_{i+1} \neq 0$.

5. Satz. *Das System von partiellen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial y^2} = 4 \frac{H_{j-1} \cdot H_{j+1}}{H_j^2} \tag{10}$$

$$(j = 0, \cdots, n-1;\ H_{-1} = 1,\ H_n = 0)$$

steht zur Menge linearer homogener Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit eindeutigen, in der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ analytischen Koeffizienten und mit hermitescher Monodromiegruppe in folgender Beziehung:

a) *Jedes Monodromiesystem einer beliebigen Differentialgleichung der Menge ist eine Lösung von* (10).

b) *Zu jeder reellen, analytischen und eindeutigen Lösung von* (10) *gibt es eine Differentialgleichung der Menge, so daß die Lösung ein Monodromiesystem dieser Differentialgleichung darstellt.*

Beweis. a) Es sei A eine Differentialgleichung der Menge und $H_0, \cdots, H_{n-1}$ ein Monodromiesystem derselben, gebildet mit der hermiteschen Form (y, y) und den Integralen $y_0, \cdots, y_{n-1}$ eines Fundamentalsystems von A. Nach Hilfssatz 2 gibt es Punkte, für die sowohl die Determinante $|y_k^j|$ $(j, k = 0, \cdots, n-1)$ als auch jede der Funktionen H regulär und von Null verschieden ist. Es sei (x, y) ein solcher Punkt. Nach Hilfssatz 1 gibt es n unabhängige Systeme $(j = 0, \cdots, n-1)$ von im Punkte (x, y) regulären analytischen Funktionen der reellen Veränderlichen x, y

$$Y_k^j = x_{j0} y_k^0 + \cdots + x_{jj} y_k^j \qquad (k = 0, \cdots, n-1),$$

so daß im besonderen

$$x_{jj} \cdot \bar{x}_{jj} = H_{j-1}^2$$

ist, und die Beziehungen

$$(Y^j, Y^i) = 0 \quad \text{für } i \neq j, \qquad = H_{j-1} H_j \quad \text{für } i = j \tag{11}$$

identisch bestehen. Die x_{jj} sind offenbar bis auf Faktoren von der Form e^{it}, t reell, bestimmt; also kann man

$$x_{jj} = H_{j-1} \tag{12}$$

wählen. Wegen (11) genügen die Y^j_k für jedes $k=0,\cdots,n-1$ Differentialgleichungen von der Form

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \sum_{\alpha=0}^{j} p_{j\alpha} Y^\alpha + \frac{x_{jj}}{x_{j+1,j+1}} Y^{j+1},\\
\frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \sum_{\alpha=0}^{j-1} q_{j-1,\alpha} Y^\alpha + \frac{\partial \log|x_{jj}|}{\partial z} Y^j \quad (j=0,\cdots,n-1;\ Y^n=0).
\end{aligned}
$$

Nun ist aber

$$p_{j0}=p_{j1}=\cdots=p_{j,j-1}=0 \quad \text{für} \quad j>1$$

und

$$q_{j-1,0}=q_{j-1,1}=\cdots=q_{j-1,j-2}=0 \quad \text{für} \quad j>2.$$

In der Tat, ist $j>1$, $0\leqq i<j-1$, so ist nach (13) $\frac{\partial Y^i}{\partial z}$ eine lineare Kombination von $Y^0,\cdots,Y^i$; also (wenn man alle Größen durch die komplex konjugierten ersetzt) $\frac{\partial Y^i}{\partial z}$ ist eine lineare Kombination von $Y^0,\cdots,Y^i$. Also gilt nach (11), wegen $i<j$,

$$\left(Y^j,\ \frac{\partial \overline{Y}^i}{\partial z}\right)=0,$$

also auch

$$\left(\frac{\partial Y^j}{\partial z},\ Y^i\right)=-\left(Y^j,\ \frac{\partial Y^i}{\partial z}\right)=0.$$

Daraus folgt nach (13) und (11)

$$p_{ji}=0.$$

Ähnlich für die q. Weiter ist offenbar

$$
\begin{aligned}
p_{jj}\cdot H_{j-1}H_j = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial z},\ Y^j\right) &= -\left(Y^j,\ \frac{\partial \overline{Y}^j}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}H_{j-1}\cdot H_j\\
&= -\frac{\partial \log|x_{jj}|}{\partial z}\cdot H_{j-1}\cdot H_j+\frac{\partial}{\partial z}H_{j-1}\cdot H_j,
\end{aligned}
$$

$$q_{j-1,j-1}H_{j-2}H_{j-1}=\left(\frac{\partial Y^j}{\partial \overline{z}},\ Y^{j-1}\right)=-\left(Y^j,\frac{\partial Y^{j-1}}{\partial z}\right)=-\frac{x_{j-1,j-1}}{x_{jj}}\cdot H_{j-1}H_j.$$

Also sind die Gleichungen (13) nach (12) folgende

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \frac{\partial \log|H_j|}{\partial z} Y^j + \frac{H_{j-1}}{H_j} Y^{j+1},\\
\frac{\partial Y^j}{\partial z} &= -\frac{H_j}{H_{j-1}} Y^{j-1} + \frac{\partial \log|H_{j-1}|}{\partial z} Y^j\\
&(j=0,\cdots,n-1;\ H_{-1}=1;\ Y^{-1}=Y^n=0).
\end{aligned}
$$

Da die Y^j analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x, y sind, so gilt identisch

$$
(15)\quad \frac{\partial^2 Y^j}{\partial z\, \partial z}=\frac{\partial^2 Y^j}{\partial \overline{z}\, \partial z}.
$$

Da die Y_k^j unabhängig sind, gelten diese Beziehungen [nach (14)] dann und nur dann, wenn

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 \log|H_j|}{\partial z\,\partial z} - \frac{\partial^2 \log|H_{j-1}|}{\partial z\,\partial z} = \frac{H_{j-1}\cdot H_{j+1}}{H_j^2} - \frac{H_{j-2}\cdot H_j}{H_{j-1}^2}$$

$$(j = 0, \cdots, n-1;\ H_{-2} = 0)$$

ist. Daraus folgt (10), da die H analytisch sind.

b) Es sei $H_0, \cdots, H_{n-1}$ eine reelle, analytische und eindeutige Lösung von (10). Dann sind die Beziehungen (16) identisch erfüllt. Wegen (15) ist das mit diesen H gebildete System (14) vollständig integrierbar. Ist also (x_0, y_0) ein regulärer Punkt jeder der Funktionen H und verschwindet daselbst keine derselben, so gibt es ein Fundamentalsystem $Y_0^j, \cdots, Y_{n-1}^j$ $(j\ \ 0, \cdots, n-1)$ von analytischen, im Punkte (x_0, y_0) regulären Integralen von (14), so daß im Punkte (x_0, y_0)

$$(17)\qquad Y_k^j = 0 \text{ für } k \neq j, \quad = 1 \text{ für } k = j$$

ist. Setzt man $h_j = H_j(x_0, y_0)$, $h_{-1} = 1$,

$$(y, y) = h_{-1}\,h_0\,y_0\,\overline{y}_0 + h_0\,h_1\,y_1\,y_1 + \cdots + h_{n-2}\,h_{n-1}\,y_{n-1}\,\overline{y}_{n-1},$$

so ist (y,y) eine hermitesche Form mit nicht verschwindender Determinante, und es gilt

$$(18)\qquad (Y^j, Y^i) = 0 \text{ für } i \neq j, = H_{j-1}\cdot H_j \text{ für } i = j$$

offenbar im Punkte x_0, y_0. Andererseits aber sind die (Y^j, Y^i), nach (14), Lösungen des vollständig integrierbaren Systems

$$\frac{\partial}{\partial z}(Y^j, Y^i) = -\frac{H_i}{H_{i-1}}(Y^j, Y^{i\ 1}) + \frac{\partial}{\partial z}\log|H_j\,H_{i-1}|\,(Y^j, \overline{Y}^i)$$
$$+ \frac{H_{j-1}}{H_j}(Y^{j+1}, Y^i),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(Y^j, Y^i) = -\frac{H_j}{H_{j-1}}(Y^{j-1}, Y^i) + \frac{\partial}{\partial z}\log|H_{j-1}\,H_i|\,(Y^j, \overline{Y}^i)$$
$$+ \frac{H_{i-1}}{H_i}(Y^j, \overline{Y}^{i+1}),$$

und dieses System wird offenbar mit $(Y^j, Y^i) = 0$ für $i \neq j$, $= H_{j-1}\,H_j$ für $i = j$ befriedigt. Also gelten die Beziehungen (18) identisch. Für die analytischen Funktionen von x, y

$$(19)\qquad y_k^0 = Y_k^0 \qquad (k = 0, \cdots, n-1)$$

gilt nach (14)

$$\frac{\partial y_k^0}{\partial z} = 0.$$

Also sind die y_k^0 analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Nach (14) ist die Ableitung y_k^j nach z von der Ordnung

$j\,(-0, \cdots, n-1)$ der Funktion y_k^0 eine lineare Verbindung von $Y_k^0, \cdots, Y_k^j$ von der Form

$$y_k^j = p_{j0}\, Y_k^0 + \cdots + \frac{1}{H_{j-1}}\, Y_k^j. \tag{20}$$

Also sind die Funktionensysteme $y_0^j, \cdots, y_{n-1}^j$ $(j = 0, \cdots, n-1)$ linear unabhängig. Die Koeffizienten $p_{j0}, \cdots$ sind offenbar ganze rationale Funktionen in den Koeffizienten von (14) und ihren Ableitungen nach z; sie sind also eindeutig. Also bilden die $y_0^0, \cdots, y_{n-1}^0$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung A n-ter Ordnung mit eindeutigen, in der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ analytischen Koeffizienten. Nach (20) sind die Funktionensysteme $Y_0^j, \cdots, Y_{n-1}^j$ $(j = 0, \cdots, n-1)$ lineare Kombinationen der y_k^j von der Form

$$Y_k^j = x_{j0}\, y_k^0 + \cdots + H_{j-1}\, y_k^j. \tag{21}$$

Erleiden also die durch die Anfangswerte (17) festgelegten Zweige der Funktionen y_k^0 nach einem geschlossenen Umlaufe der Veränderlichen z die Substitution $\| c_k^\alpha \|$, so erleiden die Y_k^j dieselbe Substitution. Da die Beziehungen (18) identisch gelten, so ist identisch

$$\sum_{\alpha, \beta} Y_\alpha^j\, \overline{Y}_\beta^i\, (c^\alpha, c^\beta) = 0 \text{ für } i \neq j, \quad = H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j.$$

Also insbesondere für $x = x_0$, $y = y_0$

$$(c^j, \overline{c}^i) = 0 \text{ für } i \neq j, \ = h_{j-1}\, h_j \text{ für } i = j.$$

Also wird durch die Substitution $\| c_k^\alpha \|$ die Form $(y, \overline{y})$ reproduziert. Also gehört die Differentialgleichung A zur betrachteten Menge. Wegen (21) und (18) folgt nach Hilfssatz 1c)

$$| H_{j-1} | = | \mathfrak{H}_{j-1} | \quad (j = 0, \cdots, n-1;\ \mathfrak{H}_{-1} = 1),$$

wo $\mathfrak{H}_{j-1}$ die $(j-1)$-te von (y, y) abgeleitete hermitesche Form, gebildet mit $y_0^i, \cdots, y_{n-1}^i$ $(i - 0, \cdots, j-1)$ bedeutet. Aus (19) folgt aber

$$H_0 = \mathfrak{H}_0 \tag{22}$$

und sowohl die Funktionen H_j (nach der Voraussetzung) als auch die $\mathfrak{H}_j$ (nach a), $\mathfrak{H}_n = 0$) sind Lösungen von (10). Es ist also sogar

$$H_j = \mathfrak{H}_j \qquad (j = 0, \cdots, n-1).$$

Also bilden die Funktionen H_j ein Monodromiesystem von A.