VI.

MĚŘENÍ S PŘEDEPSANOU PŘESNOSTÍ. HOSPODÁRNOST MĚŘENÍ.

V měřických vědách, na př. v geodesii, astronomii a částečně i ve fysice, nejde jen o to, určiti z měření nějakou veličinu, nýbrž určiti ji s určitou předepsanou přesností. V ojedinělých případech pak bylo dokonce uvažováno, jak určiti hledanou veličinu co nejhospodárněji, t. j. jak při daném množství měřické práce získati výsledek co nejpřesnější, a měření byla podle této úvahy provedena.

1. Měření s předepsanou přesností. Vyložím nejprve na několika příkladech, jak přesně nutno provésti měření, má-li býti dosaženo výsledků určité přesnosti. Při tom umožňují odhadovati přesnost měření a výsledků buď největší možné chyby nebo střední chyby.

a) Při tak zv. relativním měření tíže se určuje doba kyvu neproměnného kyvadla jednak na místě B, kde zrychlení tíže (g_B) známe, jednak na místě x, kde chceme zrychlení (g_x) určiti. Označíme-li měřené doby kyvu T_B a T_x, bude přibližně

$$T_B = \pi\sqrt{\frac{l}{g_B}}, \qquad T_x = \pi\sqrt{\frac{l}{g_x}},$$

kde l je t. zv. redukovaná délka kyvadla. Odtud plyne $g_B T_B^2 = g_x T_x^2$ čili

$$g_x = g_B\left(\frac{T_B}{T_x}\right)^2. \tag{1}$$

Z tohoto vzorce vyplývá

$$g_x = g_B\left(\frac{T_B}{T_B + T_x - T_B}\right)^2 = g_B\left(1 + \frac{T_x - T_B}{T_B}\right)^{-2} = \\ = g_B - 2g_B\frac{T_x - T_B}{T_B} + 3g_B\left(\frac{T_x - T_B}{T_B}\right)^2 - \dots . \tag{1'}$$

S jakou přesností musíme při tom měřiti dobu kyvu T_B a T_x, abychom určili g_x na 1 miligal? (1 mgal = 10^{-3} cm/sec²). Vliv chyb ΔT_B a ΔT_x na g_x je roven přibližně

$$\Delta g_x \doteq \frac{\partial g_x}{\partial T_B} \Delta T_B + \frac{\partial g_x}{\partial T_x} \Delta T_x,$$

a protože ze vzorce (1′) pro $T_x \doteq T_B$ vyplývá

$$\frac{\partial g_x}{\partial T_B} \doteq + \frac{2 g_B}{T_B}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial T_x} = - \frac{2 g_B}{T_B},$$

bude

$$\Delta g_x \doteq \frac{2 g_B}{T_B} (\Delta T_B - \Delta T_x). \tag{1''}$$

Aby

$$|\Delta g_x| \leqq \frac{1}{10^3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

musí býti

$$\frac{1}{T_B} |\Delta T_B - \Delta T_x| \leqq \frac{1}{2 \cdot 10^6},$$

poněvadž $g_B \doteq 10^3$ cm/sec². Největší možný vliv chyb ΔT_B a ΔT_x nastane, budou-li obě chyby míti opačná znaménka. V tomto nejnepříznivějším případě musí tedy býti

$$2 \frac{|\Delta T|}{T} \leqq \frac{1}{2 \cdot 10^6}, \quad |\Delta T| \leqq \frac{T}{4 \cdot 10^6}.$$

K relativním měřením tíže se užívá kyvadel půlsekundových, při nichž $T \doteq \frac{1}{2}$ sec. Pro ně tedy má býti

$$|\Delta T| \leqq \frac{1}{8 \cdot 10^6} \text{ sec} \doteq \frac{1{,}3}{10^7} \text{ sec}.$$

Výsledek lze shrnouti takto: Abychom ze vzorce (1) vypočetli zrychlení tíže v místě x s chybou nejvýš rovnou 1 mgal, musíme změřiti doby kyvu půlsekundových kyvadel asi na jednu desetimiliontinu vteřiny přesně. Musíme tedy k tomu užíti takové methody, která zajišťuje tuto přesnost (na př. registrace na filmu).

b) S jakou střední chybou musíme určovati dobu kyvu kyvadel, chceme-li na každé stanici (x) i na stanici připojovací (B) určiti vždy čtyři řady měření a má-li střední chyba ve výsledné hodnotě tíže býti menší než $\pm$ 0,5 mgal? (Řadou měření jmenujeme určení doby kyvu všech čtyř kyvadel pokud možno rychle za sebou a při podmínkách pokud možno stejných.)

Vztah mezi středními chybami m_1 (pro g_x), m_2 (pro T_B), m_3 (pro T_x) podle vzorce (1″) je

$$m_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial g_x}{\partial T_B}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial g_x}{\partial T_x}\right)^2 m_3^2} \doteq \doteq \pm \frac{2g_B}{T_B}\sqrt{m_2^2 + m_3^2}. \qquad (2)$$

Klademe-li

$$m_2 = m_3, \quad T_B \doteq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sec},$$

$$g_x \doteq 10^3 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2} \quad \text{a} \quad m_1 = \pm \frac{1}{2\,.\,10^3}\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2},$$

plyne ze vzorce (2), že má býti

$$m_3 = \pm \frac{1}{1{,}13}\,.\,10^{-7}\,\mathrm{sec}.$$

A protože T_x je odvozeno ze čtyř řad po čtyřech měřeních doby kyvu, musí jedno měření doby kyvu míti střední chybu asi

$$\pm \frac{\sqrt{16}}{1{,}13}\,.\,10^{-7}\,\mathrm{sec} = \pm\, 3{,}5\,.\,10^{-7}\,\mathrm{sec}.$$

Přesnost jednotlivých měřených elementů má býti tedy taková, aby střední chyba ve výsledné době kyvu byla nejvýš asi $\pm$ 3,5 . 10^{-7} sec (viz př. c) a d)).

c) Při relativním měření tíže máme vypočísti t. zv. redukci na nekonečně malý výkyv $r_\alpha = \frac{1}{16} T\,\alpha^2$, kde T je doba kyvu kyvadla a α výkyv v obloukové míře. Chceme ji určiti s chybou menší nebo nejvýš rovnou 10^{-8} sec. Amplituda α se určuje z rozkyvu d_{mm} na filmu, na němž jsou kyvy kyvadla registrovány, a z konstanty D podle vzorce $\alpha \doteq \frac{1}{2} \frac{d}{D}$. S jakou přesností musíme určiti měřené veličiny?

Určíme-li rozkyv d s chybou $\Delta d = \pm 2 . 10^{-2}$ mm, bude její vliv na vypočtené r_α roven $\frac{T}{16} \alpha \frac{\Delta d}{D}$. Klademe-li $T = \frac{1}{2}$ sec, $\alpha = \frac{14{,}6'}{\varrho'}$ (průměrná hodnota) a $D = 1{,}72 . 10^3$ mm (přibližná hodnota konstanty D), bude vliv chyby Δd roven $\pm 1{,}54 . 10^{-9}$ sec.

S jakou přesností musíme pak určiti konstantu D, aby celková chyba v r_α nestoupla nad žádanou mez?

Protože z celkové chyby $\pm 10^{-8}$ sec zbývá po odečtení $1{,}54 . 10^{-9}$ sec jen $8{,}46 . 10^{-9}$ sec, musí

$$\left| T . \frac{2\alpha}{16} \frac{\partial \alpha}{\partial D} \Delta D \right| \leqq \frac{8{,}46}{10^9} \text{ sec, t. j. } T \frac{\alpha}{16} \frac{d}{D^2} |\Delta D| \leqq \frac{8{,}46}{10^9} \text{ sec.}$$

Klademe-li zase $T = \frac{1}{2}$ sec, $\alpha = \frac{14{,}6'}{\varrho'}$, $D = 1{,}72 . 10^3$ mm a za rozkyv na filmu $d = 60$ mm, musí

$$|\Delta D| \leqq \frac{8{,}46}{10^9} . \frac{16 . 2}{14{,}6'} \varrho' \frac{1{,}72^2 . 10^6}{60} \text{ mm} \doteq 3 \text{ mm.}$$

Je tedy patrno, že musíme konstantu D určiti s chybou rovnou nejvýš asi 3 mm.

Podobně nutno uvážiti vliv měřických chyb na ostatní redukce dob kyvu (redukci na teplotu a hustotu vzduchu, na chod hodin a na soukyv stativu).*) A střední hodnota součtu všech těchto uvažovaných chyb na dobu kyvu musí býti podle př. b) menší než $\pm 3{,}5 . 10^{-7}$ sec. Ukáží-li se při mě-

*) B. Kladivo: K měření zrychlení tíže, Sborník české vys. školy techn. v Brně, sv. XII, spis 46.

ření větší rozdíly redukovaných dob kyvů na téže stanici, než by plynulo ze střední chyby $\pm 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec, musíme hledati další chyby (na př. změny v délce kyvadel, otřesy a j.) a jejich vliv na výsledek pokud možno snížiti.

2. Hospodárnost měření. Nyní ukážeme na příkladu trojúhelníkových sítí, jak se klade a řeší otázka nejhospodárněji provedeného měření.

Označíme hledané chyby úhlů x_j značkou δx_j, $j = 1, 2, 3, \ldots, \varrho$, příslušné váhy p_j značí, kolikrát má býti každý úhel měřen; půjde právě o určení čísel p_j.

Podle (IV, 1) jde zde o případ rovnic [IV, (2)]

$$\delta x_j - l_j = 0,$$

a podmínek [IV, (3)]:

$$a_{g1}\,\delta x_1 + a_{g2}\,\delta x_2 + \ldots + a_{g\varrho}\,\delta x_\varrho = a_{g0}, \quad g = 1, 2, \ldots, \sigma. \qquad (3)$$

Při tom máme určiti při daném množství měřické práce co nejlépe (t. j. s největší vahou) nějakou příčku v trojúhelníkové síti, jejíž délka se dá vyjádřiti jako funkce měřených úhlů $f(x_1, x_2, \ldots, x_\varrho)$. Protože vyrovnané hodnoty úhlů x_j jsou $x_j + \delta x_j$, bude vyrovnaná hodnota hledané příčky

$$\Phi = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots, x_\varrho + \delta x_\varrho) \doteq$$
$$\doteq f_0 + f_1\,\delta x_1 + f_2\,\delta x_2 + \ldots + f_\varrho\,\delta x_\varrho.$$

Tato funkce má býti určena co nejpřesněji, t. j. má býti její váha p_Φ maximální nebo má býti minimální výraz

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2} = \sum_{j=1}^{\varrho} q_j F_j^2. \qquad (4)$$

[srovn. IV, (13)]. Při tom značí

$$F_j = f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}, \qquad (5)$$

a $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ plynou z rovnic [IV, (12)]

$$\begin{aligned} h_1\,[qa_1a_1] + h_2\,[qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_1a_\sigma] &= [qa_1f], \\ h_1\,[qa_2a_1] + h_2\,[qa_2a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_2a_\sigma] &= [qa_2f], \qquad (6) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1\,[qa_\sigma a_1] + h_2\,[qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_\sigma a_\sigma] &= [qa_\sigma f]. \end{aligned}$$

Protože pak množství měřické práce jest dané, musí býti

$$p_1 + p_2 + \dots + p_\varrho = c;$$

(c je konstanta).

Váhy p_j jsou kladné nebo rovné nule; proto je píšeme ve tvaru $p_j = y_j^2$. Máme tedy vhodnou volbou veličin y_j, $j = 1, 2, \dots, \varrho$, učiniti minimem výraz

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{y_1^2} + \frac{F_2^2}{y_2^2} + \dots + \frac{F_\varrho^2}{y_\varrho^2}$$

při podmínce $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_\varrho^2 = c$. Abychom nalezli podmínky minima, anulujeme parciální derivace funkce

$$\frac{1}{p_\Phi} + k\,(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_\varrho^2 - c)$$

podle jednotlivých proměnných $y_1, y_2, \dots, y_\varrho$ (srovn. kap. IV, odst. 2). První podmínka bude na př.

$$\frac{-2F_1^2}{y_1^3} + \frac{2F_1}{y_1^2}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\partial F_1}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial y_1} + \frac{2F_2}{y_2^2}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\partial F_2}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial y_1} + \dots +$$
$$+ \frac{2F_\varrho}{y_\varrho^2}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\partial F_\varrho}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial y_1} + 2ky_1 = 0.$$

Koeficient při $\dfrac{\partial h_l}{\partial y_1}$ jest

$$2\left\{\frac{F_1}{p_1}\frac{\partial F_1}{\partial h_l} + \frac{F_2}{p_2}\frac{\partial F_2}{\partial h_l} + \dots + \frac{F_\varrho}{p_\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial h_l}\right\} =$$
$$= -2\left\{\frac{F_1}{p_1}a_{l1} + \frac{F_2}{p_2}a_{l2} + \dots + \frac{F_\varrho}{p_\varrho}a_{l\varrho}\right\}.$$

Protože rovnice (6) lze psáti ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{\varrho}\frac{1}{p_j}a_{1j}F_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{\varrho}\frac{1}{p_j}a_{2j}F_j = 0,\quad \dots,\quad \sum_{j=1}^{\varrho}\frac{1}{p_j}a_{\sigma j}F_j = 0, \qquad (6')$$

bude koeficient při $\frac{\partial h_l}{\partial y_1}$ roven nule, a to pro $l = 1, 2, \ldots, \sigma$.

Bude tedy první podmínka pro minimum

$$y_1\left(k - \frac{F_1^2}{p_1^2}\right) = 0.$$

A stejně plynou ostatní podmínky

$$y_2\left(k - \frac{F_2^2}{p_2^2}\right) = 0, \ \ldots, \quad y_\varrho\left(k - \frac{F_\varrho^2}{p_\varrho^2}\right) = 0. \tag{7}$$

K určení veličiny Φ je třeba znáti ϱ hodnot $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_\varrho$, z nich však σ je určeno podmínkami (3), je tedy nutno určiti $\varrho - \sigma$ neznámých.

Protože hodnoty $\frac{F_j}{p_j}$, $j = 1, 2, \ldots, \varrho$, splňují σ podmínek (6′), je z nich jen $\varrho - \sigma$ nezávislých. Zvolme za ně hodnoty s indexem $1, 2, \ldots, \varrho - \sigma$. Ostatní závislé hodnoty

$$\frac{F_{\varrho-\sigma+1}}{p_{\varrho-\sigma+1}}, \ \ldots, \ \frac{F_\varrho}{p_\varrho}$$

jsou pak určeny rovnicemi (6′). Až na zvláštní případy, které z úvahy vylučujeme, nebudou rovny konstantě k; musí tedy [viz (7)] — až na vyloučené zvláštní případy — býti příslušné veličiny y rovny nule. Bude tedy za uvedeného předpokladu

$$y_{\varrho-\sigma+1} = y_{\varrho-\sigma+2} = \ldots = y_\varrho = 0$$

a tedy i

$$p_{\varrho-\sigma+1} = p_{\varrho-\sigma+2} = \ldots = p_\varrho = 0. \tag{8}$$

Pokud pak z rovnic (6′) plynou pro

$$\frac{F_{\varrho-\sigma+1}}{p_{\varrho-\sigma+1}}, \ \ldots, \ \frac{F_\varrho}{p_\varrho}$$

hodnoty konečné, což předpokládáme, musí býti

$$F_{\varrho-\sigma+1} = F_{\varrho-\sigma+2} = \ldots = F_\varrho = 0.$$

Jak patrno z podmínek (8), nemá býti σ neznámých $x_{\varrho-\sigma+1}$, $x_{\varrho-\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$ vůbec měřeno. Protože pak k určení funkce Φ je nezbytně nutno měřiti $\varrho - \sigma$ neznámých, musí býti měřeny všecky zbývající úhly $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-\sigma}$. To zase značí, že $p_1, p_2, \ldots, p_{\varrho-\sigma}$ musí býti kladná čísla, a z podmínek (7) plyne, že musí

$$\frac{F_1^2}{p_1^2} = \frac{F_2^2}{p_2^2} = \ldots = \frac{F_{\varrho-\sigma}^2}{p_{\varrho-\sigma}^2} = k. \tag{9}$$

Absolutní hodnoty veličin

$$\frac{F_1}{p_1}, \frac{F_2}{p_2}, \ldots, \frac{F_{\varrho-\sigma}}{p_{\varrho-\sigma}}$$

mají podle toho býti si rovny.

Tedy máme-li docíliti co největší váhy výsledku Φ, musíme měřiti jen právě tolik veličin, kolik je jich k určení hledané funkce Φ nezbytně potřeba. Všechny ostatní veličiny nemají býti měřeny (věta Schreiberova).*)

Ze vzorce (4) plyne

$$\left(\frac{1}{p_\Phi}\right)_{\min} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{F_{\varrho-\sigma}^2}{p_{\varrho-\sigma}} = k\,(p_1 + p_2 + \ldots \\ \ldots + p_{\varrho-\sigma}) = |\sqrt{k}|\,(|F_1| + |F_2| + \ldots + |F_{\varrho-\sigma}|). \tag{10}$$

Jsme tedy vedeni k tomuto postupu: Vhodnou volbou čísel $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ docílíme, aby σ z veličin $F_1, F_2, \ldots, F_\varrho$ bylo rovno nule a aby při tom součet absolutních hodnot zbývajících veličin F byl minimální.

Určíme-li takto hodnoty F_j, budou podle rovnic (9) hledané váhy p_j rovny

$$p_j = |F_j| \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

*) C. Runge: Der Schreibersche Satz. Z. f. Vermessungswesen, 1890, str. 21—24.

Konstanta k plyne pak z rovnice $p_1 + p_2 + \dots + p_\varrho = c$. Bude

$$\frac{1}{\sqrt{k}}(|F_1| + |F_2| + \dots + |F_{\varrho-\sigma}|) = c.$$

Jde-li o více podmínek (3), poskytuje skutečné řešení obtíže.

Uvedu jednoduchý příklad s jednou podmínkou (3).

Předpokládáme, že v trojúhelníku ABC je dána strana $\overline{AB}$ a že byly měřeny vnitřní úhly A, B, C s vahami p_1, p_2, p_3. Jak zvoliti p_1, p_2, p_3, aby $p_1 + p_2 + p_3 = c$ a aby při tom byla co nejlépe určena výška

$$v_c = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \sin B \sin A?\text{*)} \tag{11}$$

Podmínka (3) [viz str. 144] je zde

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C - (180° - A - B - C) = 0.$$

Ze vzorce (11) plyne

$$\Phi = v_c + f_1 \Delta A + f_2 \Delta B + f_3 \Delta C,$$

kde

$$f_1 = v_c \operatorname{cotg} A, \quad f_2 = v_c \operatorname{cotg} B, \quad f_3 = -v_c \operatorname{cotg} C.$$

Pak ze vzorce [IV, (13)] plyne

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3},$$

při čemž

$$F_1 = f_1 - h_1, \quad F_2 = f_2 - h_1, \quad F_3 = f_3 - h_1$$

a podle vzorců [IV, (12)] jest

$$h_1 = \frac{q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Máme tedy určiti minimum výrazu

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{y_1^2} + \frac{F_2^2}{y_2^2} + \frac{F_3^2}{y_3^2} \text{ při podmínce } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c.$$

*) Jordan: I, l. c. str. 139—141.

Podmínky minima jsou

$$y_1\left(k - \frac{F_1^2}{p_1^2}\right) = 0, \quad y_2\left(k - \frac{F_2^2}{p_2^2}\right) = 0, \quad y_3\left(k - \frac{F_3^2}{p_3^2}\right) = 0.$$

Protože

$$\frac{F_1}{p_1} + \frac{F_2}{p_2} + \frac{F_3}{p_3} = 0,$$

jsou dvě z hodnot $F_j : p_j$ nezávislé a jedna je závislá. Pro nezávislé musí býti $F : p = \pm \sqrt{k}$; není-li závislá hodnota ve zvláštním případě rovna k, bude příslušné $y = 0$ a tedy i příslušné $F = 0$.

Předpokládejme, že $A > B > C$ a že jsou v 1. kvadrantě. Klademe-li $F_1 = 0$, je $h_1 = v_c \operatorname{cotg} A$ a

$$|F_2| + |F_3| = v_c \{ |\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A| + |-\operatorname{cotg} C - \\ - \operatorname{cotg} A| \} = v_c (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$

Při $F_2 = 0$, je $h_1 = v_c \operatorname{cotg} B$ a

$$|F_1| + |F_3| = v_c (2 \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C).$$

Při $F_3 = 0$, je $h_1 = - v_c \operatorname{cotg} C$ a

$$|F_1| + |F_2| = v_c (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + 2 \operatorname{cotg} C).$$

Protože

$$2 \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C = \\ = \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A > 0$$

a

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + 2 \operatorname{cotg} C - 2 \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A - \\ - \operatorname{cotg} C = 2 \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C > 0,$$

je v uvažovaném případě $|F_2| + |F_3|$ nejmenší. Nejlepší rozdělení vah by tedy bylo v poměru čísel

$$|F_1| = 0, \quad |F_2| = v_c |\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A|, \\ |F_3| = v_c |\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A|.$$

Je-li

$$A = 78^\circ,\ \operatorname{cotg} A = 0{,}213,$$
$$B = 68^\circ,\ \operatorname{cotg} B = 0{,}404,$$
$$C = 34^\circ,\ \operatorname{cotg} C = 1{,}483,$$

je nejlepší rozdělení vah v poměru čísel

$$|\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A| = 0{,}191,\ |\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A| = 1{,}696.$$

Má-li býti na př. $p_1 + p_2 + p_3 = 30$, musí býti konstanta úměrnosti $30 : 1{,}887$ a tedy $p_1 = 0$, $p_2 \doteq 3{,}0$, $p_3 \doteq 27{,}0$, t. j. úhel A nemá býti měřen, úhel B má býti měřen třikrát a úhel C má býti měřen 27krát.