Otakar Borůvka

K teorii některých transcendent počtu integrálního

Spisy přír. fak. MU, č. 37, 1924, 13 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500026

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1924 Čís. 37

K TEORII NĚKTERÝCH TRANSCENDENT POČTU INTEGRÁLNÍHO

(CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES DU CALCUL INTÉGRAL.)

NAPSAL

O. BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

K THEORII NĚKTERÝCH TRANSCENDENT POČTU INTEGRÁLNÍHO.

(AVEC UN RESUMÉ EN FRANÇAIS.)

I.

O funkci $R(x, s)$ definované při *reál. č.* $s > 1$ řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s}$$

jest známo*, že rozdíl $R(x,s) - \dfrac{1}{s-1}$ jest celistvou funkcí transcendentní proměnné s a že lze jej tedy rozvinouti v řadu stále konvergentní

$$R(x,s) = \frac{1}{s-1} - \psi(x) + f_1(x)(s-1) + f_2(x)(s-1)^2 + \ldots.^{**} \qquad (1)$$

O funkci $f_1(x)$ a dalších koeficientech při jednotlivých mocnostech $(s-1)$ není posud známo nic bližšího. Vycházeje od trigonometrických aggregátů $\sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$, $\sum_{\rho=1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$, závislých na kladných pravých racionálních zlomcích $\frac{u}{v}$, ukáži v tomto odstavci, že za předpokladu $0 < x < 1$ platí trigonometrický rozvoj

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = -(\log 2\pi + E)\pi \operatorname{cotg} x\pi - \frac{\log x}{x} +$$
$$+ \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n}{n+1}.$$

* * *

Buďtež u, v celistvá kladná nesoudělná čísla $(0 < u < v)$ a hledejme vyjádření aggregátu

$$A = \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$$

* Lerch, Další studie v oboru Malmsténovských řad; Rozpravy II. tř. Č. Akademie roč. III., str. 12. Podle Lerchova citátu (Rychle konvergentní vyjádření některých limit, p. 7, Rozpravy České Akademie, roč. VIII.) pochází tento výsledek od H. Kinkelina (Programm der Gewerbeschule, Basel 1861—1862).

** Značím důsledně $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x)$ a Eulerovu konstantu písmenem ***E***.

tím způsobem, že nahradíme $\log \Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)$ dle Kummerova vzorce*

$$\log \Gamma(x) = \text{konst} - (\log 2\pi + E)\,x - \tfrac{1}{2} \log \sin x\pi + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi \quad (0 < x < 1) \tag{2}$$

příslušným výrazem.

Vzhledem k relacím

$$\begin{aligned} &\sum_{\varrho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho = 0 \\ &\sum_{\varrho=1}^{v-1} \varrho \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho = -\frac{v}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{v} \pi \end{aligned} \tag{3}$$

obdržíme nejprve, píšeme-li $(\log 2\pi + E) = k$

$$A = \frac{k}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{v} \pi - \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho \log \sin \frac{\varrho}{v} \pi + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{\varrho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu \frac{\varrho}{v} \pi$$

a pak, jelikož

$$\sum_{\varrho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho \log \sin \frac{\varrho}{v} \pi = \sum_{\varrho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} (v-\varrho) \log \sin \frac{v-\varrho}{v} \pi = \\ = - \sum_{\varrho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho \log \sin \frac{\varrho}{v} \pi = 0.$$

$$A = \frac{k}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{v} \pi + \frac{1}{\pi} \sum_{\varrho=1}^{v-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu \frac{\varrho}{v} \pi \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho. \tag{4}$$

Poznačíme-li aggregát trigonometrických řad na pravé straně písmenem X a užijeme-li vzorce

$$\sin 2\pi \frac{\nu}{v} \varrho \sin 2\pi \frac{u}{v} \varrho = \tfrac{1}{2} \left[\cos 2\pi \frac{\nu - u}{v} \varrho - \cos 2\pi \frac{\nu + u}{v} \varrho\right],$$

můžeme psáti

$$X = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sum_{\varrho=1}^{v-1} \left[\cos 2\pi \frac{\nu - u}{v} \varrho - \cos 2\pi \frac{\nu + u}{v} \varrho\right].$$

V této řadě transformujme sumační index ν substitucí $\nu = vn + \varkappa$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; \varkappa = 1, 2, \ldots v)$; obdržíme

$$X = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{v} \frac{\log (vn + \varkappa)}{vn + \varkappa} \sum_{\varrho=1}^{v-1} \left[\cos 2\pi \frac{\varkappa - u}{v} \varrho - \cos 2\pi \frac{\varkappa + u}{v} \varrho\right],$$

* Kummer, Crelleův j. sv. XXXV., p. 1.

což lze značně zjednodušiti, neboť pro $\varkappa \neq u$ a $\varkappa \neq v-u$ jest

$$\sum_{\varrho=1}^{v-1}\left[\cos 2\pi\frac{\varkappa-u}{v}\varrho-\cos 2\pi\frac{\varkappa+u}{v}\varrho\right]=0,$$

kdežto obecně pro $\varkappa=u$, resp. $\varkappa=v-u$ jest týž výraz roven v, resp. $-v$.

Platí tedy jednoduše

$$X=\frac{v}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u}-\frac{\log[v(n+1)-u]}{v(n+1)-u}\right]$$

anebo

$$X=\frac{v}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u}-\frac{\log[v(n+1)+u]}{v(n+1)+u}\right]+$$
$$+\frac{v}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u}-\frac{\log(vn-u)}{vn-u}\right];$$

součet první řady na pravé straně jest patrně roven $\frac{\log u}{u}$, druhou lze vzhledem ke vzorci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{u}{v}}-\frac{1}{n-\frac{u}{v}}\right]=\pi\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi-\frac{v}{u}$$

upraviti na

$$\frac{\log v}{v}\left[\pi\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi-\frac{v}{u}\right]+\frac{1}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right],$$

takže vychází

$$X=\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi.\log v+\tfrac{1}{2}\frac{v}{u}\log\frac{u}{v}+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right]$$

a pak

$$A=\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi\log v+\frac{k}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi+\frac{1}{2\pi}\frac{v}{u}\log\frac{u}{v}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right]. \qquad \text{(I)}$$

Násobme nyní aggregát

$$B=\sum_{\varrho=1}^{v-1}\cos 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)$$

veličinou $\cos\frac{u}{v}\pi$; obdržíme nejprve, píšeme-li

$$\cos\frac{u}{v}\pi\cos 2\frac{u}{v}\pi\varrho=\tfrac{1}{2}\left[\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)+\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho-1)\right],$$

$$\begin{aligned}B\cos\frac{u}{v}\pi=\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)&+\\+\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=0}^{v-2}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)&\end{aligned}$$

a pak pomocí vztahu $\Gamma(1+x)=x\,\Gamma(x)$

$$\begin{aligned}B\cos\frac{u}{v}\pi=\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)&+\\+\tfrac{1}{2}\cos\frac{u}{v}\pi\log v.&\end{aligned}\tag{II}$$

Vychází tudíž z rovnic (I) a (II)

$$\begin{aligned}-\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)&=\\=-\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)&+\frac{k}{2}\cos\frac{u}{v}\pi+\\+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{2\pi}\cdot\frac{v}{u}\log\frac{u}{v}+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}&\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right]\end{aligned}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned}\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\log\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)}=k\cos\frac{u}{v}\pi+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{\pi}\cdot\frac{v}{u}\cdot\log\frac{u}{v}&+\\+\frac{\sin\frac{u}{v}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}}-\frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}}\right]&.\end{aligned}\tag{III}$$

Poznačíme-li levou stranu této rovnice Y a vyjádříme-li v ni funkce $\log\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{v}\right)$, $\log\Gamma\left(\frac{\varrho}{v}\right)$ dle Weierstrassova vzorce

$$\log\Gamma(x)=-Ex-\log x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right],\tag{5}$$

obdržíme s ohledem na vztah $\sum\limits_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)=0$ nejprve

$$Y=\sum_{\varrho=1}^{v}\cos\pi\frac{u}{v}(2\varrho+1)\left[-\log\frac{\varrho+1}{\varrho}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{vn}-\log\frac{vn+\varrho+1}{vn+\varrho}\right)\right]$$

a pak

$$Y = \sum_{\rho=1}^{v} \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \frac{\rho}{\rho + 1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{v} \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \left[\frac{1}{vn} - \log \frac{vn + \rho + 1}{vn + \rho} \right].$$

Druhou řadu na pravé straně lze patrně psáti ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{v} \cos \pi \frac{u}{v} [2(vn + \rho) + 1] \log \frac{vn + \rho}{vn + \rho + 1}$$

a tedy také, zavedeme-li sumační index $vn + \rho = n'$

$$\sum_{n'=v+1}^{\infty} \cos \pi \frac{u}{v} (2n' + 1) \log \frac{n'}{n' + 1}.$$

Nacházíme tedy

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi \frac{u}{v} (2n + 1) \log \frac{n}{n + 1}$$

a pomocí rovnice (III)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(n + \frac{u}{v} \right)}{n + \frac{u}{v}} - \frac{\log \left(n - \frac{u}{v} \right)}{n - \frac{u}{v}} \right] = -k \pi \operatorname{cotg} \frac{u}{v} \pi - \frac{v}{u} \log \frac{u}{v} +$$

$$+ \frac{\pi}{\sin \frac{u}{v} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi \frac{u}{v} (2n + 1) \log \frac{n}{n + 1}. \tag{IV}$$

Jak z obecných vět o trigonometrických řadách ihned vyplývá, jest řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos (2n + 1) x \pi \log \frac{n + 1}{n}$$

v každém intervalu mezi $(0 \ldots 1)$ stejnoměrně konvergentní a representuje tam tudíž spojitou funkci.

Totéž platí o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log (n - x)}{n - x} - \frac{\log (n + x)}{n + x} \right];$$

neboť pro všechna $0 < x < 1$ a $n \geq 4$ jest

$$\frac{\log (n - x)}{n - x} - \frac{\log (n + x)}{n + x} < \frac{\log (n - 1)}{n - 1} - \frac{\log (n + 1)}{n + 1} = u_n$$

a řada $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ konverguje.

Ke každému reálnému číslu x v intervalu $0 < x < 1$ konverguje posloupnost racionálních čísel $\frac{u_h}{v_h}$ obsažených v tomto intervalu.

Jest tedy pro libovolné x tohoto intervalu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log(n-x)}{n-x}-\frac{\log(n+x)}{n+x}\right]=\lim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log\left(n-\frac{u_h}{v_h}\right)}{n-\frac{u_h}{v_h}}-\frac{\log\left(n+\frac{u_h}{v_h}\right)}{n+\frac{u_h}{v_h}}\right]$$

$$k\pi\operatorname{cotg}x\pi+\frac{\log x}{x}+\frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n+1)x\pi\log\frac{n+1}{n}=$$

$$=\lim\left[k\pi\operatorname{cotg}\frac{u_h}{v_h}\pi+\frac{v_h}{u_h}\log\frac{u_h}{v_h}+\frac{\pi}{\sin\frac{u_h}{v_h}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\pi\frac{u_h}{v_h}(2n+1)\log\frac{n+1}{n}\right].$$

Posloupnosti za znaménkem limitním na pravých stranách těchto rovnic jsou však dle (IV) identické a konvergují tudíž k téže limitě; platí tedy obecně pro $0 < x < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log(n-x)}{n-x}-\frac{\log(n+x)}{n+x}\right]=$$
$$=k\pi\operatorname{cotg}x\pi+\frac{\log x}{x}+\frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n+1)x\pi\log\frac{n+1}{n}. \tag{IV*}$$

Předpokládejme pro jednoduchost i nadále, jak budeme potřebovati, $0 < x < 1$; snadno dokážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right]$$

konverguje stejnoměrně v každém konečném oboru (s), v jehož všech bodech jest *reál. č.* $s > 0$.*

Neboť jest, píšeme-li $s = \sigma + i\tau$

$$\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}=s\int_{-x}^{x}\frac{dy}{(n+y)^{1+s}}$$

a tedy

$$\left|\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right|\leq|s|\int_{-x}^{x}\frac{dy}{(n+y)^{1+\sigma}}=\frac{2x|s|}{(n+\eta)^{1+\sigma}}\;(-x<\eta<x). \tag{6}$$

Representuje tudiž řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right]$ v každém tako-

---

* Obvod oboru můžeme počítati k jeho vnitřku.

vém konečném oboru (s) analytickou funkci a sice funkci $R(1-x, s) - R(1+x, s)$; neboť tato jest jí při *reál. č.* $s > 1$ definována.

Můžeme tedy pro $0 < x < 1$, $\sigma > 0$ psáti dle (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right]=$$
$$=\psi(1+x)-\psi(1-x)+(s-1)\left[f_1(1-x)-f_1(1+x)\right]+\ldots;$$

rozvineme-li řadu na levé straně podle stoupajících mocností faktoru $(s-1)$, obdržíme snadno pro koeficient při první mocnosti

$$2\pi i\left[f_1(1-x)-f_1(1+x)\right]=\int_{L+}\frac{ds}{(s-1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{L+}\left[\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right]\frac{ds}{(s-1)^2},$$

integrujíce v kladném směru dle jednoduše uzavřené křivky L, obepínající bod $s=1$ a neprotínající pomyslné osy.

Residuum funkce $\left[\frac{1}{(n-x)^s}-\frac{1}{(n+x)^s}\right]\frac{1}{(s-1)^2}$ v bodě $s=1$ jest

$$-\left[\frac{\log(n-x)}{n-x}-\frac{\log(n+x)}{n+x}\right]$$

a tedy

$$f_1(1-x)-f_1(1+x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\log(n-x)}{n-x}-\frac{\log(n+x)}{n+x}\right].$$

Z tohoto výsledku vychází porovnáním se vzorcem (IV*), že je-li v rozvoji

$$R(1-x, s)-R(1+x, s)=\psi(1+x)-\psi(1-x)+$$
$$+(s-1)\left[f_1(1-x)-f_1(1+x)\right]+\ldots$$

$0 < x < 1$, má koeficient $f_1(1-x)-f_1(1+x)$ hodnotu

$$f_1(1-x)-f_1(1+x)=-(\log 2\pi+E)\pi\cot g\, x\pi-\frac{\log x}{x}+$$
$$+\frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n+1)x\pi\log\frac{n}{n+1}. \qquad \text{(V)}$$

Podotkněme ještě, že ze vzorce (IV*) jest možno odvoditi některé zajímavé výsledky; užijeme-li Lerchova pravidla o derivování konvergentních trigonometrických řad typu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}\cos 2nx\pi$*, dle něhož derivace jejich součtu jest $\frac{\pi}{\sin x\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-c_{n+1})\cos(2n+1)x\pi$ $(c_0=0)$, jakmile

---

* Lerch, Věstník České Akademie roč. V.

řada tato konverguje stejnoměrně, shledáme, že integrálem funkce $\frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n+1}{n}$ jest řada $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \cos 2n\, x\pi$, jež pro $x = \frac{1}{2}$ nabývá hodnoty $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\log n}{n}$; součet této řady jest $-E\log 2 + \frac{1}{2}\log^2 2$*.

Nalezneme tedy snadno integrací vzorce (IV*) v mezích $(\frac{1}{2}, x)$ vztah

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log^2(n+\tfrac{1}{2}) + \log^2(n-\tfrac{1}{2}) - \log^2(n+x) - \log^2(n-x)] =$$
$$= \log^2 x + 2[(\log 2\pi + E)\log\sin x\pi + (E - \log 2)\log 2] - \qquad \text{(VI)}$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \cos 2n\, x\pi,$$

z něhož na př. pro $x = \frac{1}{4}$ vychází

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log^2(n+\tfrac{1}{2}) + \log^2(n-\tfrac{1}{2}) - \log^2(n+\tfrac{1}{4}) - \log^2(n-\tfrac{1}{4})] =$$
$$= \tfrac{5}{2}\log^2 2 - \log\pi . \log 2,$$

kdežto pro $x = \frac{3}{4}$ (VI*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log^2(n+\tfrac{1}{2}) + \log^2(n-\tfrac{1}{2}) - \log^2(n+\tfrac{3}{4}) - \log^2(n-\tfrac{3}{4})] =$$
$$= \log^2\tfrac{3}{4} - \left(\log\pi + \frac{3\log 2}{2}\right)\log 2.$$

II.

V rozpravě „Další studie v oboru Malmsténovských řad“ odvodil Lerch vzorec**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} = -\frac{\pi i}{2} - \log 2x\pi - E - \psi(v) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log\frac{x+k}{k}$$
$$(0 < v < 1,\ 0 < x < 1) \qquad (7)$$

a o funkci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{v+n}$ dokázal později***, že se dá pro racionální v vyjádřiti v zakončeném tvaru; táž vlastnost jest známa o funkci $\psi(v)$ a byla po prve dokázána Gaussem.† Vychází tudíž z hořejšího vzorce téměř bezprostředně, že funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2nx\pi \log\frac{n+a}{n-a}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nx\pi \log\frac{(n-a)(n+a)}{n^2}$$
$$(0 < x < 1,\ 0 < a < 1)$$

---

* de la Vallée-Poussin. Recherches Analytiques sur la th. des nombres premiers (Ann. Soc. scient., Brux., t. XX. p. 65).

** Cit. str. 1; p. 53.

*** Lerch. Různé výsledky v theorii funkce gamma; Rozpr. Č. Akademie. II. tř. roč. V, str. 20.

† Gauss, Sebrané spisy III. sv., str. 157.

representuje v racionálních bodech x konečný aggregát elementárních transcendent. Užívaje podobné metody jako dříve, odvodím v dalším tento výsledek přímo.

* * *

Poznačme pro stručnost

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n x\pi \log\frac{n+a}{n-a}$$

a klaďme za x racionální kladný zlomek $\frac{u}{v}$ $(u<v)$; píšeme-li řadu $f(x)$ tak, že spojíme vždy v členů v jeden (což odpovídá transformaci indexu $n=vn'+\varrho$; $n'=0,1,2,\ldots$; $\varrho=1,2,\ldots v$), obdržíme

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\varrho=1}^{v}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\frac{vn+\varrho+a}{vn+\varrho-a}$$

anebo také vzhledem ke vzorci (3)

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\sum_{\varrho=1}^{v}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\left\{\frac{2Ea}{v}+\log\frac{\varrho+a}{\varrho-a}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2a}{vn}-\log\frac{1+\frac{\varrho+a}{vn}}{1+\frac{\varrho-a}{vn}}\right]\right\};$$

z toho vychází snadno dle (5)

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=-\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+a}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho-a}{v}\right)}$$

a pak, zavedeme-li v aggregátu $\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\Gamma\left(\frac{\varrho-a}{v}\right)$ index $\varrho=v-\varrho'$ hledaný výraz

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\sin\frac{\varrho+a}{v}\pi$$

nebo

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\sin 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\frac{\sin\frac{\varrho+a}{v}\pi}{\sin\frac{\varrho-a}{v}\pi}. \tag{8}$$

Analogicky nalezneme pro funkci

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n x\pi\log\frac{(n-a)(n+a)}{n^2}\quad(0<x<1,\ 0<a<1)$$

v racionálních bodech x vyjádření

$$g\left(\frac{u}{v}\right)=\log\frac{\sin\frac{a}{v}\pi}{\frac{a}{v}\pi}+\sum_{\varrho=1}^{v-1}\cos 2\pi\frac{u}{v}\varrho\log\frac{\sin\frac{\varrho-a}{v}\pi}{\sin\frac{\varrho}{v}\pi}. \tag{9}$$

Podotkněme ještě, že vycházejíce z Gaussova vzorce*

$$\psi\left(\frac{u}{v}\right) + E = -\log 2v - \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{v}\pi + \sum_{k=1}^{v-1}\cos\frac{2ku\pi}{v}\log\sin\frac{k\pi}{v}$$

můžeme týmiž metodami ale postupem opačným odvoditi Lerchovy trigonometrické rozvoje pro funkci $\psi(x)$**.

---

* Cit. str. 10 (†).
** Cit. str. 10 (***) p. 29.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES DU CALCUL INTÉGRAL.

PAR

O. BORŮVKA.

(RÉSUMÉ.)

La fonction $R(x, \sigma + i\tau)$ étant donnée pour $\sigma > 1$ par la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{\sigma+i\tau}}$ elle admet le développement

$$R(x, s) = \frac{1}{s-1} - \psi(x) + f_1(x)(s-1) + f_2(x)(s-1)^2 \dots \quad (1)$$

où $\psi(x)$ désigne la derivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$. Les propriétés des fonctions $f_n(x)$ étant inconnues, j'ai déduit une série trigonométrique pour la fonction

$$f_1(1-x) - f(1+x) + (\log 2\pi - \Gamma'(1))\, \pi \operatorname{cotg} x\pi + \frac{\log x}{x}, \text{ en supposant } 0 < x < 1.$$

u, v étant des entiers positifs $(u < v)$, on trouve en appliquant les formules (3) et la série de Kummer (2) et en posant

$$A = \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$$

l'expression suivante:

$$A = \frac{(\log 2\pi - \Gamma'(1))}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{v} \pi + \frac{v}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u} - \frac{\log[v(n+1)-u]}{v(n+1)-u}\right]$$

(voir p. 5) d'où résulte la formule (I). En multipliant l'expression $B = \sum_{\rho=1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$ par $\cos \frac{u}{v} \pi$ on déduit facilement la formule (II) et à l'aide de celle-ci et (I) la formule (III). Si l'on exprime dans cette formule la fonction $\log \Gamma(x)$ par la série de Weierstrass (5) on obtient le résultat (IV) et on voit, que ce résultat est valable pour $0 < x < 1$ (form. IV*). En supposant $0 < x < 1$ l'inégalité (6) met en évidence que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s}\right]$ est uniformément convergente dans tout domaine fini à droit de l'axe imaginaire du plan (s) et qu'elle représente la fonction $R(1-x, s) - R(1+x, s)$; en développant cette fonction suivant les puissances croissantes de $(s-1)$ on trouve facilement le coefficient de $(s-1)$ c'est-à-dire $f_1(1-x) - f_1(1+x)$

(voir p. 9). Puis on déduit à l'aide de la formule (IV*) le résultat que le coefficient de $(s-1)$ dans le développement de la fonction $R(1-x, s) - R(1+x, s)$ est, en supposant $0 < x < 1$,

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = -(\log 2\pi - \Gamma'(1))\,\pi \operatorname{cotg} x\pi - \frac{\log x}{x} + \\ + \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n}{n+1}.$$

L'intégrale de la fonction $\dfrac{\pi}{\sin x\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \dfrac{n+1}{n}$ est $-$ $- \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{n} \cos 2nx\pi$; en intégrant la formule (IV*) on déduit la relation (VI) d'où résultent pour $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{3}{4}$ les formules bien intéressantes (VI*).

* * *

Lerch a établi la formule (7) et il a montré plus tard que, v étant rationnel, on peut exprimer la fonction $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{2nx\pi i}}{n+v}$ par des fonctions élémentaires en nombre fini; donc il résulte de la formule (7) presque immédiatement que, x étant rationnel, les fonctions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin 2nx\pi \log \dfrac{n+a}{n-a}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos 2nx\pi \log \dfrac{(n-a)(n+a)}{n^2}$ $(0 < x < 1,\ 0 < a < 1)$ sont représentées par des fonctions élémentaires en nombre fini. Je démontre ce théorème en posant $x = \dfrac{u}{v}$, $n = vn' + \varrho$ $(n' = 0, 1, 2, \ldots;\ \varrho = 1, 2, 3, \ldots v)$ et en appliquant la formule (3) ainsi que la série de Weierstrass (5). On obtient les formules (8) et (9).

Brno, le 24 novembre 1923.