Otakar Borůvka

Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante

Bulletin int. Acad. Tchèque Sci., vol. 29, 1928, 256-277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500008

Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante.

Par

O. BORŮVKA.

Présenté le 19 octobre 1928.

On a déjà étudié à plusieures reprises des surfaces minima réelles, plongées dans l'espace euclidien à quatre dimensions qui jouissent de la propriété que l'indicatrice de la courbure à chaque point soit une circonférence et on a obtenu à ce sujet des résultats intéressants; en particulier, on a trouvé les équations des toutes ces surfaces*).

Cependant, la question de la recherche et des propriétés essentielles des surfaces jouissant des mêmes propriétés métriques, mais plongées dans un espace non-euclidien. a été ouverte jusqu'ici. C'est M. E. Cartan qui m'a invité de traiter cette question.

Je vais exposer, dans ce Mémoire, les résultats principeaux que j'ai obtenus au sujet de telles surfaces. La méthode que j'applique est la méthode du répère mobile sous la forme employée par M. E. Cartan et elle consiste dans la formation et discussion des systèmes d'équations de Pfaff.**

Ce Mémoire se divise en cinq chapitre dont le premier contient des explications préliminaires indispensables pour comprendre la question.

Dans le deuxième chapitre je m'occupe de la question d'existence des surfaces jouissant des propriétés indiquées; je n'exclus pas le cas, où l'espace ambiant est l'espace euclidien. Je trouve, *quelque soit la courbure*

*) S. Kwietniewski, Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven (Dissertation, Zürich, 1902).

K. Kommerell, Riemansche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen (Mathem. Annalen, T. 60, 1905; p. 548).

L. P. Eisenhart, Minim l surfaces in Euclidean four space (Amer. Journ. of Math. T. 34, 1912, p.

**) Le lecteur pourra co er de nombreux Mémoires de M. E. Cartan, surtout son Mémoire "La géométrie des espaces de Riemann" (Mémorial des Sciences mathém" Fasc. IX, 1925, Paris).

de l'espace, il existe des surfaces considérées et elles dépendent, dans le cas général, de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Les considérations du troisième chapitre ont le but de compléter les résultats connus au sujet des surfaces en question plongées dans *l'espace euclidien,* de manière à donner la construction géométrique de telles surfaces. Du point de vue projective, *ces surfaces sont engendrées par des points d'intersection de deux cônes de la deuxième espèce dont les axes ne se coupent pas.* Elles jouissent de la propriété de contenir deux familles de courbes planes et les plans tangents à la surface le long d'une courbe plane quelconque d'une famille forment un cône dont le sommet est situé sur l'axe du cône (de la deuxième espèce) dont les plans contiennent les courbes de l'autre famille. La métrique est déterminée par une quadrique contenant les axes de deux cônes. En particulier, le calcul montre que, dans l'espace euclidien à quatre dimensions, il n'existe pas des surfaces minima dont l'indicatrice est une circonférence de rayon constant.

Le quatrième chapitre contient la construction géométrique des surfaces considérées mais plongées dans *un espace non-euclidien.* Projectivement, *ces surfaces sont engendrées par des points d'intersection des plans osculateurs de deux courbes situées sur une quadrique non-dégénérée et telles que les tangentes de ces deux courbes sont elles-mêmes sur la méme quadrique.* La métrique est déterminée par la quadrique qui contient les deux courbes en question.

Enfin, dans le cinquième chapitre je m'occupe d'un cas spécial de telles surfaces. Je pose la question s'il existe, dans l'espace projectif à quatre dimensions, parmi les surfaces qui sont engendrées par des points d'intersection des couples de plans osculateurs de deux courbes situées sur une quadrique non-dégénérée et telles que leurs tangentes sont elles mêmes sur la même quadrique, des surfaces, qui jouissent de la propriété *d'être coupées par les plans osculateurs d'une des deux courbes considérées des coniques suivantes.* Je trouve *qu'il existe une surface et une seule jouissant de cette propriété et que c'est la projection (prise d'un point général) de la surface de Veronese et que les deux courbes dont les plans osculateurs l'engendrent se confondent dans une courbe rationnelle normale du quatrième dégré qui à son tour est située sur la surface.* On arrive ainsi à une construction nouvelle de la projection de la surface de Veronese*) et une considération simple montre que *cette construction n'est possible que d'une seule manière;* c'est-à-dire, il n'existe, sur la surface considérée qu'une courbe rationnelle normale du quatrième dégré dont les plans osculateurs l'engendrent. En reprennant le point de vue métrique, la surface en question est susceptible d'une définition métrique dans un espace non euclidien et précisement elle appar-

*) Du point de vue projective il semble naturel de considérer, plus généralement, les surfaces, qui peuvent être définies dans S_{2k} ($k > 2$) comme le lieu des points d'intersection des couples de S_k — osculateurs d'une courbe rationnelle normale du $2k$-ième dégré. Je reviendrai dans un autre travail à ce sujet.

tient aux surfaces minima dont l'indicatrice à chaque point est une circonférence; parmi de telles surfaces *elle est caractérisée par la propriété que le rayon de l'indicatrice est le même* à *chaque point de la surface.* Mais il existe une relation entre le rayon de l'indicatrice et la courbure de l'espace; en particulier, pourque le rayon de l'indicatrice soit réel il faut que l'espace ambiant soit à courbure positive. Quant au rôle qui joue la quadrique absolue par rapport à la surface considérée, cette surface étant engendrée par des points d'intersection des couples de plans osculateurs d'une courbe rationnelle normale du quatrième dégré et d'une seule, il existe une quadrique non-dégénérée et une seule qui contient cette courbe et chaque sa tangente. C'est précisement la quadrique qui attribue à la surface la métrique en question. Autrement définie, c'est la projection de la première polaire de l'hypersurface des coniques dégénérées associée au centre de la projection.

Je suis obligé d'exprimer à M. E. Cartan et M. E. Čech mes remercîments affectueux pour des precieux conseils qu'ils m'ont donnés au sujet de ce travail.

I. Préliminaires.

1. Plaçons nous dans un espace de Riemann à courbure constante c à quatre dimensions et attachons à chaque point M de l'espace un repère (R) formé de quatre vecteurs rectangulaires unitaires e_1, e_2, e_3, e_4. En passant du point M à un point M' infiniment voisin on passe du repère (R) attaché à M au repère (R') attaché à M', et l'on a les formules de la forme

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \omega_4 e_4, \\ d e_1 &= \omega_{11} e_1 + \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 + \omega_{14} e_4, \\ d e_2 &= \omega_{21} e_1 + \omega_{22} e_2 + \omega_{23} e_3 + \omega_{24} e_4, \\ d e_3 &= \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2 + \omega_{33} e_3 + \omega_{34} e_4, \\ d e_4 &= \omega_{41} e_1 + \omega_{42} e_2 + \omega_{43} e_3 + \omega_{44} e_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Les ω qui y figurent sont des formes linéaires par rapport aux différentielles des coordonnées curvilignes de l'espace et elles satisfont, à cause des suppositions faites au sujet des vecteurs e_i, aux relations

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{2}$$

quels que soient les deux indices i, j distincts ou non. L'espace étant supposé à courbure constante c on a les équations de structure

$$\begin{aligned} \omega_i' &= \sum_r [\omega_r \, \omega_{ri}], \\ \omega_{ij}' &= \sum_r [\omega_{ir} \, \omega_{rj}] - c\,[\omega_i \, \omega_j]. \end{aligned} \tag{3}$$

Nous admettons expressivement le cas $c = 0$ qui caractérise l'espace euclidien.

2. Imaginons une surface quelconque (S) plongée dans l'espace considéré. Pour procéder d'une manière simple, nous particulariserons le repère (R) attaché à chaque point M de la surface (S) de façon à prendre

les vecteurs e_1, e_2 tangents à la surface. Cela étant, on a, en se déplaçant sur la surface les formules

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0, \tag{4}$$

qui entraînent, d'après les équations de structure,

$$\begin{aligned} [\omega_1\, \omega_{13}] + [\omega_2\, \omega_{23}] &= 0, \\ [\omega_1\, \omega_{14}] + [\omega_2\, \omega_{24}] &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ces relations montrent que, sur (S) les ω_{13}, ω_{23}, ω_{14}, ω_{24} sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2, de la forme

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\,\omega_1 + b\,\omega_2, & \omega_{14} &= a'\omega_1 + b'\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\,\omega_1 + c\,\omega_2, & \omega_{24} &= b'\omega_1 + c'\omega_2, \end{aligned} \tag{6}$$

et cela quel que soit le choix du repère (compatible avec les conditions ci-dessus).

Il s'introduit ici deux formes différentielles quadratiques

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \omega_1\, \omega_{13} + \omega_2\, \omega_{23}, \\ \Phi_4 &= \omega_1\, \omega_{14} + \omega_2\, \omega_{24}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dans un point quelconque M de la surface (S) la *courbure normale* est définie par le vecteur normal à (S) dont les composantes sont les formes Φ_3, Φ_4 divisées par l'élément linéaire de la surface. A chaque courbe tracée sur la surface (S) et passant par M correspond un vecteur de courbure normale qui ne dèpend que de la direction de cette courbe. On le voit facilement, en posant, d'après (1),

$$\omega_1 = ds \cos \Theta, \quad \omega_2 = ds \sin \Theta$$

ds étant l'élément de l'arc et Θ l'angle d'une courbe passant par M et du vecteur e_1, de sorte que, d'après (6) et (7), on obtient pour les composantes du vecteur de la courbure normale, associée à la courbe correspondante, les formules de la forme

$$\begin{aligned} X_3 &= a \cos^2 \Theta + 2\,b \sin \Theta \cos \Theta + c \sin^2 \Theta \\ X_4 &= a' \cos^2 \Theta + 2b' \sin \Theta \cos \Theta + c' \sin^2 \Theta. \end{aligned} \tag{8}$$

On voit de plus que, en chaque point M de la surface les formules (8) définissent une *conique,* qui est formée des extremités des vecteurs de coubure normale du faisceau de courbes passant par M; on l'appelle *l'indicatrice de la courbure.*

Les formules (8) étant écrivées sous la forme

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{a + c}{2} + \frac{a - c}{2} \cos 2\,\Theta + b \sin 2\,\Theta, \\ X_4 &= \frac{a' + c'}{2} + \frac{a' - c'}{2} \cos 2\,\Theta + b' \sin 2\,\Theta, \end{aligned} \tag{9}$$

elles mettent en évidence que, en général, le centre de l'indicatrice se ne confond pas avec le point correspondant M de la surface.

La propriété d'une surface d'avoir en chaque son point l'indicatrice dont le centre se confond avec le point considéré de la surface, caractérise des *surfaces minima.*

Donc, (S) étant une surface minima, on a, en chaque son point M

$$a + c = 0, \quad a' + c' = 0, \tag{10}$$

de sorte que les formules (6) ont la forme

$$\begin{array}{ll} \omega_{13} = a\,\omega_1 + b\,\omega_2, & \omega_{14} = a'\,\omega_1 + b'\,\omega_2, \\ \omega_{23} = b\,\omega_1 - a\,\omega_2, & \omega_{24} = b'\,\omega_1 - a'\,\omega_2, \end{array} \tag{11}$$

et les formules (9) s'écrivent

$$\begin{array}{l} X_3 = a \cos 2\,\Theta + b \sin 2\,\Theta, \\ X_4 = a' \cos 2\,\Theta + b' \sin 2\,\Theta. \end{array} \tag{12}$$

3. *Analytiquement,* pour trouver une surface générale (S), plongée dans l'espace considéré et assujetie à remplir certaines conditions géométriques, que l'on avait exprimé par des relations entre les ω, revient à la recherche d'un système de formes différentielles ω, les plus générales, à deux variables indépendantes, satisfaisant aux relations considérées et aux formules de structure (3).

Or, en considérant le système d'équations différentielles

$$\begin{array}{lllllll} d\,M & & & \omega_1\,e_1 & + \omega_2\,e_2, & & \\ d\,e_1 - & c\,\omega_1\,M & & & + \omega_{12}\,e_2 & + \omega_{13}\,e_3 & + \omega_{14}\,e_4, \\ d\,e_2 = & - c\,\omega_2\,M & & \omega_{12}\,e_1 & & - \omega_{23}\,e_3 & + \omega_{24}\,e_1, \\ d\,e_3 = & & & - \omega_{13}\,e_1 & \omega_{23} e_2 & & + \omega_{34}\,e_4, \\ d\,e_4 = & & & - \omega_{14}\,e_1 & \omega_{24}\,e_2 & - \omega_{34}\,e_3, & \end{array} \tag{13}$$

où les formes ω sont liées par des relations considérées, on vérifie par un calcul facile, que les conditions d'intégrabilité de ce système sont précisement les formules de structure (3), quelque soit la valeur de la constante c, différente de zéro ou non. Si l'on avait trouvé, par un procédé quelconque, un système de fonctions, satisfaisant aux équations de la forme (13) et susceptibles de représenter un système fondamentale d'intégrales de ces équations, on aurait en même temps une solution du problème, les ω étant bien déterminés par les formules (13). D'autre part, si l'on désigne par $\tilde{\omega}$ un système quelconque de formes différentielles à deux variables indépendantes, qui fournit une solution du problème, le système d'équations différentielles (13) écrit avec les $\tilde{\omega}$ est complètement intégrable. Il possède donc un système fondamentale d'intégrales qui à son tour, détermine les formes $\tilde{\omega}$. Donc, chaque système de formes $\tilde{\omega}$, satisfaisant aux conditions du problème, est déterminé par un système de fonctions M, e_1, e_2, e_3, e_4 satisfaisant aux équations différentielles de la forme (13) et à la condition ci-dessus. Par suite, la solution générale d'un système d'équations differentielles de la forme (13) fournit la solution générale du problème.

4. Supposons que l'on ait trouvé une solution ω du problème. Le système (13), écrit avec les ω, définit, dans l'espace projectif à quatre

dimensions*), une surface qui est le lieu du point M, et en même temps un repère mobile attaché à chaque point de cette surface, dont les sommets, par rapport à un système de référence fixe, sont les fonctions M, e_1, e_2, e_3, e_4. Si l'on considère dans l'espace projectif en question un point quelconque A on le peut mettre sous la forme

$$A = x\,M + x_1\,e_1 - x_2\,e_2 + x_3\,e_3 + x_4\,e_4,$$

les x étant les coordonnées du point A par rapport au repère mobile.

Dans le cas de l'espace euclidien ($c = o$) on démontre, en considérant un point A fixe, que la quantité x est fixe. Par suite, les coordonnées x d'un point fixe de l'espace projectif, par rapport aux différents repères attachés à la surface, satisfont à une relation de la forme $x = X$, les X étant les coordonnées du même point A par rapport à un des repères mobiles que l'on choisit comme repère fixe. En particulier, on a, pour les coordonnées du point M lui-même $X = 1$.

De plus, on démontre que, dans l'hyperplan $x = 0$ la quantité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ est fixe. Par suite, les coordonnées x d'un point fixe de cet hyperplan satisfont à une relation de la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2. \tag{14}$$

En particulier, on a, pour les coordonnées du point $d\,M$ lui-même

$$d\,s^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = d\,X_1^2 + d\,X_2^2 + d\,X_3^2 + d\,X_4^2.$$

On voit ainsi que la quadrique

$$X = 0,\ X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0 \tag{15}$$

est la quadrique absolue de l'espace enclidien considéré.

Quant aux points e_1, e_2, e_3, e_4 on voit que, en chaque position, ces points sont conjugués deux à deux par rapport à cette quadrique. De plus, les carrés scalaires des coordonnées des points $e_1 \pm i\,e_2$, $e_3 \pm i\,e_4$ par rapport au premier membre de l'équation (14) étant égaux à zéro, ces points sont situés sur la quadrique (15).

Dans le cas d'un espace non-euclidien ($c \neq o$) on démontre, en considérant un point A fixe, que la quantité

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{1}{c}\,x^2$$

est fixe. Par suite, les coordonnées x d'un point A fixe de l'espace projectif, par rapport aux différents repères attachés à la surface, satisfont à une relation de la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{1}{c}\,x^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \frac{1}{c}\,X^2, \tag{16}$$

*) L'explication suivante, dans le cas d'un espace non-euclidien, est due à M. E. Cartan („*Sur les variétés à connexion projective*"; Bull. de la soc. math. de France, 1924, chap. VI.)

les X étant les coordonnées du même point A par rapport à un des repères mobiles que l'on choisit comme repère fixe. En particulier, on a, pour les coordonnées du point M lui-même

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \frac{1}{c} X^2 = \frac{1}{c}$$

et d'autre part, on a

$$d s^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = d X_1^2 + d X_2^2 + d X_3^2 + d X_4^2 + \frac{1}{c} d X^2.$$

On voit ainsi que la quadrique

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \frac{1}{c} X^2 = 0 \tag{17}$$

est la quadrique absolue d'espace non-euclidien considéré.

Quant aux points e_1, e_2, e_3, e_4 on voit que, en chaque position, ces points sont conjugés deux à deux par rapport à cette quadrique. De plus, les carrés scalaires des coordonnées des points $e_1 \pm i\, e_2$, $e_3 \pm i\, e_4$ par rapport au premier membre de l'équation (16) étant égaux à zéro, ces points sont situés sur la quadrique (17).

II. L'existence et la généralité des surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante, dont l'indicatrice, à chaque point, est une circonférence.

1. Nous allons étudier, dans ce Mémoire, des *surfaces minima, plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante, qui jouissent de la propriété que, M étant un point quelconque de la surface, l'indicatrice á ce point soit une circonférence (de rayon différent de zéro).*

Pour de telles surfaces (s'il en existe) l'expresion $X_3^2 + X_4^2$ (12) ne dépend pas de Θ et l'on a

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = R^2, \\ a\, b + a'\, b' = o, \end{aligned} \tag{18}$$

R étant le rayon de la circonférence, qui varie, en général, avec les paramètres qui déterminent la position du point M sur la surface. On voit donc, en particulier, que les quantités b, b' ne peuvent pas être nuls tous les deux. On peut supposer, sans restreindre la genéralité, $b' \neq o$.

Cela posé, appliquons les équations de structure aux formules (11). Nous aurons, en tenant compte de (2),

$$\begin{aligned} &[\omega_1 (d\, a - 2\, b\, \omega_{12} - a'\omega_{34})] + [\omega_2 (d\, b + 2\, a\, \omega_{12} - b'\omega_{34})] = 0, \\ &[\omega_1 (d\, b + 2\, a\, \omega_{12} - b'\omega_{34})] - [\omega_2 (d\, a - 2\, b\, \omega_{12} - a'\omega_{34})] = 0, \\ &[\omega_1 (d\, a' - 2\, b'\omega_{12} + a\, \omega_{34})] + [\omega_2 (d\, b' + 2\, a'\omega_{12} + b\, \omega_{34})] = 0, \\ &[\omega_1 (d\, b' + 2\, a'\omega_{12} + b\, \omega_{34})] - [\omega_2 (d\, a' - 2\, b'\omega_{12} + a\, \omega_{34})] = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Désignons par δ un symbole de différentiation portant uniquement sur les paramètres arbitraires dont dépend le choix du repère attaché au point M et par e_{ij} ce que devient la forme ω_{ij} avec des differentielles δ. On a manifestement

$$e_1 = e_2 = e_{13} = e_{23} = e_{14} = e_{24} = 0,$$

et les formules (19) donnent, en particulier,

$$\delta a' = 2\, b' e_{12} - a\, e_{34}.$$

Or, b' étant différent de zéro, on voit que, en changeant le repère attaché au point M, la variable a' varie arbitrairement. On peut donc supposer $a' = 0$.

Cela étant, les équations (18) donnent

$$b = 0, \quad a = b' = R,$$

de sorte que les formules (11) sont de la forme

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= R\,\omega_1, & \omega_{14} &= R\,\omega_2, \\ \omega_{23} &= -R\,\omega_2, & \omega_{24} &= R\,\omega_1, \end{aligned} \tag{20}$$

et les formes quadratiques Φ_3, Φ_4 devient

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= R\,(\omega_1^2 - \omega_2^2), \\ \Phi_4 &= 2\,R\,\omega_1\,\omega_2. \end{aligned}$$

Les relations quadratiques extérieures (19) s'écrivent

$$\begin{aligned} &\left[\omega_1 \frac{dR}{R}\right] + [\omega_2\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34})] = 0, \\ &[\omega_1\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34})] - \left[\omega_2 \frac{dR}{R}\right] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

On les peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &\left[(\omega_1 - i\,\omega_2)\left(\frac{dR}{R} + i\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34})\right)\right] = 0, \\ &\left[(\omega_1 + i\,\omega_2)\left(\frac{dR}{R} - i\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34})\right)\right] = 0. \end{aligned} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{22}$$

2. Les surfaces cherchées, si elles existent, sont définies par le système d'équations différentielles (13) ou les formes ω satisfont aux relations (20) et aux conditions d'integrabilité (22). Celles-ci mettent en évidence que le système considéré est en involution et que sa solution générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. Donc,

quelque soit la valeur constante de la courbure de l'espace, il existe des surfaces considérées et elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.

On voit de plus, que le système admet deux familles de caractéristiques, définies par les équations $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$.

3. Nous allons nous occuper de la construction géométrique et des propriétés essentielles des surfaces générales considérées. Les considérations

qui sont à faire à ce sujet sont distinctes dans le cas de l'un espace euclidien ($c = 0$) et d'un espace non-euclidien ($c \neq 0$). Nous allons traiter séparement ces deux cas.

III. Les surfaces plongées dans l'espace euclidien.

1. Dans le cas $c = 0$, pour donner la construction géométrique des surfaces considérées, plaçons nous dans l'espace projectif à quatre dimensions et considérons le systéme d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
d M &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\
d e_1 &= \omega_{12} e_2 + R \omega_1 e_3 + R \omega_2 e_4, \\
d e_2 &= -\omega_{12} e_1 - R \omega_2 e_3 + R \omega_1 e_4, \\
d e_3 & -R \omega_1 e_1 + R \omega_2 e_2 + \omega_{34} e_4, \\
d e_4 &= R \omega_2 e_1 - R \omega_1 e_2 - \omega_{34} e_3,
\end{aligned} \tag{23}$$

auquel conduisent les équations (20). On le peut remplacer par le système équivalent

$$d M \frac{1}{2}(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_1 i\,e_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 i\omega_2)(e_1 + ie_2), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
d(e_1 - i\,e_2) &= i\,\omega_{12}(e_1 - i\,e_2) + R(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_3 - i\,e_4), \quad (i = \sqrt{-1}) \\
d(e_3 - i\,e_4) &= R(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_1 - i\,e_2) + i\,\omega_{34}(e_3 - i\,e_4), \\
d(e_1 + i\,e_2) & -i\,\omega_{12}(e_1 + i\,e_2) + R(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_3 + i\,e_4), \\
d(e_3 + i\,e_4) &- -R(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_1 + i\,e_2) - i\,\omega_{34}(e_3 + i\,e_4).
\end{aligned}$$

On voit que les droites $[e_1 \pm i\,e_2, e_3 \pm i\,e_4]$*) sont fixes et que, si l'on se déplace sur une caractéristique $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$, le plan $[M, e_1 \pm i\,e_2, e_3 \mp i\,e_4]$ reste fixe en position. On a donc sur la surface deux familles de courbes planes $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$. Les plans de chaque famille passent par une droite fixe $[e_1 i\,e_2, e_3 \mp i\,e_4]$ et dépendent d'un paramètre qui est l'intégrale première de l'équation $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$; on n'a aucune correspondance entre les plans de ces deux familles. Les plans d'une famille forment un cône de la deuxième espèce dont l'axe est la droite $[e_1 \pm i\,e_2, e_3 \pm i\,e_4]$. Les deux axes déterminent un espace à trois dimensions et par suite, elles ne se coupent pas; de plus, les points $e_1 \pm i\,e_2$, $e_3 \pm i\,e_4$ étant situés sur la quadrique (15) et les couples $e_1 \pm i\,e_2$, $e_3 \pm i\,e_4$*) étant conjugués par rapport à cette quadrique, les deux axes en question sont situées sur la même quadrique.

Par chaque point M de la surface passe un plan de chaque famille. Par suite, la surface considérée est engendrée par des points d'intersection de deux cônes de la deuxième espèce dont les axes ne se coupent pas.

D'autre part, une considération facile montre que, un cône de la deuxième espèce, le plus générale, plongé dans l'espace à quatre dimensions, dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

Par suite, l'indétermination de la solution montre que les deux cônes, dont les plans engendrent la surface en question, peuvent être arbitraires.

*) Prendre les signes + ou tous les deux.

En définitive, on a le résultat suivant:

Les surfaces générales considérées sont engendrées par des points d'intersection de deux cônes arbitraires de la deuxième espèce dont les axes ne se coupent pas; *en outre, ces axes sont situées sur la quadrique* (15).

2. Dans la suite, pour abréger, nous appelerons une surface plongée dans l'espace projectif à quatre dimensions une surface (R), si elle peut être définie par un système d'équations différentielles de la forme (24). La définition géométrique d'une surface (R) est donnée par les considérations précédentes.

3. Les surfaces (R) jouissent d'une propriété remarquable que nous allons établir.

Les plans tangents d'une surface (R) aux points d'une courbe plane quelconque d'une famille forment un cône (de la première espèce) dont le sommet est situé sur l'axe du cône (de la deuxième espèce) dont les plans contiennent les courbes de l'autre famille; plus précisement, *ce sommet est le point d'intersection de l'espace à trois dimensions qui est déterminé par le plan de la courbe considérée et le plan infiniment voisin avec l'axe du cône de plans de l'autre famille.*

En effet, les formules (24) montrent que, si l'on se déplace sur une courbe quelconque de la famille $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$, le point $e_1 \mp i\,e_2$ ne change pas en position. Ce point est le point d'intersection du plan tangent à la surface au point M et de la droite $[e_1 \mp i\,e_2,\ e_3 \mp i\,e_4]$ qui, à son tour, est l'axe du cône dont les plans contiennent les courbes de la famille $\omega_1 \mp i\,\omega_2 = 0$.

On voit de plus que le point $e_1 \mp ie_2$ est situé sur la tangente au point M à la courbe plane de la famille $\omega_1 \mp i\,\omega_2 \quad 0$; par suite, il est contenu dans l'espace à trois dimensions, déterminé par le plan de la courbe considérée $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$ et le plan infiniment voisin.

L'hypothèse indiquée est vraie.

4. D'après ce qui precède, il est clair que, si l'on prend la quadrique (15) comme l'absolu *chaque surface (R) pour laquelle la fonction R, qui figure dans les équations* (24), *est différente de zéro, peut être définie d'une manière métrique et précisement comme une surface minima plongée dans l'espace euclidien à quatre dimensions, dont l'indicatrice à chaque point est une circonférence.* Inversement,

chaque surface qui est définie de cette manière métrique détermine une surface (R).

5. On a déjà étudié des surfaces minima réelles plongées dans l'espace euclidien à quatre dimensions qui jouissent de la propriété que l'indicatrice, à chaque point, soit une circonférence. Le théorème fondamentale que l'on connait à ce sujet est due à M. Eisenhart:*)

---

*) Voir la remarque p. 1.

Pourque, dans l'espace euclidien à quatre dimensions, une surface réelle puisse être définie par l'équation $u + i v = f(x + i y)$, f étant une fonction analytique, il faut et il suffit que la surface soit une surface minima dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence.

Les résultats précédentes nous permettent de vérifier facilement ce théorème intéressant.

En effet, ce théorème veut dire, pourque une surface jouisse des propriétés métriques indiquées, il faut et il suffit que les coordonnées d'un point quelconque de la surface, puissent être exprimées, en choisissant convenablement le système de référence, par les formules

$$x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = U(x, y), \; x_4 = V(x, y), \tag{25}$$

les $U(x, y)$, $V(x, y)$ étant deux fonctions réelles de deux variables réelles indépendantes x, y, qui satisfont aux équations partielles de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{26}$$

Cela étant, soient $[0, 1, \pm i, 0, 0]$, $[0, 0, 0, 1, \pm i]$*) les points qui déterminent les axes des deux cônes de la deuxième espèce qui engendrent une surface (R); ces points sont bien situés sur la quadrique (15). Chaque plan d'un de ces cônes est déterminé par un point dépendant d'un paramétre qui n'est pas situé sur l'axe du cône considéré. Si $[u_0, u_1, u_2, u_3, u_4]$ est le point, qui détermine un plan d'un des deux cônes considérés et que $[v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$ est le point qui détermine un plan de l'autre cône, les u et v étant en général des fonctions analytiques d'une variable complexe u et v respectivement, les coordonnées d'un point d'un ou l'autre cône peuvent s'écrire

$$X = \lambda_2 u_0, \; X_1 = \lambda_0 + \lambda_2 u_1, \; X_2 = i \lambda_0 + \lambda_2 u_2, \; X_3 = \lambda_1 + \lambda_2 u_3,$$
$$X_4 = i \lambda_1 + \lambda_2 u_4$$

ou bien

$$X = \mu_2 v_0, \; X_1 = \mu_0 + \mu_2 v_1, \; X_2 = - i \mu_0 + \mu_2 v_2, \; X_3 = \mu_1 + \mu_2 v_3,$$
$$X_4 = - i \mu_1 + \mu_2 v_4,$$

les λ et μ étant des paramètres arbitraires. On obtient pour les coordonnées d'un point de la surface (R) correspondante les formules

$$\begin{aligned}
\varrho X &= 2 u_0 v_0, \\
\varrho X_1 &= u_1 v_0 + u_0 v_1 + i u_2 v_0 - u_0 v_2, \\
\varrho X_2 &= u_2 v_0 + u_0 v_2 + i u_4 v_1 - u_1 v_0, \\
\varrho X_3 &= u_3 v_0 + u_0 v_3 + i u_4 v_0 - u_0 v_4, \\
\varrho X_4 &= u_4 v_0 + u_0 v_4 + i u_0 v_3 - u_3 v_0,
\end{aligned}$$

*) Prendre les signes + ou — tous les deux.

ϱ étant un facteur arbitraire, différent de zéro. Or, $u_0 v_0 \neq 0$, car autrement, la surface correspondante serait plongée dans un espace à trois dimensions; pour être d'accord aux considérations faites au *n°* I, 4, choisissons $\varrho = 2 u_0 v_0$. Nous aurons, en changeant légérement les notations, pour les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface considérée, les formules

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{2} (u_1 + v_1 + i u_2 - v_2),\\
X_2 &= \frac{1}{2} (u_2 + v_2 - i u_1 - v_1),\\
X_3 &= \frac{1}{2} (u_3 + v_3 + i u_4 - v_4),\\
X_4 &= \frac{1}{2} (u_4 + v_4 - i u_3 - v_3).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Dans ces formules les u et v sont encore des fonctions analytiques d'une variable complexe u et v respectivement.

Posons $u_\alpha = u_{\alpha 1} + i u_{\alpha 2}$, $v_\alpha = v_{\alpha 1} + i v_{\alpha 2}$, les $u_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$ étant des fonctions réelles de deux variables réélles et exprimons que les formules (27) répésentent une surface réelle. Les conditions *nécéssaires et suffisantes* pour qu'il en soit ainsi étant

$$
u_{12} + u_{21} = v_{21} - v_{12},\quad u_{11} - u_{22} = - v_{11} + v_{22},\quad u_{32} + u_{41} = v_{41} - v_{32},
$$
$$
u_{31} - u_{42} = v_{31} + v_{42},
$$

les formules (26) prennent la forme

$$
X_1 = u_{11} - u_{22},\quad X_2 = u_{12} + u_{21},\quad X_3 = u_{31} - u_{42},\quad X_4 = u_{32} + u_{41}.
$$

Or, en tenant compte du fait que les u, qui figurent dans ces équations, satisfont à un système d'équations différentielles partielles de Cauchy-Riemann

$$
\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = \frac{\partial u_{12}}{\partial y},\qquad \frac{\partial u_{11}}{\partial y} = -\frac{\partial u_{12}}{\partial x},
$$
$$
\frac{\partial u_{21}}{\partial x} = \frac{\partial u_{22}}{\partial y},\qquad \frac{\partial u_{21}}{\partial y} = -\frac{\partial u_{22}}{\partial x},
$$
$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

les x, y étant les variables indépendantes, on voit que l'on a

$$
\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\partial X_2}{\partial y},\qquad \frac{\partial X_1}{\partial y} = -\frac{\partial X_2}{\partial x},
$$
$$
\frac{\partial X_3}{\partial x} = \frac{\partial X_4}{\partial y},\qquad \frac{\partial X_3}{\partial y} = -\frac{\partial X_4}{\partial x},
$$

de sorte que $X_1 + i X_2$ ainsi que $X_3 + i X_4$ sont deux fonctions analytiques de $x + i y$. Par suite, $X_3 + i X_4$ est une fonction analytique de $X_1 + i X_2$ et si l'on pose

$$
X_1 = x,\quad X_2 = y,\quad X_3 = U(x, y),\quad X_4 = V(x, y),
$$

les $U(x, y)$, $V(x, y)$ vérifient les équations (26).

Le théorème de M. Eisenhart se trouve ainsi démontré.

6. On peut se poser la question s'il existe, parmi les surfaces minima, plongées dans l'espace euclidien à quatre dimensions, dont l'indicatrice à chaque point est une circonférence, des surfaces jouissant de la propriété que, le rayon de l'indicatrice soit le *même à chaque point de la surface.*

On démontre facilement, en tenant compte des équations d'intégrabilité, *qu'il n'existe aucune surface jouissant de cette propriété.*

IV. Les surfaces plongées dans un espace non-euclidien.

1. Dans le cas $c \neq 0$, pour donner la construction géométrique des surfaces corridérées, plaçons nous dans l'espace projectif à quatre dimensions et considérons le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
d M &= & & \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\
d e_1 &= -c\,\omega_1 M & & + \omega_{12} e_2 + R\,\omega_1 e_3 + R\,\omega_2 e_4, \\
d e_2 &= \quad c\,\omega_2 M & & \omega_{12} e_1 - R\,\omega_2 e_3 + R\,\omega_1 e_4, \\
d e_3 & & & R\,\omega_1 e_1 + R\,\omega_2 e_2 + \omega_{34} e_4 \\
d e_4 & & & R\,\omega_2 e_1 - R\,\omega_1 e_2 - \omega_{34} e_3,
\end{aligned} \tag{28}$$

auquel conduisent les équations (20). On le peut remplacer par le système équivalent

$$\begin{aligned}
d M &- \frac{1}{2}(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_1 - i\,e_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_1 + i\,e_2), \\
d(e_1 \quad i\,e_2) & \quad -c\,(\omega_1 - i\,\omega_2) M + i\,\omega_{12}(e_1 - i\,e_2) + \\
& \quad + R\,(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_3 - i\,e_4), \qquad (i \quad \sqrt{\quad 1}) \\
d(e_3 - i\,e_4) &= \quad -R\,(\omega_1 \quad i\,\omega_2)(e_1 \quad i\,e_2) + i\,\omega_{34}(e_3 - i\,e_4), \\
d(e_1 + i\,e_2) & \quad -c\,(\omega_1 + i\,\omega_2) M \qquad - i\,\omega_{12}(e_1 + i\,e_2) + \\
& \quad + R\,(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_3 + i\,e_4), \\
d(e_3 + i\,e_4) & \quad R\,(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_1 + i\,e_2) - i\,\omega_{34}(e_3 + i\,e_4).
\end{aligned} \tag{29}$$

On voit que le point $e_3 \pm i e_4$ décrit une courbe, dont la tangente, en chaque point, passe par le point $e_1 \pm i\,e_2$ et que, si l'on se déplace sur une caractéristique $\omega_1 \pm i\,\omega_2 \quad 0$, le point $e_3 - i\,e_4$ reste fixe en position. L'intégrale première de l'équation $\omega_1 \quad i\,\omega_2 \quad 0$ est donc le paramètre sur la courbe en question et l'on n'a aucune correspondance entre les points $e_3 + i\,e_4$, $e_3 - i\,e_4$. De plus, les points $e_1 \pm i\,e_2$, $e_3 \pm i\,e_4$ étant situés sur la quadrique (17) et les couples $e_1 \pm i\,e_2$, $e_3 \pm i\,e_4$*) étant conjugués par rapport à cette quadrique, la courbe considérée et chaque sa tangente est située sur cette quadrique. Enfin, on voit que, en se déplaçant sur une courbe quelconque, différente d'une caractéristique $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$, une relation de la forme

$$M \quad \bar{\omega}\,(e_3 \quad i\,e_4) + \bar{\omega}_1\, d\,(e_3 \pm i\,e_4) + \bar{\omega}_2\, d^2\,(e_3 \quad i\,e_4) \tag{30}$$

*) Prendre les signes + ou — tous les deux.

a lieu, les $\bar{\omega}$ étant composés des ω et de leurs différentielles. Le point M est donc situé dans le plan osculateur au point $e_3 \pm i\, e_4$ de la courbe qui est le lieu de ce point.

Par suite, la surface considérée est engendrée par des points d'intersection des couples de plans osculateurs de deux courbes situées sur la quadrique (17) et telles que tous les tangentes de ces courbes sont elles-mêmes sur cette quadrique.

D'autre part, une considération facile montre que, dans l'espace projectif considéré, une courbe située sur une quadrique (non-dégénérée) et telle que chaque sa tangente est elle même sur cette quadrique, dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

Par suite, l'indétermination de la solution montre que les deux courbes, dont les plans osculateurs engendrent la surface en question, peuvent être arbitraires.

En définitive, on a le résultat suivant:

*Les surfaces générales considérées sont engendrées par des points d'intersection des couples de plans osculateurs de deux courbes situées sur la quadrique (*17)*; ces courbes peuvent être arbitraires à la condition près, que leurs tangentes sont elles mêmes sur la quadrique en question.*

2. Dans la suite, pour abréger, nous appelerons une surface plongée dans l'espace projectif à quatre dimensions *une surface (S)*, si elle peut être définie par un système d'équations différentielles de la forme (29), c étant différent de zéro. La définition géométrique d'une surface (S) est donnée par les considérations précédentes.

3. D'après ce qui precède, il est clair que, si l'on prend la quadrique (17) comme l'absolu, *chaque surface (S)**) *peut être définie d'une manière métrique et précisement comme une surface minima plongée dans un espace non-euclidien à quatre dimensions, dont l'indicatrice à chaque point est une circonférence.* Inversement,

chaque surface qui est définie de cette manière métrique détermine une surface (S).

V. La projection de la surface de Véronèse comme un cas particulier.

1. Nous allons nous poser la question si, sur une surface (S), *les caractéristiques d'une famille peuvent être des coniques.*

Supposons que, pour une surface (S), cette propriété ait lieu pour des caractéristiques $\omega_1 + i\,\omega_2 = 0$. On a, en se déplaçant sur une telle caractéristique, d'après (29)

$$\begin{aligned} d\,(e_1 + i\,e_2) &= \quad i\,\omega_{12}\,(e_1 + i\,e_2) + 2\,R\,\omega_1\,(e_3 + i\,e_4), \\ d\,(e_3 + i\,e_4) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - i\,\omega_{34}\,(e_3 + i\,e_4), \end{aligned} \tag{31}$$

*) Nous verrons qu'il n'existe pas des surfaces (S), pour lesquelles $R = 0$.

les formules, qui exprin ent que le point $e_3 + ie_4$ ainsi que la droite $[e_1 + ie_2, e_3 + ie_4]$ restent fixes. Considérons le faisceau de droites $[M, e_3 + ie_4]$ dont le centre est le point fixe $e_3 + ie_4$. En utilisant les formules (29) on trouve, en regardant qu' on suppose toujours $\omega_1 + i\omega_2 = 0$,

$$\begin{aligned} d\,[M, e_3 + ie_4] & \quad i\,\omega_{34}\,[M, e_3 + i\,e_4] + \omega_1\,[e_1 + i\,e_2, e_3 + i\,e_4], \\ d\,[e_1 + i\,e_2, e_3 + i\,e_4] & = \quad i\,(\omega_{12} + \omega_{34})\,[e_1 + i\,e_2, e_3 + i\,e_4]. \end{aligned} \tag{32}$$

Or, la tangente à la courbe, qui est le lieu du point M passant par le point $e_1 + ie_2$, on a une correspondance entre le faisceau considéré et les points sur la droite $e_1 + ie_2, e_3 + ie_4]$, dans laquelle la droite $[M, e_3 + ie_4]$ et le point $e_1 + ie_2$ se correspondent. *Pourque la courbe que décrit le point M soit une conique, il faut et il suffit que cette correspondance soit une correspondance projective.*

Pour exprimer cette condition remarquons d'abord que les formules (29) montrent, que le point M ne puisse décrire une conique que dans le cas $R \neq 0$. Cela étant, multiplions le point $e_3 + ie_4$ par $\frac{1}{2R}$, R étant la même fonction qui figure dans les formules (29). Nous aurons

$$\begin{aligned} d\,(e_1 + i\,e_2) & = \quad i\,\omega_{12}\,(e_1 + i\,e_2) + \omega_1\,(e_3 + i\,e_4), \\ d\,(e_3 + i\,e_4) & - \quad \left(\frac{dR}{R} - i\,\omega_{34}\right)(e_3 + i\,e_4). \end{aligned} \tag{33}$$

On voit donc, en comparant ces formules avec (32), *pourque la correspondance en question soit une correspondance projective, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\frac{dR}{R} + i\,(2\,\omega_{12} \quad \omega_{34}) - 0. \tag{34}$$

Or, les conditions d'intégrabilité (22) montrent que l'équation (34) est encore satisfaite si l'on se déplace sur une caractéristique de la famille $\omega_1 \quad i\,\omega_2 \quad 0$. Par suite, elle est satisfaite sur la surface identiquement.

La condition d'intégrabilité qui dérive de cette équation donne

$$3\,R^2 - c \tag{35}$$

et par suite, la formule (34) a la forme

$$2\omega_{12} - \omega_{34} - 0. \tag{36}$$

Donc, il existe, des surfaces considérées et elles sont fournies par le système complétement intégrable

$$\begin{array}{llll} \omega_3 - 0, & \omega_4 \quad 0, & & \\ \omega_{13} \quad R\,\omega_1, & \omega_{14} - R\,\omega_2, & & \\ \omega_{23} - \quad R\,\omega_2, & \omega_{24} \quad R\,\omega_1, & (i, j = 1, 2, 3, 4) & (37) \\ \quad 2\,\omega_{12} \quad \omega_{34} & & & \\ \quad \omega_{ij} + \omega_{ij} \quad 0. & & & \end{array}$$

On voit que les surfaces, qui sont définies par ces équations sont tous projectivement identiques et elles jouissent, en particulier, de la propriété que les caractéristiques de l'autre famille sont elles-mêmes des coniques.

Pourque une surface (S) jouisse de la propriété que les caractéristiques d'une famille soient des coniques il faut que les caractéristiques de l'autre famille soient elles-mêmes des coniques.) Il existe une surface et une seule (aux surfaces homographiques près) qui possède cette propriété.*

Dans la suite, nous désignerons cette surface remarquable par (V).

Remarque. Il est facile de voir qu'on arrive à la surface (V) en cherchéant *les surfaces* (S) *pour lesquelles la fonction* R *qui figure dans les formules* (29) *est une constante.*

En effet, pour une telle surface les conditions d'intégrabilité donnent immédiatement la relation (34) et celle-ci entraîne à son tour la relation (35). On retrouve ainsi le système (37).

2. Nous allons montrer que,

la surface (V) est la projection (prise d'un point non situé sur l'hypersurface des coniques dégénérées) de la surface de Véronèse et les deux courbes dont les plans osculateurs l'engendrent, se confondent dans une courbe rationnelle normale du quatrième dégré qui à son tour est située sur la surface.

En effet, envisageons les covariants bilinéaires des formes ω_1, ω_2, ω_{12}; on a

$$\omega'_1 = [\omega_2\, \omega_{12}],\quad \omega'_2 = [\omega_1\, \omega_{12}],\quad \omega'_{12} = R^2\, [\omega_1\, \omega_2]. \tag{38}$$

La dernière de ces relations montre que la surface considérée, étant regardée comme un espace de Riemann à deux dimensions, est à courbure constante. Il est donc naturel de poser

$$\omega_1 = \frac{1}{R}\, d\,\Theta,\quad \omega_2 = \frac{1}{R}\, sin\,\Theta\, d\,\varphi. \tag{39}$$

Les équations (38) donnent ensuite

$$[d\,\varphi\, \omega_{12}] = 0,\quad [d\,\Theta\, (\omega_{12} - cos\,\Theta\, d\,\varphi)] = 0;$$

on en déduit

$$\omega_{12} = cos\,\Theta\, d\,\varphi,$$

de sorte que l'on a les formules

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{R}\, d\,\Theta, & \omega_2 &= \frac{1}{R}\, sin\,\Theta\, d\,\varphi, \\ \omega_{12} &= cos\,\Theta\, d\,\varphi, & \omega_{34} &= 2\, cos\,\Theta\, d\,\varphi, \\ \omega_{13} &= d\,\Theta, & \omega_{14} &= sin\,\Theta\, d\,\varphi, \\ \omega_{23} &= -\, sin\,\Theta\, d\,\varphi, & \omega_{24} &= d\,\Theta. \end{aligned} \tag{40}$$

Tous les formes ω qui figurent dans les équations (28) sont ainsi exprimées comme des formes linéaires en $d\,\Theta$, $d\,\varphi$. Le système (28) prend la forme

*) Nous verrons dans la suite qu'en réalité, les caracteristiques des deux familles appartiennent à une même famille.

$$
\begin{aligned}
d\,M \quad & \quad \frac{1}{R}\, d\,\Theta\, e_1 \quad + \frac{1}{R}\, sin\,\Theta\, d\,\varphi\, e_2, \\
d\,e_1 &= -3\,R\,d\,\Theta\,M \qquad\qquad + cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_2 + d\,\Theta\,e_3 + sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_4, \\
d\,e_2 &- -3\,R\,sin\,\Theta\,d\,\varphi\,M - cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_1 \qquad - sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_3 + d\,\Theta\,e_4, \\
d\,e_3 &= \qquad\qquad\qquad - d\,\Theta\,e_1 + sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_2 \qquad + 2\,cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_4, \\
d\,e_4 &= \qquad\qquad\qquad - sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_1 - d\,\Theta\,e_2 - 2\,cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_3.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

On en voit, en particulier, qu'on puisse supposer $R = 1$, ce que revient à introduire la fonction $R\,M$ au lieu de M. On arrive ainsi au système simple d'équations

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial \Theta} &= \qquad e_1, & \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= \qquad sin\,\Theta\,e_2, \\
\frac{\partial e_1}{\partial \Theta} &= -3M \qquad + e_3, & \frac{\partial e_1}{\partial \varphi} &= \qquad cos\,\Theta\,e_2 \qquad + sin\,\Theta\,e_4 \\
\frac{\partial e_2}{\partial \Theta} &= \qquad\qquad e_4, & \frac{\partial e_2}{\partial \varphi} &= -3\,sin\,\Theta\,M - cos\,\Theta\,e_1 \quad - sin\,\Theta\,e_3, \\
\frac{\partial e_3}{\partial \Theta} &= -\,e_1, & \frac{\partial e_3}{\partial \varphi} &= \qquad sin\,\Theta\,e_2 \qquad + 2\,cos\,\Theta\,e_4, \\
\frac{\partial e_4}{\partial \Theta} &= \qquad -\,e_2 & \frac{\partial e_4}{\partial \varphi} &= \quad - sin\,\Theta\,e_1 \quad - 2\,cos\,\Theta\,e_3,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

dont l'integration peut s'accomplir sans aucune espèce de difficultés. On obtient

$$
\begin{aligned}
M &= k_{00}\,2\,cos\,2\,\varphi\,sin^2\,\Theta + k_{11}\,(1 + 3\,cos\,2\,\Theta) + k_{01}\,2\,sin^2\,\Theta\,sin\,2\,\varphi + \\
&\qquad + k_{02}\,sin\,2\,\Theta\,cos\,\varphi + k_{12}\,sin\,2\,\Theta\,sin\,\varphi, \\
e_3 \quad i\,e_4 &= k_{00}\,(3\,cos\,2\,\varphi + cos\,2\,\varphi\,cos\,2\,\Theta \mp 4\,i\,sin\,2\,\varphi\,cos\,\Theta) + \\
&\quad + k_{11}\,3\,(1 - cos\,2\,\Theta) + k_{01}\,(3\,sin\,2\,\varphi + sin\,2\,\varphi\,cos\,2\,\Theta \pm \\
&\quad \pm 4\,i\,cos\,2\,\varphi\,cos\,\Theta) + k_{02}\,(\pm 2\,i\,sin\,\varphi\,sin\,\Theta - cos\,\varphi\,sin\,2\,\Theta) - \\
&\quad - k_{12}\,(\pm 2\,i\,cos\,\varphi\,sin\,\Theta + sin\,\varphi\,sin\,2\,\Theta),
\end{aligned}
\tag{43}
$$

et des autres formules pour e_1, e_2 qui est inutile à écrire. Dans ces équations les k sont des constantes arbitraires et on voit que les coordonnées du point M par rapport à un système de référence fixe sont données par les formules

$$
\begin{aligned}
y_{00} &= \frac{1}{2}\,cos\,2\,\varphi\,sin^2\,\Theta, \\
y_{11} &= \frac{1}{4}\,(1 + 3\,cos\,2\,\Theta), \\
y_{01} &= \frac{1}{2}\,sin\,2\,\varphi\,sin^2\,\Theta, \\
y_{02} &= \frac{1}{2}\,cos\,\varphi\,sin\,2\,\Theta, \\
y_{12} &= \frac{1}{2}\,sin\,\varphi\,sin\,2\,\Theta.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Or, en posant

$$u = \cos\varphi \sin\Theta, \quad v = \sin\varphi \sin\Theta, \quad w = \cos\Theta, \tag{45}$$

les formules (44) prennent la forme

$$y_{00} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),\; y_{11} = w^2 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2),\; y_{01} = uv,\; y_{02} = uw,\; y_{12} = vw. \tag{46}$$

C'est bien la projection de la surface de Véronèse qui est réprésentée par ces formules.

Pour voir que *c'est la projection prise d'un point non situé sur l'hypersurface des coniques dégénérées,* plaçons nous pour le moment dans espace projectif à cinq dimensions S_5 et considérons la surface de Véronèse. En prennant convenablement le système de référence, elle est donnée par les formules

$$x_{00} = u^2,\; x_{11} = v^2,\; x_{22} = w^2,\; x_{01} = uv,\; x_{02} = uw,\; x_{12} = vw \tag{47}$$

et avec le même système de référence, l'équation de l'hypersurface des coniques dégénérées est

$$|x_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2;\; x_{ik} = x_{ki}).$$

Or, en changeant le système de référence de manière à avoir

$$\begin{aligned} &y_{00} = \frac{1}{2}(x_{00} - x_{11}), \quad y_{11} = -\frac{1}{2}(x_{00} + x_{11}) + x_{22}, \quad y_{22} = x_{00} + x_{11} + x_{22}, \\ &y_{01} = x_{01}, \qquad y_{02} = x_{02}, \qquad y_{12} = x_{12} \end{aligned} \tag{48}$$

on voit que, dans S_5, les formules (46) réprésentent le cône projetant la surface de Véronèse du point (P) $x_{00} : x_{11} : x_{22} : x_{01} : x_{02} : x_{12} = 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0$ et que ce sont, dans l'hyperplan (Π) $x_{00} + x_{11} + x_{22} = 0$ les équations de la projection de la surface de Véronèse. On vérifie immédiatement que le point (P) n'est pas situé sur l'hypersurface des coniques dégénérées.

3. Pour trouver les équations des courbes que décrivent les points $e_3 + i\,e_4$, considérons la dernière des formules (43) et rappelons que le paramètre sur la courbe qui est lieu du point $e_3 \pm i\,e_4$ est une intégrale première de l'équation

$$d\Theta \pm i \sin\Theta\, d\varphi = 0. \tag{49}$$

On obtient par un calcul facile, pour les coordonnées de ces deux courbes, par rapport au même système de référence, auquel sont rapportées les coordonnées du point M,

$$\begin{aligned} y_{00} : y_{11} : y_{01} : y_{02} : y_{12} &= t^4 + 1 : 6t^2 : i\,(t^4 - 1) : -2t\,(t^2 - 1) : -2it\,(t^2 + 1), \\ y_{00} : y_{11} : y_{01} : y_{02} : y_{12} &= t^4 + 1 : 6t^2 : -i\,(t^4 - 1) : -2t\,(t^2 - 1) : 2\,it\,(t^2 + 1). \end{aligned} \tag{50}$$

Si l'on écrit dans la deuxième de ces équations $-\dfrac{1}{t}$ au lieu de t et ensuite, que l'on multiplie les coordonnées de la courbe correspondante par t^4, on trouve bien que *les deux courbes en question se confondent dans une courbe rationnelle normale du quatrième dégré.*

Or, si l'on pose dans les formules (46)

$$u = -(t^2 - 1), \ v = \mp i \ (t^2 + 1), \ w = 2t, \tag{51}$$

on trouve bien que *la courbe en question est située sur la surface.*

L'hypothèse proposée est ainsi complétement établie.

4. Les résultats précédents entraînent évidement une construction de la projection de la surface de Véronèse:

La projection (prise d'un point non situé sur l'hypersurface des coniques dégénérées) de la surface de Véronèse est engendrée par des points d'intersection des couples de plans osculateurs d'une courbe rationelle normale du quatrième dégré qui est située sur la surface.

Nous allons démontrer que,

cette construction n'est possible que d'une seule manière; c'est-à-dire, il existe sur la surface une seule courbe rationnelle normale du quatrième dégré telle que les points d'intersection des couples de plans osculateurs de cette courbe engendrent la surface en question.

Pour le démontrer, choisissons, le système de référence de manière à écrire les équations de la surface sous la forme (46); ensuite, les équations (50) réprésentent une courbe rationnelle normale du quatrième dégré (C) qui est située sur la surface et dont les couples de plans osculateurs engendrent la surface en question.

Supposons qu'il existe sur la surface considérée une courbe rationnelle normale du quatrième dégré (C') *distincte de* (C) telle que, la surface puisse être définie comme le lieu des points d'intersection des couples de plans osculateurs de cette courbe.

Ensuite, il existe une transformation projective T qui transforme la courbe (C) en (C') et le point d'intersection d'un couple quelconque de plans osculateurs de la courbe (C) au point d'intersection du couple de plans osculateurs correspondant de la courbe (C'). Par suite, par cette transformation projective la surface considérée se transforme en elle-même.

Envisageons la représentation de la surface considérée sur un plan π comme elle est donnée par les formules (46). Les seconds membres des formules (46) réprésentent, égalés à zéro, des coniques indépendantes dont chaquune est apolaire à la conique $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. *Cette conique est* à son tour *la seule conique, qui est apolaire* à *tous les coniques qui correspondent aux seconds membres des formules* (46) et les formules (51) montrent qu'elle est l'image de la courbe (C). Or, à la transformation T de la surface en elle-même correspond une transformation du plan π en lui-même. Cette transformation est une transformation projective. En effet, la transformation T faisant correspondre aux coniques de la surface des coniques et d'autre part, l'image d'une conique de la surface étant dans le plan π une droite, la corrospondance dans le plan π transforme les droites, qui correspondent aux coniques de la surface, aux droites et comme chaque droite du plan π correspond à une conique de la surface, la transformation du plan π en question est une transformation projective. Par suite, l'image de la courbe (C') dans le plan π est *une conique, distincte de* $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ *qui est* nécéssairement, *elle aussi, apolaire à tous les coniques qui sont déterminées par les seconds membres des formules* (46); on a donc une contradiction.

5. Nous voulons encore complèter les résultats précédents par la remarque suivante:

Si l'on se place dans l'espace projectif à cinq dimensions et que l'on considère les équations de la surface de Véronèse sous la forme (48), les x étant donnés par (47), on voit d'abord que la conique $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ est l'image de la courbe d'intersection de la surface de Véronèse par l'hyperplan (π) $x_{00} + x_{11} + x_{22} = 0$. On voit de plus que cet hyperplan et le point (P) $x_{00} : x_{11} : x_{22} : x_{01} : x_{02} : x_{12} = 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0$ sont conjugués par rapport à l'hypersurface des coniques dégénérées. On trouve ainsi le théorème suivant:

Les points d'intersection des couples de plans osculateurs de la courbe d'intersection de la surface de Véronèse avec un hyperplan général engendrent la projection de la surface de Véronèse sur l'hyperplan considéré, prise du point qui est conjugué à cet hyperplan par rapport à l'hypersurface des coniques dégénérées.

6. Reprennons le point de vue métrique. La surface (V) étant une surface (S), elle peut être définie d'une manière métrique et précisement comme une surface minima plongée dans un espace non-euclidien à quatre dimensions, dont l'indicatrice de la courbure à chaque point est une circonférence. Parmi les surfaces (S) elle est *caractérisée*, du point de vue métrique, par la propriété que le rayon de l'indicatrice soit le même à chaque point de la surface (voir p. 16); autrement dit, *c'est la surface minima unique qui jouit de la propriété d'avoir le même rayon de l'indicatrice* à *chaque point de la surface. D*'après (35) *il subsiste une relation entre le rayon de l'indicatrice et la courbure de l'espace ambiant la surface en question*; en particulier, *pourque le rayon de l'indicatrice soit réel il faut que la courbure de l'espace soit positive.*

7. Nous allons encore eclaircir quelle est la quadrique (non-dégénérée) qui définit la métrique en question.

D'après ce qui precède, nous savons, que *la quadrique en question contient la courbe rationnelle normale du quatrième dégré dont les plans osculateurs engendrent la surface en question et, de plus, qu'elle contient chaque tangente de cette courbe.*

Or, il est facile de voir que,

dans espace projectif à quatre dimensions, une courbe rationnelle normale du quatrième dégré étant donnée, il existe une quadrique (non dégénérée) et une seule, qui contient cette courbe et chaque sa tangente.

En effet, prenons dans l'espace projectif à quatre dimensions une courbe rationnelle normale du quatrième dégré (C) et écrivons ses équations sous la forme

$$z_{00} = t^4, \quad z_{11} = t^3, \quad z_{01} = t^2, \quad z_{02} = t, \quad z_{12} = 1. \tag{52}$$

On deduit de ces équations les quadriques

$$\begin{aligned} z_{00}\,z_{01} - z_{11}^2 = 0, \quad z_{00}\,z_{02} - z_{11}\,z_{01} &= 0, \quad z_{00}\,z_{12} - z_{11}\,z_{02} = 0, \\ z_{11}\,z_{02} \quad z_{01}^2 &= 0, \quad z_{11}\,z_{12} - z_{01}\,z_{02} = 0, \\ & \quad z_{01}\,z_{12} - \; z_{02}^2 \; = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

dont chaque contient la courbe considérée. Ces quadriques sont indépendantes et par suite elles déterminent un système linéaire à cinq dimensions

$$\begin{aligned} \lambda_0(z_{00}\,z_{01} - z_{11}^2 + \lambda_1\,(z_{00}z_{02} - z_{11}\,z_{01}) + \lambda_2\,(z_{00}z_{12} - z_{11}z_{02} + \lambda_3\,(z_{11}z_{02} - z_{01}^2) + \\ + \lambda_4\,(z_{11}\,z_{12} - z_{01}z_{02}) + \lambda_5\,(z_{01}\,z_{12} - z_{02}^2) = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Chaque quadrique de ce système contient la courbe (C) et inversement, on sait que, chaque quadrique qui contient la courbe (C) appartient à ce système.

Ecrivons les conditions auxquelles doivent satisfaire les λ pourque la quadrique correspondante du système (54) contienne chaque tangente de la courbe (C).

Or, pour chaque valeur t, les points $(t^4, t^3, t^2, t, 1)$ et $(4\,t^3, 3t^2, 2t, 1, 0)$ étant conjugués par rapport à n'import quelle quadrique du système (54) *pourque une quadrique du système* (54) *contienne chaque tangente de la courbe (C) il faut et il suffit qu'elle contienne la courbe* $(4t^3, 3t^2, 2t, 1, 0)$.

Par suite, les conditions nécésasires et suffisantes pour les λ sont

$$\begin{aligned} 3\,\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 &= 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Il existe donc une quadrique et une seule qui contient la courbe (C) et chaque sa tangente et elle est donnée par l'équation

$$z_{00}\,z_{12} - 4\,z_{11}\,z_{02} + 3\,z_{01}^2 = 0. \tag{56}$$

Si l'on définit la courbe (C) par les équations (50), on trouve que la quadrique correspondante est donnée par l'équation

$$y_{00}^2 + y_{01}^2 + y_{02}^2 + y_{12}^2 + \frac{1}{3}\,y_{11}^2 = 0. \tag{57}$$

Par rapport à la surface (V) la quadrique absolue est ainsi parfaitement déterminée.

8. Nous remarquons qu'une considération simple montre qu'on peut encore définir la quadrique en question de la manière suivante:

C'est la projection de la première polaire de l'hypersurface des coniques dégénérées associée au centre de la projection.

* * *

Remarque. Ce Mémoire se trouvait actuellement sous presse, quand j'ai appris d'une lettre de M. E. Bompiani que le résultat que, dans l'espace projectif à quatre dimensions, le lieu des points d'intersection des couples de plans osculateurs d'une courbe rationnelle normale du quatrième degré est la projection de la surface de Véronèse, ne soit pas nouvel. Ce résultat a été trouvé (probablement pour la première fois) par M. G. Castelnuovo (*Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni;* Atti del R. Instituto Veneto di scienze, lettere ed arti (1891) t. II. s. 7.).