VII.

# VÝZNAM VYROVNÁNÍ METHODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ.

**1. Význam výsledků vypočtených podle methody nejmenších čtverců, řídí-li se měřické chyby normálním zákonem četnosti.** Ve II. kapitole jsme vyložili první Gaussovo zdůvodnění methody nejmenších čtverců. Viděli jsme (II, 2), že jsme oprávněni užíti k vyrovnání měřických výsledků methody nejmenších čtverců vždy, kdykoli je platný postulát aritmetického průměru, t. j. je-li aritmetický průměr z výsledků přímých a stejně přesných měření v každém případě nejpravděpodobnější hodnotou a má-li mimo to funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i$ tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

Protože z postulátu aritmetického průměru a z okolnosti, že funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i$ má tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$ plyne, že se chyby zatěžující měření řídí normálním zákonem chyb, předpokládají výklady v kapitole II až IV, že se chyby zatěžující měření řídí tímto zákonem chyb.

V tom případě je mezi střední a pravděpodobnou chybou vztah

$$r = m \,.\, 0{,}67449 \doteq \tfrac{2}{3} m$$

(srovn. I, (31)). K odhadu přesnosti měření a vyrovnaných výsledků lze v tomto případě užívati buď střední nebo pravděpodobné chyby. Při deseti měřeních (při 200, 8000 měřeních) lze pak považovati za extrémní možnou chybu přibližně $\pm\, 2m$ ($\pm\, 3m$, $\pm\, 4m$) (srovn. I, 8).

Řídí-li se chyby zatěžující měření normálním zákonem chyb, jsou hodnoty neznámých, vypočtené podle methody nejmenších čtverců, nejpravděpodobnější hodnoty, jež plynou z výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (srovn. na př. (III, 1)). Současně mají takto vypočtené hodnoty nejmenší střední chyby nebo největší váhy ze všech lineárních celistvých funkcí výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (srovn. VII, 3).

Extrémní možné chyby vymezují pak obory, uvnitř nichž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých výsledných hodnot.

**2. Kdy se řídí měřické chyby normálním zákonem četnosti?** Nyní budeme uvažovati o otázce, kdy se měřické chyby řídí normálním zákonem četnosti. Uvedeme některé okolnosti, jež přispívají k jejímu objasnění.

a) Tážeme se, kdy je platný postulát aritmetického průměru. [V takovém případě se budou měřické chyby říditi normálním zákonem chyb, má-li ovšem mimo to funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i$ tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.]

Postulát aritmetického průměru je na př. platný, jsou-li splněny tyto jednodušší předpoklady:

I. Zvětší-li se naměřené hodnoty $k$-násobně (vyjádří-li se v jednotce $k$-krát menší), zvětší se $k$-násobně i nejpravděpodobnější hodnota z nich odvozená. Jsou-li naměřené hodnoty $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ a označíme-li nejpravděpodobnější hodnotu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, má býti

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

což znamená, že $f$ jest homogenní funkce prvního stupně*).

II. Zvětší-li se všechny naměřené hodnoty o totéž číslo, zvětší se o totéž číslo i nejpravděpodobnější hodnota z nich odvozená, t. j. volba počátku měřítka posouvá nejpravděpodobnější hodnotu stejně jako naměřené hodnoty:

$$f(x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_n + h) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h.$$

III. Všechna měření, protože jsou stejně přesná, přispívají stejně k vytváření výsledku, takže chyba $\varepsilon$ má stejný vliv na nejpravděpodobnější hodnotu, ať zatěžuje kteroukoli z naměřených hodnot.

Zatěžuje-li chyba $\varepsilon$ naměřenou hodnotu $x_i$, je její vliv na výsledek roven

*) J. Vojtěch, l. c. str. 389. — K. Petr, l. c. str. 324.

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \ldots,$$

jak plyne z rozvoje

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \varepsilon, \ldots, x_n) - f(x, x_2, \ldots, x_n)$$

podle věty Taylorovy.

Z II. předpokladu plyne, rozvineme-li podle $h$ v řadu Taylorovu $f(x_1 + h, \ldots, x_n + h)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \ldots =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h,$$

a srovnáme-li koeficienty u $h$, tento vztah:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 1. \tag{1}$$

Podle III. předpokladu, podle něhož má býti

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \ldots$$

stejné pro jakékoli $i$, musí býti

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a tedy podle (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Z I. předpokladu plyne podle Eulerovy věty

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a podle (2) plyne odtud

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Tato úvaha Schiaparelliho*) předpokládá mlčky spojitost funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a jejích prvních derivací.

Jestliže tedy jsou splněny uvedené jednodušší předpoklady o vlastnostech nejpravděpodobnější hodnoty, odvozené z naměřených hodnot, platí postulát aritmetického průměru. To v sobě zahrnuje, že se měřické chyby řídí normálním zákonem chyb a že jsme oprávněni vyrovnávati podle methody nejmenších čtverců, zase ovšem za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i$ má tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

*

Závisí-li funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i = x - x_i$ nejen na rozdílu $\varepsilon_i = x - x_i$, nýbrž má-li obecnější tvar $\varphi(x_i, x)$, dá se ukázati, že postulát aritmetického průměru vede k obecnější funkci četnosti. Podle Poincarého**) lze to dokázati takto:

Je-li skutečná hodnota měřené veličiny $x$, nechť je pravděpodobnost, že výsledek pozorování byl mezi $x_1$ a $x_1 + dx_1$, rovna $\varphi(x_1, x)\, dx_1$. Dále nechť pravděpodobnost a priori, že veličina $x$ je mezi $x$ a $x + dx$, je rovna $\psi(x)\, dx$. V nejjednodušším případě, máme-li důvod předpokládati, že všechny hodnoty $x$ v určitých mezích jsou a priori stejně pravděpodobné, přešla by funkce $\psi(x)$ v konstantu $C$.

Podle pravidla o násobení pravděpodobností je pravděpodobnost, že výsledky nezávislých pozorování jsou v mezích od $x_1$ do $x_1 + dx_1$, od $x_2$ do $x_2 + dx_2$, ... a od $x_n$ do $x_n + dx_n$, a je-li měřená veličina $x$, rovna

$$\varphi(x_1, x)\, \varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Pravděpodobnost, že měřená veličina je v mezích od $x$ do $x + dx$ a při tom že výsledky měření jsou v uvedených mezích, bude podle pravidla o násobení pravděpodobností rovna

*) P. Pizzetti, l. c. str. 88—89. — E. Czuber, l. c. str. 31 až 33.

**) H. Poincaré: Calcul des probabilités, 2. éd., Paris 1912, str. 169—176.

$$p = \psi(x)\,\mathrm{d}x\,.\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Podle pravidla o součtu pravděpodobností bude pravděpodobnost, že výsledky měření jsou v uvedených mezích a že měřená veličina může míti jakoukoli hodnotu v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, rovna integrálu

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže nastal případ, že výsledky měření jsou v uvedených mezích, a označíme-li pravděpodobnost (a posteriori), že měřená veličina je při tom v mezích od $x$ do $x + \mathrm{d}x$, písmenem $P$, můžeme podle pravidla o násobení pravděpodobností psáti

$$p = P\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$P = \frac{\psi(x)\,\mathrm{d}x\,.\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x}.$$

Podle Gausse zavádí se k určení veličiny $x$ podmínka, aby pravděpodobnost $P$ byla maximální pro

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

to značí, aby pro toto $x$ byl maximální výraz $\psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,.$ $.\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x)$, nebo, což vede k stejnému výsledku, výraz

$$\lg\psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x)\ldots\varphi(x_n, x).$$

Podmínka pro extrém je

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi'(x_1, x)}{\varphi(x_1, x)} + \frac{\varphi'(x_2, x)}{\varphi(x_2, x)} + \ldots + \frac{\varphi'(x_n, x)}{\varphi(x_n, x)} = 0.$$

Píšeme-li

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \chi(x), \quad \frac{\varphi'(x_i, x)}{\varphi(x_i, x)} = F(x_i, x),$$

je předcházející podmínka

$$F(x_1, x) + F(x_2, x) + \ldots + F(x_n, x) + \chi(x) = 0. \tag{3}$$

Tato podmínka má býti identická s podmínkou

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx. \tag{3'}$$

Zavedeme místo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po řadě $x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, \ldots, x_n + \mathrm{d}x_n$, kde přírůstky $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ jsou takové, že $x$ zůstane nezměněné. To znamená, že z podmínky (2) plyne

$$\frac{\partial F(x_1, x)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial F(x_2, x)}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial F(x_n, x)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = 0,$$

a z podmínky (3')

$$\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 + \ldots + \mathrm{d}x_n = 0.$$

Protože tyto rovnice mají býti identické, musí býti

$$\frac{\partial F(x_1, x)}{\partial x_1} = \frac{\partial F(x_2, x)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial F(x_n, x)}{\partial x_n} = A'(x),$$

funkce jen proměnné $x$, a odtud

$$F(x_i, x) = A'(x)\, x_i + B'(x).$$

Podmínka (2) pro extrém je tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \{A'(x)\, x_i + B'(x)\} + \chi(x) = 0,$$

čili

$$A'(x) \sum_{i=1}^{n} x_i + n\, B'(x) + \chi(x) = 0.$$

Zavedeme-li sem $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx$, bude

$$n\,\{x\, A'(x) + B'(x)\} + \chi(x) = 0. \tag{4}$$

Protože tato podmínka má býti splněna pro každé $n$ a pro každé $x$, musí

$$\chi(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = 0,$$

tedy $\psi(x)$ musí býti rovno konstantě a mezi funkcemi $A'$ a $B'$ musí býti vztah

$$x\, A'(x) + B'(x) = 0. \tag{5}$$

Pak z rovnice

$$\frac{\varphi'(x_i, x)}{\varphi(x_i, x)} = \frac{\partial}{\partial x} \lg \varphi(x_i, x) = A'(x)\, x_i + B'(x)$$

plyne (je-li $\mathrm{d}A : \mathrm{d}x = A'$, $\mathrm{d}B : \mathrm{d}x = B'$) integrací

$$\lg \varphi(x_i, x) = A(x)\, x_i + B(x) + \lg \Theta(x_i),$$

čili

$$\varphi(x_i, x) = \Theta(x_i)\, e^{A(x)x_i + B(x)}. \tag{6}$$

Zde jsou dvě funkce $\Theta(x_i)$ a $A(x)$ libovolné, funkce $B$ vychází pak z podmínky (5).

To tedy vyplývá z Gaussovy podmínky, aby — jsou-li výsledky měření $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — byla nejpravděpodobnější hodnota rovna aritmetickému průměru. Jak je viděti, jest normální funkce četnosti

$$\varphi(x - x_i) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(x - x_i)^2}$$

jen zvláštním případem obecného vzorce (6).

b) Je-li skutečná chyba nějaké veličiny rovna lineární funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí normálním zákonem chyb, řídí se normálním zákonem i chyba uvažované veličiny.

Budeme předpokládati, že částečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ se řídí normálním zákonem, t. j. pravděpodobnost, že $\varepsilon_i$ je v intervalu $< \Delta, \Delta + \mathrm{d}\Delta >$, jest

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_i^2 \Delta^2}\, \mathrm{d}\Delta.$$

Tážeme se, jaká je pravděpodobnost, že chyba $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od $\varepsilon$ do $\varepsilon + d\varepsilon$?

Pravděpodobnost, že chyby $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nabudou současně hodnot $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, jest

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2)} \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n. \qquad (7)$$

A pravděpodobnost, že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ nabude hodnoty v mezích od $E_1$ do $E_2$, bude rovna integrálu výrazu (7), při čemž integrační obor je takový, že

$$E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2.$$

Abychom provedli tuto integraci, násobíme nejprve výraz (7) integrálem

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{E_1}^{E_2} d\tau \, e^{i\Theta(\tau - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2 - \ldots - \lambda_n\varepsilon_n)}, \qquad (8)$$

o němž víme, že je rovný 1, pokud $E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + + \lambda_n\varepsilon_n < E_2$, a je roven 0, když $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ neleží uvnitř těchto mezí. Pak můžeme integrovati výsledný výraz v celém oboru všech proměnných, neboť omezení oboru nerovninou

$$E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2$$

je provedeno tím, že jsme násobili integrálem (8).

Hledaná pravděpodobnost tedy bude

$$P = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{E_1}^{E_2} d\tau \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \ldots$$

$$\ldots d\varepsilon_n \, e^{i\Theta(\tau - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2 - \ldots - \lambda_n\varepsilon_n) - h_1^2\varepsilon_1^2 - h_2^2\varepsilon_2^2 - \ldots - h_n^2\varepsilon_n^2}.$$

Integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_i e^{i\Theta(-\lambda_i\varepsilon_i) - h_i^2\varepsilon_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \Theta\lambda_i\varepsilon_i - i \sin \Theta\lambda_i\varepsilon_i) \, e^{-h_i^2\varepsilon_i^2} d\varepsilon_i =$$

$$= 2 \int_0^\infty \cos \Theta \lambda_i \varepsilon_i e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} \, d\varepsilon_i,$$

a protože

$$\int_0^\infty e^{-Ax^2} \cos hx \, dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{A} e^{-\frac{1}{4} h^2 : A},$$

bude předcházející integrál roven

$$\frac{\sqrt{\pi}}{h_i} e^{-\Theta^2 \lambda_i^2 : 4 h_i^2},$$

tedy

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{E_1}^{E_2} e^{i\Theta\tau - \frac{\Theta^2}{4}\left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1}^{E_2} d\tau \; 2 \int_0^\infty e^{-\frac{\Theta^2}{4}\left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)} \cos \Theta\tau \, d\Theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1}^{E_2} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}} \cdot e^{-\tau^2 : \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)} d\tau.$$

Pravděpodobnost, že chyba $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od $\varepsilon$ do $\varepsilon + d\varepsilon$, jest tedy

$$\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}} e^{-\varepsilon^2 : \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)}.$$

Srovnáme-li tento výraz s výrazem pro normální zákon, vidíme, že chyba $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ se řídí rovněž normálním zákonem, jenže míra přesnosti je nyní

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}},$$

čili

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}. \qquad (9)$$

A protože mezi mírou přesnosti $h_i$ a střední chybou $m_i$ je vztah

$$m_i h_i = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

plyne pro čtverec $M^2$ střední hodnoty chyby $\varepsilon$ vzorec

$$M^2 = \lambda_1^2 m_1^2 + \lambda_2^2 m_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 m_n^2 \qquad (10)$$

[viz I, (12″)].

Užití.

$\alpha$) V odstavci II, 4 byl dokázán vztah (15) mezi odchylkami $v_i$ a skutečnými chybami $\varepsilon_i$. V případě stejných vah přejde onen vztah ve vzorec

$$v_i = \frac{1}{n}\{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots + (n-1)\,\varepsilon_i - \ldots - \varepsilon_n\}.$$

Protože tedy odchylky $v_i$ se dají vyjádřiti jako lineární funkce skutečných chyb $\varepsilon$, je podle právě dokázaného patrno:

Řídí-li se skutečné chyby normálním zákonem četnosti, řídí se odchylky od aritmetického průměru rovněž normálním zákonem a naopak, neřídí-li se odchylky od aritmetického průměru normálním zákonem, neřídí se jím aspoň některá ze skutečných chyb (kdyby se jím řídily všecky skutečné chyby, musely by se jím říditi i odchylky od aritmetického průměru).

Označíme-li $\begin{cases} h \\ h' \end{cases}$ míru přesnosti pro $\begin{cases} \text{skutečné chyby} \\ \text{odchylky} \end{cases}$, bude podle vzorce (9)

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{n-1}{n^2h^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2h^2} = \frac{n-1}{nh^2},$$

čili

$$h' = h\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Tedy pravděpodobnost, že odchylka $v$ je v mezích od $v$ do $v + dv$, bude

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2v^2} dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, e^{-\frac{h^2nv^2}{n-1}} dv.$$

$\beta$) Všimněme si trojúhelníkové sítě. Měřené úhly trojúhelníka označíme $A, B, C$. Součet úhlů podle měření je $A + B + C$. Protože známe, jaký tento součet má býti (180 $+ \varepsilon'$, kde $\varepsilon'$ je nadbytek uvažovaného trojúhelníka), známe skutečnou chybu $\varepsilon$ v uzávěru trojúhelníka, t. j.

$$\varepsilon = 180 + \varepsilon' - (A + B + C).$$

Označíme-li skutečné chyby v jednotlivých úhlech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, jest

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Z předcházejícího výsledku je patrno: Řídí-li se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ normálním zákonem četnosti, řídí se jím i chyba v uzávěru a naopak, neřídí-li se chyba v uzávěru normálním zákonem, neřídí se jím aspoň některá z chyb v měřených úhlech.

Je-li

$\left\{\begin{array}{l} h \\ h' \end{array}\right.$ míra přesnosti pro $\left\{\begin{array}{l} \text{skutečné chyby úhlů } A, B, C, \\ \text{chybu v uzávěru trojúhelníka } ABC, \end{array}\right.$

bude podle vzorce (9)

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{3}{h^2} \quad \text{čili} \quad h' = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Tedy pravděpodobnost, že chyba $\varepsilon$ je v mezích od $\varepsilon$ do $\varepsilon + d\varepsilon$, bude

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Označíme-li střední chybu měřeného úhlu písmenem $m$ a střední hodnotu chyby v uzávěru písmenem $M$, plyne ze vzorce (10)

$$M^2 = 3m^2 \quad \text{čili} \quad m = \frac{M}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

A vypočteme-li podle vzorce I, (10′)

$$M^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

kde $n$ je počet chyb v uzávěrech, bude

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{3n}}. \tag{11'}$$

c) Podobně jako v odstavci b) uvažujeme o obecnějším případu,*) kdy skutečná chyba nějaké veličiny je rovna lineární funkci $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ částečných chyb $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, při čemž $\varepsilon_i$ se řídí zákonem četnosti $\varphi_i(\varepsilon_i)$. (Pro různá $i$ mohou býti funkce $\varphi_i$ různé.)

Pravděpodobnost, že chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ nabudou současně hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, jest

$$\varphi_1(\varepsilon_1)\,\varphi_2(\varepsilon_2)\ldots\varphi_n(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n. \tag{12}$$

A pravděpodobnost, že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ má hodnotu mezi $w_1$ a $w_2$, bude rovna integrálu výrazu (12), při čemž obor je takový, že

$$w_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < w_2.$$

Stejně jako v odstavci b) bude tedy pravděpodobnost $P$, že celková chyba $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od $w_1$ do $w_2$, rovna

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 168—173.

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{w_1}^{w_2} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta(\tau-\lambda_1\varepsilon_1-\lambda_2\varepsilon_2\dots-\lambda_n\varepsilon_n)}.$$

$$\cdot\, \varphi_1(\varepsilon_1)\, \varphi_2(\varepsilon_2) \dots \varphi_n(\varepsilon_n)\, \mathrm{d}\varepsilon_1\, \mathrm{d}\varepsilon_2 \dots \mathrm{d}\varepsilon_n.$$

Píšeme-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Theta x}\, \varphi_r(x)\, \mathrm{d}x = \Omega_r(\Theta),$$

bude

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{w_1}^{w_2} e^{i\Theta\tau}\, \Omega_1(\lambda_1\Theta)\cdot\Omega_2(\lambda_2\Theta) \dots \Omega_n(\lambda_n\Theta)\, \mathrm{d}\tau.$$

Uvážíme-li, že

$$\int_{w_1}^{w_2} e^{i\Theta\tau}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{i\Theta}\,(e^{i\Theta w_2} - e^{i\Theta w_1}),$$

a zavedeme-li označení $\Omega(\Theta) = \Omega_1(\lambda_1\Theta)\, \Omega_2(\lambda_2\Theta) \dots \Omega_n(\lambda_n\Theta)$, jest

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(\Theta)}{i\Theta}\,(e^{i\Theta w_2} - e^{i\Theta w_1})\, \mathrm{d}\Theta.$$

Pravděpodobnost $P'$, že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ je mezi $\varepsilon$ a $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, bude

[protože $\frac{1}{i\Theta}\,(e^{i\Theta(\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon)} - e^{i\Theta\varepsilon}) = \frac{1}{i\Theta}\, e^{i\Theta\varepsilon}\,(e^{i\Theta\mathrm{d}\varepsilon} - 1) \doteq e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\varepsilon$]

$$P' = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta)\, e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\Theta,$$

tedy rovna $\varphi(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon$, kde

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta)\, e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\Theta. \tag{13}$$

Zavedeme označení

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi_r(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Pak podle definice $\Omega_r(\Theta)$ bude

$$\Omega_r(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Theta x}\,\varphi_r(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{i\Theta x}{1!} - \frac{(\Theta x)^2}{2!} + \frac{i(\Theta x)^3}{3!} + \frac{(\Theta x)^4}{4!} - \ldots\right)\varphi_r(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 1 - i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2!}s_2 + \frac{i\Theta^3}{3!}s_3 + \frac{\Theta^4}{4!}s_4 + \ldots$$

Odtud

$$\lg \Omega_r(\Theta) = \lg\left(1 - i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2!}s_2 + \frac{i\Theta^3}{3!}s_3 + \frac{\Theta^4}{4!}s_4 + \ldots\right) =$$

$$= -i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2}(-s_1^2 + s_2) + \frac{i\Theta^3}{3!}(s_3 - 3s_1s_2 + 2s_1^3) +$$

$$+ \frac{\Theta^4}{4!}(s_4 - 4s_1s_3 - 3s_2^2 + 12s_1^2s_2 - 6s_1^4) + \ldots =$$

$$= -i\Theta p_1 - \frac{\Theta^2}{2!}p_2 + \frac{i\Theta^3}{3!}p_3 + \frac{\Theta^4}{4!}p_4 + \ldots,$$

kde

$$p_1 = s_1, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} s_1, & 1 \\ s_2, & s_1 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0 \\ s_2, & s_1, & 1 \\ s_3, & s_2, & 2s_1 \end{vmatrix},$$

$$p_4 = -\begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0 \\ s_2, & s_1, & 1, & 0 \\ s_3, & s_2, & 2s_1, & 1 \\ s_4, & s_3, & 3s_2, & 3s_1 \end{vmatrix}.$$

Veličině $p_k$ se říká seminvariant řádu $k$ nebo $k$-tý seminvariant. Uvážíme-li, že

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^{n} \lg \Omega_h(\lambda_h \Theta),$$

vidíme, že na př. pro součet odchylek $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ bude

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^{n} \lg \Omega_h(\Theta) =$$

$$= -i\Theta \sum p_1 - \frac{\Theta^2}{2!} \sum p_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} \sum p_3 + \ldots,$$

čili, že lze psáti

$$\lg \Omega(\Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \ldots,$$

kde $P_k$ je rovno součtu $k$-tých seminvariantů jednotlivých odchylek. Uvažujeme-li celkovou chybu $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1$, jest

$$\lg \Omega(\Theta) = \lg \Omega_1(\lambda_1 \Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \ldots =$$

$$= -i\lambda_1 \Theta p_1 - \frac{\lambda_1^2 \Theta^2}{2!} p_2 + \frac{i\lambda_1^3 \Theta^3}{3!} p_3 + \ldots$$

V tomto případě je tedy $P_k$ rovno $k$-tému seminvariantu chyby $\varepsilon_1$, násobenému $\lambda_1^k$.

Obecně, je-li $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$, plyne, že

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^{n} \lg \Omega_h(\lambda_h \Theta) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \{-i\lambda_h \Theta p_{1h} - \frac{\lambda_h^2 \Theta^2}{2!} p_{2h} + i \frac{\lambda_h^3 \Theta^3}{3} p_{3h} + \ldots\},$$

čili, že lze $\lg \Omega(\Theta)$ psáti zase ve tvaru

$$\lg \Omega(\Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \ldots,$$

kde

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{12} + \dots + \lambda_n p_{1n}, \\ P_2 &= \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \dots + \lambda_n^2 p_{2n}, \\ P_3 &= \lambda_1^3 p_{31} + \lambda_2^3 p_{32} + \dots + \lambda_n^3 p_{3n} \text{ atd.} \end{aligned}$$

Nyní budeme předpokládati, že jednotlivé chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ jsou velmi četné a velmi malé. Protože první seminvariant je podle definice roven

$$p_{1h} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_h \, \varphi_h(\varepsilon_h) \, d\varepsilon_h,$$

tedy vlastně roven aritmetickému průměru všech hodnot chyby $\varepsilon_h$, můžeme docíliti vhodnou volbou středu, od něhož čítáme chyby, že první seminvariant vymizí.

Předpokládáme, že jsme to učinili pro všechny chyby $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, a označíme

$$\left.\begin{matrix} 0, p_{21}, p_{31}, p_{41}, \dots \\ 0, p_{22}, p_{32}, p_{42}, \dots \end{matrix}\right\} \text{seminvarianty chyby} \left\{\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix}\right. \text{ atd.}$$

Pak podle předcházejícího pro výslednou chybu

$$\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$$

bude

$$\begin{aligned} P_1 &= 0, \\ P_2 &= \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \dots + \lambda_n^2 p_{2n}, \\ P_3 &= \lambda_1^3 p_{31} + \lambda_2^3 p_{32} + \dots + \lambda_n^3 p_{3n}. \end{aligned}$$

Při tom ze vzorců pro $p_2, p_3, p_4$ plyne, že pro $p_1 = s_1 = 0$ bude $p_2 = s_2$, $p_3 = s_3$, $p_4 = s_4 - 3s_2^2$, podle vzorce (14) značí tedy $p_2$ a $p_3$ střední hodnoty druhých a třetích mocnin chyb.

Budeme předpokládati, že $P_2$ je konečné; dále, že počet chyb $\varepsilon_i$ jest velmi značný a že střední hodnoty čtverců chyb $p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n}$ jsou přibližně stejného řádu. Pak podmínka, že $P_2$ je konečné, předpokládá, že každá z hodnot $\lambda_h^2 p_{2h}$ je konečná hodnota, násobená $1 : n$, takže $\lambda_h \sqrt{p_{2h}}$ je řádu $1 : \sqrt{n}$.

Potom $\lambda^3{}_h p_{3h}$ je řádu $\dfrac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$, tedy $P_3$ bude řádu $\dfrac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}}}$.

Pokud veličina $\dfrac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}}}$ bude konečná, bude $P_3$ — vzhledem k faktoru $n^{-\frac{1}{2}}$ — malé proti $P_2$.

Podobně plyne, že $P_4$ je malé proti $P_3$. Pro výslednou chybu tedy bude

$$\lg \Omega(\Theta) = -\frac{\Theta^2}{2} P_2 + i \frac{\Theta^3}{3!} P_3 + \frac{\Theta^4}{4!} P_4 + \ldots,$$

kde $P_i$ klesá s rostoucím $i$.

Pravděpodobnost, že výsledná chyba je mezi $\varepsilon$ a $\varepsilon + d\varepsilon$, bude podle vzorce (13) rovna

$$\varphi(\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta)\, e^{i\Theta\varepsilon}\, d\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta\varepsilon - \frac{\Theta^2}{2} P_2 + i \frac{\Theta^3}{3!} P_3 + \frac{\Theta^4}{4!} P_4 + \ldots}\, d\Theta. \tag{15}$$

Dají-li se zanedbati členy s $P_3$ a $P_4$ proti členu s $P_2$, jest

$$\varphi(\varepsilon) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta\varepsilon - \frac{1}{2}\Theta^2 P_2}\, d\Theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 P_2} (\cos \Theta\varepsilon + i \sin \Theta\varepsilon)\, d\Theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 P_2} \cos \Theta\varepsilon\, d\Theta,$$

a protože

$$\int_{0}^{\infty} e^{-A\varepsilon^2} \cos b\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-\frac{b^2}{4A}}, \quad *)$$

---

*) K. Petr: Počet integrální, Praha 1915, str. 225.

bude

$$\varphi(\varepsilon) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi P_2}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2P_2}}, \qquad (15')$$

kde

$$P_2 = \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \cdots + \lambda_n^2 p_{2n}.$$

Ve 2. odstavci jsme uvedli některé podmínky, jejichž splnění zajišťuje, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti. Byly to:

a) Podmínky Schiaparelliho o vlastnostech nejpravděpodobnější hodnoty odvozené z měření, doplněné další podmínkou, že funkce četnosti pro uvažované chyby mají tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

b) Podmínka, že skutečná měřická chyba je rovna lineární celistvé funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí normálním zákonem četnosti.

c) Podmínka, že skutečná měřická chyba je rovna lineární celistvé funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí zákonem četnosti $\varphi_i(\varepsilon_i)$, jestliže počet částečných chyb je dostatečně velký a jsou-li splněny jisté podmínky o středních hodnotách druhých a vyšších mocnin částečných chyb.

Je-li některý z předpokladů a), b) nebo c) splněn, můžeme býti jisti, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti, a z toho plyne, že je nutno v těchto případech vyrovnávati podle metody nejmenších čtverců; dále, že hodnoty neznámých takto vypočtené jsou nejpravděpodobnější hodnoty, jež plynou z výsledků měření; že mají nejmenší střední chyby a největší váhy ze všech lineárních celistvých funkcí výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$; a konečně, že extrémní možné chyby, jež jsou podle počtu měření rovné dvojnásobným, trojnásobným nebo čtyrnásobným středním chybám, vymezují obory, uvnitř nichž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých výsledných hodnot.

## 3. Druhé zdůvodnění methody nejmenších čtverců.

Nechť hledané veličiny $x$, $y$, $z$ mají býti zase určeny z rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

kde $l_i$ jsou prosté členy odvozené z výsledků měření. Předpokládáme, že $l_i$ nemají stejnou váhu.

Laplace uvažuje o této úloze asi takto: Rovnice (16) nutno nějak kombinovati, abychom dostali konečné rovnice pro výpočet neznámých. Ale jak to udělati nejvýhodněji?

Nechceme užívati jiných konečných rovnic než lineárních. To je podmínka nutná, jde-li o velký počet pozorování, jinak by vylučování neznámých a jejich výpočet byl nepraktický.

Všechny způsoby kombinací rovnic (16), má-li z nich býti vytvořena konečná rovnice lineární, vedou k násobení rovnic (16) jistými faktory a k utvoření součtu těchto součinů. Označíme-li faktory k výpočtu neznámé $x$ písmeny $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$, budeme míti pro $x$ konečnou rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i x + b_i y + c_i z - l_i) = 0,$$

při čemž

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 0, \tag{17}$$

takže

$$x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n. \tag{17'}$$

Kdyby $n = 3$, stačily by rovnice (17) k výpočtu faktorů $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ i k výpočtu neznámé $x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3$. Pokud však $n > 3$, nestačí rovnice (17) k určení faktorů $\lambda$. Nutno tedy připojiti další podmínku. Chceme-li dostati postup nejvýhodnější, musíme hledati takovou soustavu faktorů $\lambda_1$, $\lambda_2$ ..., $\lambda_n$, aby čtverec střední chyby v každé vypočtené neznámé byl nejmenší, nebo její váha největší.

Podle této úvahy Laplaceovy*) postupujeme takto: Jak jsme viděli (I, 3) a ještě uvidíme (VII, 3b), je za jistých předpokladů převrácená hodnota váhy $p_x$ pro neznámou $x$,

*) Théorie analytique des probabilités, II, § 24.

plynoucí ze vzorce (17′), rovna

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}, \tag{18}$$

jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_n$ váhy jednotlivých rovnic (16).

Má tedy býti výraz (18) minimem při podmínkách (17). Funkce $F$ (viz IV, 2) je zde rovna

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{p_i} - 2k_1 \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i a_i - 1) - 2k_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - 2k_3 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i.$$

Podmínky minima jsou

$$\frac{\lambda_i}{p_i} = k_1 a_i + k_2 b_i + k_3 c_i. \tag{19}$$

Dosadíme-li odtud za $\lambda_i$ do podmínek (17), bude

$$\begin{aligned} k_1 [paa] + k_2 [pab] + k_3 [pac] &= 1, \\ k_1 [pab] + k_2 [pbb] + k_3 [pbc] &= 0, \\ k_1 [pac] + k_2 [pbc] + k_3 [pcc] &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

a při tom

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n = \\ &= k_1 [pal] + k_2 [pbl] + k_3 [pcl]. \end{aligned} \tag{20′}$$

Označíme-li písmenem $\Delta$ determinant soustavy rovnic (20), bude

$$k_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pbb], [pbc] \\ [pbc], [pcc] \end{vmatrix}, \quad k_2 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pab], [pbc] \\ [pac], [pcc] \end{vmatrix},$$

$$k_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pab], [pbb] \\ [pac], [pbc] \end{vmatrix},$$

a tedy podle vzorce (20′) bude

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pcb], [pcc] \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Kdybychom k určení neznámých $x$, $y$, $z$ položili podmínku, aby byl minimální součet čtverců odchylek $v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$, při čemž každý sčítanec $v_i^2$ vchází do součtu násobený příslušnou vahou $p_i$, t. j. má-li býti minimální součet

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (a_i x + b_i y + c_i z - l_i)^2,$$

musí býti (srovn. III, 1)

$$\begin{aligned}
[paa]\, x + [pab]\, y + [pac]\, z &= [pal],\\
[pab]\, x + [pbb]\, y + [pbc]\, z &= [pbl],\\
[pac]\, x + [pbc]\, y + [pcc]\, z &= [pcl],
\end{aligned}$$

a odtud zase

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pcb], [pcc] \end{vmatrix}$$

[viz (21)]. Podobně pro $y$ a $z$.

Je tedy patrno: Podmínky, aby konečné rovnice pro neznámé $x$, $y$, $z$ byly lineární a aby váhy $p_x$, $p_y$, $p_z$ neznámých $x$, $y$, $z$ byly maximální, vedou ke stejným hodnotám neznámých jako methoda nejmenších čtverců.

A naopak: Methoda nejmenších čtverců vede k takovým hodnotám neznámých $x$, $y$, $z$, které mají největší váhy (nejmenší střední chyby) ze všech lineárních celistvých funkcí hodnot $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Podle tohoto druhého zdůvodnění methody nejmenších čtverců nejsou vyrovnané hodnoty neznámých nejpravděpodobnějšími hodnotami, jako byly v případě, kdy jsme mohli předpokládati, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti. Střední a extrémní možná chyba nemá v tomto případě významu pro vymezení oboru, v němž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých.

K tomuto druhému zdůvodnění methody nejmenších čtverců připojíme několik doplňků.

a) Podmínku, aby konečné rovnice pro výpočet neznámých byly lineární, autoři po Laplaceovi skoro vesměs přecházejí bez povšimnutí. Ch. A. Vogler*) odůvodňuje lineárnost konečných rovnic pro výpočet neznámých asi takto:

Vyrovnané hodnoty neznámých $x$, $y$, $z$ jsou jakési funkce prostých členů, a to takové funkce, že

1. hodnoty neznámých, které vyhovují všem odchylkovým rovnicím, musí zůstati nezměněny a

2. přesné hodnoty prostých členů vedou k přesným hodnotám neznámých, které zase splňují všechny přesné odchylkové rovnice.

Píšeme vyrovnané hodnoty

$$x = f_x(l_1, l_2, \ldots, l_n), \quad y = f_y(l_1, l_2, \ldots, l_n), \quad z = f_z(l_1, l_2, \ldots, l_n).$$

Dosadíme-li tyto hodnoty za $x$, $y$, $z$ do rovnic (16), bude

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \bar{l}_i, \tag{16'}$$

takže $l_i + \bar{l}_i$ můžeme považovati za takové prosté členy, že všechny odchylkové rovnice (16′) se dají splniti neznámými

$$\begin{aligned} x &= f_x(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n),\\ y &= f_y(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n),\\ z &= f_z(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n), \end{aligned}$$

při čemž podle předpokladu 1:

$$\begin{aligned} f_x(l_1, l_2, \ldots, l_n) &= f_x(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n),\\ f_y(l_1, l_2, \ldots, l_n) &= f_y(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n),\\ f_z(l_1, l_2, \ldots, l_n) &= f_z(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n). \end{aligned} \tag{22}$$

Označíme-li $l_i + \varepsilon_i$ přesné hodnoty prostých členů a $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ přesné hodnoty neznámých, musí býti podle předpokladu 2:

$$\begin{aligned} x + \xi &= f_x(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \ldots, l_n + \varepsilon_n),\\ y + \eta &= f_y(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \ldots, l_n + \varepsilon_n),\\ z + \zeta &= f_z(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \ldots, l_n + \varepsilon_n). \end{aligned} \tag{23}$$

---

*) Didaktisches zur Ausgleichungsrechnung. Z. f. Vermessungswesen, Bd. 33 (1904), str. 394—402 a 609—613.

Jde-li o druhé zdůvodnění methody nejmenších čtverců, založené na vzorci pro váhu výsledné hodnoty, jejíž chyba je lineární funkcí částečných chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, musíme předpokládati, že $\varepsilon_i$ jsou tak malé veličiny, že v Taylorových rozvojích funkcí $f_x$, $f_y$, $f_z$ můžeme zanedbati členy od druhého řádu, že tedy místo (23) stačí psáti

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n, \\ \eta &= \lambda'_1\varepsilon_1 + \lambda'_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda'_n\varepsilon_n, \\ \zeta &= \lambda''_1\varepsilon_1 + \lambda''_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda''_n\varepsilon_n, \end{aligned} \tag{23'}$$

kde

$$\lambda_i = \frac{\partial f_x}{\partial l_i}, \quad \lambda'_i = \frac{\partial f_y}{\partial l_i}, \quad \lambda_i'' = \frac{\partial f_z}{\partial l_i}.$$

Tyto derivace se mohou vypočísti na př. pro střední hodnoty $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ v uvažovaném oboru.

Je zřejmé, že v téže úvaze nemůžeme jednou klásti za funkce $f$ lineární výrazy a po druhé přesné výrazy, pokud proměnné jsou v přibližně stejných mezích. Předpokládáme-li tedy, že odchylky $\bar{l}_i$ jsou přibližně ve stejných mezích jako skutečné chyby $\varepsilon_i$, musíme místo rovnic (22) psáti

$$\begin{aligned} \lambda_1\bar{l}_1 + \lambda_2\bar{l}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{l}_n &= 0, \\ \lambda'_1\bar{l}_1 + \lambda'_2\bar{l}_2 + \ldots + \lambda'_n\bar{l}_n &= 0, \\ \lambda''_1\bar{l}_1 + \lambda''_2\bar{l}_2 + \ldots + \lambda''_n\bar{l}_n &= 0. \end{aligned} \tag{22'}$$

Protože podle předpokladu 2 musí býti odchylkové rovnice (16) splněny, klademe-li místo $l_i$ všude $l_i + \varepsilon_i$ a místo $x$, $y$, $z$ po řadě $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, bude

$$a_i(x + \xi) + b_i(y + \eta) + c_i(z + \zeta) = l_i + \varepsilon_i,$$

a odečteme-li od této rovnice

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \bar{l}_i, \tag{16'}$$

bude

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = \varepsilon_i - \bar{l}_i.$$

Násobíme-li po řadě $\lambda_i$ a sečteme, bude — vzhledem k (22') a k (23')

$$[a\lambda]\,\xi + [b\lambda]\,\eta + [c\lambda]\,\zeta = [\varepsilon\lambda] = \xi,$$

podobně

$$[a\lambda']\,\xi + [b\lambda']\,\eta + [c\lambda']\,\zeta = [\varepsilon\lambda'] = \eta, \tag{24}$$
$$[a\lambda'']\,\xi + [b\lambda'']\,\eta + [c\lambda'']\,\zeta = [\varepsilon\lambda''] = \zeta.$$

Mysleme si několik řad měření a nechť hodnoty $l_1, l_2, \ldots, l_n$ jsou vždy v uvažovaném oboru. Pak pro každou řadu dojdeme k rovnicím (24) se stejnými koeficienty, ale nestejnými $\xi, \eta, \zeta$. Z tóho je patrno, že rovnice (24) musí býti splněny identicky pro jakékoli $\xi, \eta, \zeta$, t. j. musí býti

$$\begin{aligned} &[a\lambda] = 1, && [b\lambda] = 0, && [c\lambda] = 0, \\ &[a\lambda'] = 0, && [b\lambda'] = 1, && [c\lambda'] = 0, \\ &[a\lambda''] = 0, && [b\lambda''] = 0, && [c\lambda''] = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Rovnice (22'), dosadíme-li do nich z rovnic (16') za $\bar{l}_i$, nabudou tvaru

$$[a\lambda]\,x + [b\lambda]\,y + [c\lambda]\,z - [l\lambda] = 0,$$

z nich podle (25) dostaneme $x = [l\lambda]$, $y = [l\lambda']$ a $z = [l\lambda'']$ [viz (17')].

b) Zbývá ukázati, jak byl odvozen vzorec

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n} \tag{18}$$

pro váhu lineární funkce částečných chyb.

$\alpha$) V odstavci VII, 1b) bylo dokázáno: Řídí-li se chyby $\varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, normálním zákonem četnosti

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2},$$

bude pravděpodobnost, že výsledná chyba $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od $\varepsilon$ do $\varepsilon + d\varepsilon$, rovna

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon,$$

kde míra přesnosti

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}}.$$

Pravděpodobnost, že výsledná chyba jest v mezích od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$ bude tedy $\Phi(H\varepsilon)$ (srovn. I, 8). Ať je $\varepsilon$ jakékoli, bude tato pravděpodobnost větší, je-li větší míra přesnosti $H$. Podobnou úvahou došel Laplace k požadavku, že míra přesnosti $H$ má býti co možná největší.

A zavedeme-li místo míry přesnosti $h_i$ a $H$ váhy $p_i$ a $p_x$, při čemž

$$h_i m_i = h_i \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[viz I, (24′) a (16′)], čili

$$\frac{1}{h_i^2} = \frac{2m_0^2}{p_i} \quad \text{a podobně} \quad \frac{1}{H^2} = \frac{2m_0^2}{p_x},$$

bude

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}. \tag{18}$$

Tento výsledek je tedy založen na předpokladu, že chyb $\varepsilon_i$ je konečný počet (rovný zde počtu měření) a že se všechny řídí normálním zákonem četnosti.

$\beta$) Gauss vyšel od pojmu střední chyby a ze vzorce [I, (12″)] pro lineární funkci částečných chyb, který byl dokázán za předpokladu, že měřené veličiny jsou na sobě nezávislé a že funkce četnosti částečných chyb jsou sudé funkce.

Zavedeme-li zase váhy jako veličiny nepřímo úměrné čtvercům středních chyb (srovn. I, 6), dostaneme zase vzorec (18).

$\gamma$) Vzorec (18) byl konečně odvozen*) z těchto jednodušších předpokladů o vlastnostech váhy:

---

*) F. Bernstein und W. S. Baer: Ein Axiomensystem der Methode der kleinsten Quadrate, Math. Annalen, 1915, str. 284—294. — Whittaker-Robinson, l. c. str. 228—231.

1. Je-li $x_i$ naměřená hodnota pro veličinu $x$, označíme-li váhu veličiny $x_i$ písmenem $p_i$ a je-li $\lambda$ nějaké číslo, pak hodnotě $\lambda x_i$ veličiny $\lambda x$ přísluší váha $p_i\, f(\lambda)$, kde $f(\lambda)$ je nějaká funkce $\lambda$.

2. Přísluší-li hodnotě $x_i$ veličiny $x$ váha $p_i$ a nezávisle naměřené hodnotě $y_i$ veličiny $y$ váha $q_i$, přísluší hodnotě $x_i + y_i$ pro součet $x + y$ váha $r_i$, při čemž

$$\psi(r_i) = \psi(p_i) + \psi(q_i). \tag{26}$$

3. Přísluší-li dvěma nezávisle naměřeným hodnotám téže veličiny stejná váha rovná 1, přísluší aritmetickému průměru obou naměřených hodnot váha 2.

4. Přísluší-li naměřeným hodnotám $x_1, \ldots, x_n$ stejná váha rovná 1, přísluší součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ váha řádu $1 : n$, t. j. násobíme-li váhu součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ počtem $n$, je součin konečný, roste-li $n$ nad každé číslo.

Z axiomu 1 plyne: Je-li $u$ nějaké číslo, přísluší hodnotě $u\lambda x_i$ veličiny $u\lambda x$ váha rovná $p_i\, f(u\lambda)$, ale také rovná $p_i f(u) \,.\, f(\lambda)$. Funkce $f$ musí tedy splňovati podmínku (t. zv. funkcionální rovnici)

$$f(u\lambda) = f(u) \,.\, f(\lambda). \tag{27}$$

Jediná funkce $f(\lambda)$ proměnné $\lambda > 0$, která je konečná v intervalu $\varepsilon, \varepsilon'$, při čemž $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, a která hoví funkcionální rovnici (27) pro všechny kladné hodnoty proměnných $\lambda, u$, jest funkce $\lambda^k$, kde $k$ je reálná konstanta.*) Tedy: váha příslušná hodnotě $\lambda x_i$ veličiny $\lambda x$ je

$$p_i \lambda^k. \tag{27'}$$

Podobně váha příslušná hodnotě $\lambda y_i$ veličiny $\lambda y$ je $q_i \lambda^k$ a váha příslušná hodnotě $\lambda\,(x_i + y_i)$ je $r_i \lambda^k$, při čemž podle předpokladu 2 musí býti

$$\psi\,(r_i \lambda^k) = \psi\,(p_i \lambda^k) + \psi\,(q_i \lambda^k). \tag{28}$$

Veličina $r_i$ je podle vzorce (26) funkcí proměnných $p_i$ a $q_i$. Derivujeme-li rovnici (26) podle $p_i$, jest

---

*) K. Petr: Počet diferenciální, str. 117.

$$\psi'(r_i)\frac{\partial r_i}{\partial p_i} = \psi'(p_i)$$

a podobně z rovnice (28):

$$\psi'(r_i\lambda^k)\frac{\partial r_i}{\partial p_i}\lambda^k = \psi'(p_i\lambda^k)\,\lambda^k,$$

tedy dělením

$$\frac{\psi'(p_i\lambda^k)}{\psi'(p_i)} = \frac{\psi'(r_i\lambda^k)}{\psi'(r_i)} = \frac{\psi'(q_i\lambda^k)}{\psi'(q_i)}.$$

Odtud je patrno, že podíl $\dfrac{\psi'(z\lambda^k)}{\psi'(z)}$ je nezávislý na $z$. A protože $z\lambda^k$ je souměrná funkce vzhledem k $z$ a $\lambda^k$, nezávisí funkce $\dfrac{\psi'(z\lambda^k)}{\psi'(z)\psi'(\lambda^k)}$ ani na $z$, ani na $\lambda^k$ a je rovna konstantě $c$. Píšeme-li $u$ místo $\lambda^k$, musí funkce $\psi'$ splňovati funkcionální rovnici $\psi'(zu) = c\,\psi'(z)\,\psi'(u)$. Podle dřívějšího musí býti funkce $\psi'(z)$ rovna $\dfrac{1}{c}\,.\,z^{k'}$ a tedy $\psi(z) = \dfrac{1}{c(k'+1)}z^{k'+1}$.

Konstantou $\dfrac{1}{c(k'+1)}$ můžeme ve vzorci (26) krátiti, takže můžeme psáti

$$\psi(z) = z^{k''}, \tag{29}$$

kde $k'' = k' + 1$.

Nechť jsou $x_1$, $x_2$ dvě nezávislé hodnoty veličiny $x$, každá o váze 1. Pak $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{2}x_2$ jsou dvě nezávislé hodnoty veličiny $\frac{1}{2}x$, každá o váze $\frac{1}{2}k$ [srovn. vzorec (27')]. A $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ jest hodnota veličiny $x$, jíž přísluší podle vzorce (26) a (29) váha $r$, a jest

$$(r)^{k'+1} = \frac{1}{2^{kk''}} + \frac{1}{2^{kk''}} = \frac{1}{2^{kk''-1}}.$$

Podle předpokladu 3 musí býti $r = 2$, tedy $2^{k''} = \dfrac{1}{2^{kk''-1}}$,

čili
$$k''(k+1) = 1. \tag{30}$$

Je-li $x'_1$ hodnota veličiny $x_1$ o váze $p_1$ a $x'_2$ nezávisle určená hodnota veličiny $x_2$ o váze $p_2$, pak $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2$ je hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ o váze $r$, při čemž

$$r^{k''} = (p_1 \lambda_1^{k})^{k''} + (p_2 \lambda_2^{k})^{k''} = p_1^{k''} \lambda_1^{1-k''} + p_2^{k''} \lambda_2^{1-k''}. \quad (31)$$

Je-li dále $x'_3$ nezávisle určená hodnota veličiny $x_3$ o váze $p_3$, pak $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3$ je hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ o váze $r'$, při čemž

$$r'^{k''} = r^{k''} + (p_3 \lambda_3^{k})^{k''} = p_1^{k''} \lambda_1^{1-k''} + p_2^{k''} \lambda_2^{1-k''} + p_3^{k''} \lambda_3^{1-k''}$$

atd. (31')

Jsou-li $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ hodnoty pro veličiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$, každá o váze rovné 1, pak $x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n$ je hodnota pro součet $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ a příslušná váha $r$ plyne podle vzorce (31') z rovnice $r^{k''} = n$, tedy $r = n^{\frac{1}{k''}}$. Podle předpokladu 4 musí býti $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{k''}+1}$ konečná, tedy

$$\frac{1}{k''} + 1 = 0, \qquad k'' = -1.$$

Jsou-li tedy $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ hodnoty pro veličiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o vahách rovných $p_1, p_2, \ldots, p_n$, je $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \ldots + \lambda_n x'_n$ hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, jejíž váha $p_x$ je dána podle vzorce (31') vzorcem

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}. \quad (18)$$

*

Ve 3. odstavci jsme uvedli některé podmínky, za nichž je platné druhé zdůvodnění methody nejmenších čtverců. Kromě případu, kdy se chyby měřických výsledků řídí normálním zákonem četnosti (srovn. odst. 2), uvedli jsme tyto podmínky:

a) Výsledné hodnoty mají býti lineární celistvé funkce hodnot $l_1, l_2, \ldots, l_n$ plynoucích z měření.

b) Je-li váha chyby $\varepsilon_i$ rovna $p_i$, je váha $p_x$ funkce $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ dána vzorcem

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}.$$

Tato druhá podmínka byla odvozena jednak (podle Gausse) pro případ, že měřené veličiny jsou na sobě nezávislé a že funkce četnosti jednotlivých chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou sudé funkce, jednak z některých jednodušších předpokladů o vlastnostech váhy. [Viz $\beta$) resp. $\gamma$).]

Je-li splněn předpoklad $\beta$) nebo $\gamma$), a uznáme-li jako nutný předpoklad a), pak nutno zase vyrovnávati podle methody nejmenších čtverců. Hodnoty neznámých, takto vypočtené, mají nejmenší střední chyby a největší váhy. Nejsou to však nejpravděpodobnější hodnoty, plynoucí z výsledků měření, a střední a extrémní možné chyby nemají v tomto případě významu pro vymezení oboru, v němž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých.

**4. Měřické chyby se neřídí ani normálním zákonem četnosti, ani nejsou splněny předpoklady druhého zdůvodnění methody nejmenších čtverců.** (Viz odst. 3. Na př. funkce četnosti není sudá funkce, nebo měřické chyby nejsou nahodilé atd.) V tomto případě vyrovnání podle methody nejmenších čtverců nepodává ani hodnoty nejpravděpodobnější, ani hodnoty o největší váze a nemá také smyslu odhadovati přesnost měření a výsledků pomocí středních nebo průměrných chyb, protože (podle odst. I, 3) to předpokládá, že funkce četnosti jsou sudé funkce.

Ale i v tom případě podává methoda nejmenších čtverců snadno vypočítatelné a určité vyrovnané hodnoty; má ty výhody, na něž upozornil již Legendre.