Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle methody nejmenších čtverců)

Vyrovnávání závislých měření

In: B. Kladivo (author): Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle methody nejmenších čtverců). (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1943. pp. 90–125.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405504

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

IV.

VYROVNÁNÍ ZÁVISLÝCH MĚŘENÍ.

1. Vyrovnání závislých měření (převedením na vyrovnání zprostředkujících měření). Uvažujme o této úloze: Neznámé $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$, pro něž jsme naměřili hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_\varrho$, mají přesně splňovati σ podmínek

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0,\ f_2(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0,\ \ldots,\ f_\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0;\ (\varrho > \sigma). \tag{1}$$

Obyčejně známe předem, nebo získáme předem, přibližné hodnoty neznámých $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}$, takže

$$X_1 = x_{10} + x_1,\ X_2 = x_{20} + x_2,\ \ldots,\ X_\varrho = x_{\varrho 0} + x_\varrho.$$

O opravách $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ předpokládáme, že jsou tak malé, že lze zanedbati již členy obsahující jejich součiny a čtverce, Pak z měření plyne ϱ rovnic $X_j - M_j = x_{j0} + x_j - M_j = 0$. čili

$$x_j - l_j = 0, \text{ kde } l_j = M_j - x_{j0},\ j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{2}$$

Místo podmínek (1) můžeme psáti přibližně

$$f_g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}) + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_\varrho}\right)_0 x_\varrho = 0,$$

nebo

$$a_{g1}x_1 + a_{g2}x_2 + \ldots + a_{g\varrho}x_\varrho = a_{g0},\ g = 1, 2, \ldots, \sigma, \tag{3}$$

kde

$$a_{gj} = \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_j}\right)_0,\ a_{g0} = -f_g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}).$$

Rovnice (3) mají býti splněny přesně, proto nejsou všechny neznámé nezávislé. Z rovnic (3) můžeme vyjádřiti na př. $x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$ jako lineární funkce neznámých $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$, jejichž počet je $\varrho - \sigma$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \dots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10},\\
x_2 &= A_{21}x_{\sigma+1} + A_{22}x_{\sigma+2} + \dots + A_{2,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{20},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_\sigma &= A_{\sigma1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma2}x_{\sigma+2} + \dots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma0}.
\end{aligned} \tag{3'}$$

Máme tedy určiti $\varrho - \sigma$ nezávislých neznámých tak, aby bylo splněno pokud možno přesně ϱ rovnic:

$$\begin{aligned}
&A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \dots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10} - l_1 = 0,\\
&A_{21}x_{\sigma+1} + A_{22}x_{\sigma+2} + \dots + A_{2,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{20} - l_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_{\sigma1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma2}x_{\sigma+2} + \dots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma0} - l_\sigma = 0,\\
&\qquad\qquad x_{\sigma+1} - l_{\sigma+1} = 0,\\
&\qquad\qquad x_{\sigma+2} - l_{\sigma+2} = 0,\\
&\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\\
&\qquad\qquad x_\varrho \quad - l_\varrho \quad = 0.
\end{aligned} \tag{2'}$$

Protože počet nezávislých neznámých $(\varrho - \sigma)$ je menší než počet těchto rovnic (ϱ), nebude obecně lze nalézti takové hodnoty $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \dots, x_\varrho$, aby všechny rovnice (2′) byly splněny. Ať dosadíme za $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \dots, x_\varrho$ jakékoli hodnoty, budou levé strany rovnic (2′) rovny malým veličinám v_j. Tedy

$$\begin{aligned}
&A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \dots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10} - l_1 = v_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_{\sigma1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma2}x_{\sigma+2} + \dots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma0} - l_\sigma = v_\sigma,\\
&\qquad\qquad x_{\sigma+1} - l_{\sigma+1} = v_{\sigma+1},\\
&\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\\
&\qquad\qquad x_\varrho \quad - l_\varrho \quad = v_\varrho.
\end{aligned} \tag{2''}$$

Předpokládejme, že váha j-té rovnice je p_j. Hodnoty vah odhadujeme v tomto případě obyčejně podle středních chyb měřených veličin M_j, vypočtených přímo z měření, nebo podle výsledků podobných měření dřívějších. Máme-li důvod k úsudku, že váhy jsou stejné, klademe je obyčejně rovné 1.

Tím bylo převedeno vyrovnání závislých měření na vyrovnání zprostředkujících měření. Vyrovnané hodnoty $x'_{\sigma+1}$,

$x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$ určíme jako v kap. III tak, aby byl minimální součet $\sum_{j=1}^{\varrho} p_j v_j^2$. Z podmínek pro minimum (derivace podle neznámých $x'_{\sigma+1}, x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$ mají býti rovny nule) plyne $\varrho - \sigma$ normálních rovnic, z nichž vypočteme nezávislé neznámé $x'_{\sigma+1}, x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$. Dosadíme-li tyto vypočtené hodnoty za $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$ do rovnic (3'), dostaneme vyrovnané hodnoty $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\sigma$.

Střední chyba pro jednotku váhy plyne stejně jako v kap. III ze vzorce (20")

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{\varrho - (\varrho - \sigma)}} = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{\sigma}}. \tag{4}$$

Lomená závorka značí součet členů $p_j v_j^2$ pro všechny hodnoty indexu $j = 1, 2, \ldots, \varrho$.

2. Vyrovnání závislých měření užitím korelát. Často se však užívá při výpočtu vyrovnaných hodnot $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ jiného postupu.*) Tyto hodnoty mají činiti součet

$$\sum_{j=1}^{\varrho} p_j v_j^2 = \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)^2$$

minimem a při tom mají přesně splňovati podmínky (3).

Podmínka minima jest

$$2 \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j) \, \mathrm{d}x'_j = 0. \tag{5}$$

Ale protože veličiny $x'_1, \ldots, x'_\varrho$ musí přesně splňovati rovnice (3), nejsou přírůstky $\mathrm{d}x'_j$ nezávislé, nýbrž musí vyhovovati σ podmínkám

$$a_{g1} \, \mathrm{d}x'_1 + a_{g2} \, \mathrm{d}x'_2 + \ldots + a_{g\varrho} \, \mathrm{d}x'_\varrho = 0, \; g = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{6}$$

Z těchto rovnic a z podmínky (5) vyloučíme σ závislých pří-

*) J. Vojtěch, l. c. I, str. 411—413. — K. Petr, l. c. str. 414—418.

růstků a položíme koeficienty u nezávislých přírůstků rovny nule.

Předpokládejme, že na př. determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\sigma} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\sigma} \\ \vdots \\ a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Násobme rovnice (6) po řadě koeficienty $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_\sigma$, a odečtěme je od rovnice (5). Bude

$$\sum_{j=1}^{\varrho} \{p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j}\} \, \mathrm{d}x'_j = 0.$$

Určeme tak koeficienty $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, kterým se říká koreláty, aby faktory u $\mathrm{d}x'_1, \ldots, \mathrm{d}x'_\sigma$ byly rovny nule. To je za uvedeného předpokladu o determinantu Δ možné.

Pak ale zbývá podmínka

$$\sum_{j=\sigma+1}^{\varrho} \{p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j}\} \, \mathrm{d}x'_j = 0,$$

a protože přírůstky $\mathrm{d}x'_{\sigma+1}, \ldots, \mathrm{d}x'_\varrho$ jsou nezávislé, musí jejich koeficienty býti rovněž rovny nule.

Celkem tedy musí býti

$$p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{7}$$

Levé strany těchto podmínek jsou parciální derivace funkce

$$\begin{aligned} F = {} & p_1 (x_1 - l_1)^2 + p_2 (x_2 - l_2)^2 + \ldots + p_\varrho (x_\varrho - l_\varrho)^2 - \\ & - 2k_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1\varrho} x_\varrho - a_{10}) - \\ & - 2k_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2\varrho} x_\varrho - a_{20}) - \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2k_\sigma (a_{\sigma 1} x_1 + a_{\sigma 2} x_2 + \ldots + a_{\sigma\varrho} x_\varrho - a_{\sigma 0}). \end{aligned} \tag{8}$$

Podmínky (7) tedy vypočteme, anulujeme-li parciální derivace prvního řádu funkce F podle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$.

Zvolíme-li za přibližné hodnoty pro neznámé $x'_1, \ldots, x'_\varrho$ naměřené hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_\varrho$, jest $x_{j0} = M_j$, tedy $l_j = 0$.

Z rovnic (7) plyne

$$x'_j = \frac{1}{p_j} \sum_{g=1}^{\sigma} k_g a_{gj} + l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{7'}$$

Tyto vzorce vyjadřují neznámé $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ pomocí korelát $k_1, \ldots, k_\sigma$. Dosadíme-li odtud za x'_j do první z rovnic (3), plyne

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{11}}{p_1}(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{\sigma 1}k_\sigma + l_1 p_1) + \\
&+ \frac{a_{12}}{p_2}(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{\sigma 2}k_\sigma + l_2 p_2) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{a_{1\varrho}}{p_\varrho}(a_{1\varrho}k_1 + a_{2\varrho}k_2 + \ldots + a_{\sigma\varrho}k_\sigma + l_\varrho p_\varrho) - a_{10} = 0,
\end{aligned}$$

a uspořádáme-li jako lineární funkci korelát $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, bude

$$k_1\left[\frac{a_{1j}{}^2}{p_j}\right] + k_2\left[\frac{a_{1j}a_{2j}}{p_j}\right] + \ldots + k_\sigma\left[\frac{a_{1j}a_{\sigma j}}{p_j}\right] - a_{10} + [a_{1j}l_j] = 0.$$

Aby se vzorce zjednodušily, zavedeme pro převrácenou hodnotu vah značku $q_j = 1 : p_j$ a vynecháme druhý index j, podle něhož se tvoří součty naznačené lomenou závorkou. Pak bude předcházející rovnice a ostatní rovnice, které plynou, dosadíme-li do dalších rovnic (3):

$$\begin{aligned}
&k_1[qa_1{}^2] + k_2[qa_1a_2] + \ldots + k_\sigma[qa_1a_\sigma] - a_{10} + [a_1 l] = 0, \\
&k_1[qa_2a_1] + k_2[qa_2{}^2] + \ldots + k_\sigma[qa_2a_\sigma] - a_{20} + [a_2 l] = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&k_1[qa_\sigma a_1] + k_2[qa_\sigma a_2] + \ldots + k_\sigma[qa_\sigma{}^2] - a_{\sigma 0} + [a_\sigma l] = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Zvolíme-li $x_{j0} = M_j$, bude $l_j = 0$ a v rovnicích (9) odpadnou členy $[a_1 l] = [a_2 l] = \ldots = [a_\sigma l] = 0$.

Těmto rovnicím se říká **normální rovnice pro koreláty**. Z nich vypočteme koreláty na př. Gaussovým postupem (III, 2). Pak ze vzorců (7') plynou neznámé x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_ϱ.

Výpočet normálních rovnic (9) pro koreláty se zase kontroluje **součtovou kontrolou**. Připojíme ke koeficientům z rovnic (3), t. j. k číslům

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\varrho}, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\varrho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma\varrho}, \end{matrix} \tag{10}$$

součty jednotlivých sloupců, $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$, takže je

$$s_1 = \sum_{g=1}^{\sigma} a_{g1}, \quad s_2 = \sum_{g=1}^{\sigma} a_{g2}, \quad \text{atd.}$$

Násobíme-li na př. sloupce (10) po řadě čísly $q_1 a_{11}, q_2 a_{12}, \ldots q_\varrho a_{1\varrho}$, budou součty v jednotlivých řádcích $[qa_1^2]$, $[qa_1a_2]$, $\ldots$, $[qa_1a_\sigma]$, $[qa_1s]$, a při tom

$$[qa_1s] = [qa_1^2] + [qa_1a_2] + \cdots + [qa_1a_\sigma].$$

Tak jsou kontrolovány koeficienty první normální rovnice pro koreláty. Podobně se kontrolují i koeficienty ostatních normálních rovnic, pro něž

$$[qa_2s] = [qa_2a_1] + [qa_2^2] + \cdots + [qa_2a_\sigma],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[qa_\sigma s] = [qa_\sigma a_1] + [qa_\sigma a_2] + \cdots + [qa_\sigma^2].$$

Koreláty $k_{\sigma-1}, k_{\sigma-2}, \ldots, k_1$ se počítají vždy ze dvou různých redukovaných rovnic. Tím ověříme správnost výpočtu korelát. Správnost výpočtu neznámých $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ ze vzorců (7') ověříme, dosadíme-li vypočtené hodnoty do podmínek (3).

3. Výpočet součtu $[pvv]$. a) Součet $[pvv]$, kterého potřebujeme k výpočtu střední chyby m_0 pro jednotku váhy, můžeme počítati přímo z hodnot x'_j; vypočteme odchylky $v_j = x'_j - l_j$, čtverce v_j^2, pak součiny $p_j v_j^2$ a utvoříme součet pro všechna $j = 1, 2, \ldots, \varrho$.

b) Nepřímá cesta.

α) Užijeme-li vzorce (7), můžeme psáti

$$[pvv] = \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\varrho} (k_1 a_{1j} + \ldots + k_\sigma a_{\sigma j}) \cdot q_j (k_1 a_{1j} + \ldots + k_\sigma a_{\sigma j}) =$$

$$= k_1 \{k_1 [q a_1 a_1] + k_2 [q a_1 a_2] + \ldots + k_\sigma [q a_1 a_\sigma]\} +$$
$$+ k_2 \{k_1 [q a_2 a_1] + k_2 [q a_2 a_2] + \ldots + k_\sigma [q a_2 a_\sigma]\} + \ldots +$$
$$+ k_\sigma \{k_1 [q a_\sigma a_1] + k_2 [q a_\sigma a_2] + \ldots + k_\sigma [q a_\sigma a_\sigma]\}.$$

Užijeme-li rovnic (9) a položíme-li $l_j = 0$, bude

$$[pvv] = a_{10} k_1 + a_{20} k_2 + \ldots + a_{\sigma 0} k_\sigma. \tag{11}$$

Můžeme tedy počítati součet $[pvv]$ podle vzorce (11) z hodnot korelát.

β) Podobně jako ve výpočtu $[pvv]$ (viz III, 6), můžeme vyloučiti koreláty ze vzorce (11) a z normálních rovnic (9). V tomto případě je místo $[pll]$ nyní 0, místo koeficientů $-[pal], -[pbl], -[pcl]$ atd. je nyní $+a_{10}, +a_{20}, +a_{30}, \ldots$, místo $[paa]$ je nyní $[q a_1 a_1]$, (t. j. koeficient u k_1 v první z rovnic (9)), místo $[pbb \,.\, 1]$, $[pbl \,.\, 1]$ nyní $[q a_2 a_2 \,.\, 1]$, $[a_{20} \,.\, 1]$ (koeficient u k_2 a prostý člen v první redukované rovnici prvního řádu) a místo $[pcc \,.\, 2]$, $[pcl \,.\, 2]$ nyní $[q a_3 a_3 \,.\, 2]$, $[a_{30} \,.\, 2]$ (koeficient u k_3 a prostý člen v první redukované rovnici druhého řádu).

Pak podle vzorce [III, (22)] plyne

$$[pvv] = \frac{a_{10}^2}{[q a_1 a_1]} + \frac{[a_{20} \,.\, 1]^2}{[q a_2 a_2 \,.\, 1]} + \frac{[a_{30} \,.\, 2]^2}{[q a_3 a_3 \,.\, 2]} + \ldots \tag{11'}$$

z koeficientů a prostých členů normálních a redukovaných rovnic.

4. Střední chyba lineární funkce vyrovnaných hodnot. Chceme vypočísti střední chybu funkce $\Phi = f_0 + f_1 x'_1 + + f_2 x'_2 + \ldots + f_\varrho x'_\varrho$. K tomu cíli musíme vyjádřiti Φ jako lineární funkci měřených veličin M_i nebo veličin l_i. Bude

$$\Phi = f_0 + \sum_{j=1}^{\varrho} f_j x'_j = f_0 + \sum_{j=1}^{\varrho} \{f_j q_j \sum_{g=1}^{\sigma} k_g a_{gj} + f_j l_j\} =$$
$$= f_0 + \sum_{g=1}^{\sigma} k\, [q a_g f] + [fl].$$

Zavedeme veličiny $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, které splňují rovnice

$$\begin{aligned} h_1 [qa_1a_1] + h_2 [qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_1a_\sigma] &= [qa_1f], \\ h_1 [qa_2a_1] + h_2 [qa_2a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_2a_\sigma] &= [qa_2f], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ h_1 [qa_\sigma a_1] + h_2 [qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_\sigma a_\sigma] &= [qa_\sigma f]. \end{aligned} \qquad (12)$$

Násobíme-li rovnice (9) po řadě čísly $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, sečteme-li a přihlédneme-li k rovnicím (12), dostaneme

$$k_1 [qa_1f] + k_2 [qa_2f] + \ldots + k_\sigma [qa_\sigma f] = \sum_{g=1}^{\sigma} k_g [qa_g f] = a_{10}h_1 +$$
$$+ a_{20}h_2 + \ldots + a_{\sigma 0}h_\sigma - h_1 [a_1l] - h_2 [a_2l] - \ldots - h_\sigma [a_\sigma l],$$

tedy

$$\Phi = f_0 + a_{10}h_1 + a_{20}h_2 + \ldots + a_{\sigma 0}h_\sigma +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\varrho} (f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})\, l_j.$$

Protože střední chyba j-té z rovnic (2) je rovna $m_0 : \sqrt{p_j}$, bude podle vzorce [I, (12″)] čtverec střední chyby funkce Φ roven

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2 \sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})^2. \qquad (13)$$

Vzorec (13) můžeme ještě upraviti takto:

$$\sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}) (f_j - h_1 a_{1j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}) =$$
$$= [qff] - 2h_1 [qfa_1] - 2h_2 [qfa_2] - \ldots - 2h_\sigma [qfa_\sigma] +$$
$$+ h_1 \{h_1 [qa_1 a_1] + h_2 [qa_1 a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_1 a_\sigma]\} +$$
$$+ h_2 \{h_1 [qa_2 a_1] + h_2 [qa_2 a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_2 a_\sigma]\} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ h_\sigma \{h_1 [qa_\sigma a_1] + h_2 [qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_\sigma a_\sigma]\}.$$

Užijeme-li vzorců (12) a sloučíme-li, jest

$$\sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})^2 =$$
$$= [qff] - h_1 [qfa_1] - h_2 [qfa_2] - \ldots - h_\sigma [qfa_\sigma],$$

tedy

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \{[qff] - h_1 [qfa_1] - h_2 [qfa_2] - \ldots - h_\sigma [qfa_\sigma]\}. \quad (13')$$

Podobně jako v (III, 6) o výpočtu $[pvv]$, můžeme vyloučiti veličiny $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ ze vzorce (13′) a z rovnic (12). Jen místo p je nyní q, místo l jest f a místo $a, b, c, \ldots$ je nyní $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Místo vzorce [III, (22)] bude tedy

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left(q[ff] - \frac{[qa_1 f]^2}{[qa_1 a_1]} - \frac{[qa_2 f \,.\, 1]^2}{[qa_2 a_2 \,.\, 1]} - \frac{[qa_3 f \,.\, 2]^2}{[qa_3 a_3 \,.\, 2]} - \ldots \right). \quad (13'')$$

Při tom $[qa_1 a_1]$, $[qa_1 f]$ jest koeficient u h_1 a prostý člen v první z rovnic (12), $[qa_2 a_2 \,.\, 1]$, $[qa_2 f \,.\, 1]$ je koeficient u h_2 a prostý člen v příslušné první redukované rovnici prvního řádu, $[qa_3 a_3 \,.\, 2]$, $[qa_3 f \,.\, 2]$ je koeficient u h_3 a prostý člen v první redukované rovnici druhého řádu atd.

Jde-li na př. o jedinou podmínku

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1\varrho} x_\varrho = a_{10},$$

bude také jediná veličina h_1 a příslušná rovnice (12) jest

$$h_1 [qa_1 a_1] = [qa_1 f],$$

takže čtverec střední chyby lineární funkce vyrovnaných hodnot $\Phi = f_0 + f_1 x'_1 + f_2 x'_2 + \dots + f_\varrho x'_\varrho$ bude podle vzorce (13′) nebo (13″) roven

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ [qff] - \frac{[qa_1 f]^2}{[qa_1 a_1]} \right\}. \tag{14}$$

Nechť jde o σ podmínek tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 + y'_1 + z'_1 &= a_{10}, \\ x'_2 + y'_2 + z'_2 &= a_{20}, \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots \\ x'_\sigma + y'_\sigma + z'_\sigma &= a_{\sigma 0}; \end{aligned} \tag{15}$$

váhy měřených veličin označíme $p_1, p'_1, p''_1; p_2, p'_2, p''_2; \dots; p_\sigma, p'_\sigma, p''_\sigma$. Chceme určiti střední chybu výrazu

$$\Phi = f_0 + \sum_{g=1}^{\sigma} (f_g x'_g + f'_g y'_g + f''_g z''_g).$$

Zavedeme čísla $h_1, h_2, \dots, h_\sigma$, která splňují rovnice (12),

$$h_g (q_g + q'_g + q''_g) = (q_g f_g + q'_g f'_g + q''_g f''_g), \quad g = 1, 2, \dots, \sigma.$$

Pak ze vzorce (13′) plyne

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{\sigma} \left\{ (q_g f_g^2 + q'_g f'^2_g + q''_g f''^2_g) - \frac{(q_g f_g + q'_g f'_g + q''_g f''_g)^2}{(q_g + q'_g + q''_g)} \right\}. \tag{15'}$$

Chceme ještě vypočísti, jaká je průměrná hodnota poměru váhy měřené hodnoty k váze vyrovnané hodnoty. Označíme váhu měřené hodnoty M_j písmenem p_j a váhu (střední chybu) vyrovnané hodnoty x'_j písmenem P_j (m_j). Máme tedy určiti průměrnou hodnotu $\frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j}$.

Protože $\frac{1}{P_j} = \frac{m_j^2}{m_0^2}$ a podle vzorce (13′) jest

$$\frac{m_j^2}{m_0^2} = q_j - h_1 q_j a_{1j} - h_2 q_j a_{2j} - \ldots - h_\sigma q_j a_{\sigma j},$$

bude

$$\frac{p_j}{P_j} = 1 - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j},$$

a

$$\sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \varrho - \sum_{j=1}^{\varrho} h_1 a_{1j} - \sum_{j=1}^{\varrho} h_2 a_{2j} - \ldots - \sum_{j=1}^{\varrho} h_\sigma a_{\sigma j}.$$

Při tom podle vzorců (12) jest

$$\begin{aligned}
h_1[qa_1a_1] + h_2[qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma[qa_1a_\sigma] &= q_j a_{1j},\\
h_1[qa_2a_1] + h_2[qa_2a_2[+ \ldots + h_\sigma[qa_2a_\sigma] &= q_j a_{2j},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_1[qa_\sigma a_1] + h_2[qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma[qa_\sigma a_\sigma] &= q_j a_{\sigma j}.
\end{aligned}$$

Odtud na př.

$$h_1 a_{1j} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} q_j a_{1j} a_{1j}, & [qa_1a_2], & \ldots, & [qa_1a_\sigma] \\ q_j a_{2j} a_{1j}, & [qa_2a_2], & \ldots, & [qa_2a_\sigma] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_j a_{\sigma j} a_{1j}, & [qa_\sigma a_2], & \ldots, & [qa_\sigma a_\sigma] \end{vmatrix},$$

kde Δ' je determinant předcházející soustavy lineárních rovnic; tedy

$$\sum_{j=1}^{\varrho} h_1 a_{1j} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} [qa_1a_1], & [qa_1a_2], & \ldots, & [qa_1a_\sigma] \\ [qa_2a_1], & [qa_2a_2], & \ldots, & [qa_2a_\sigma] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [qa_\sigma a_1], & [qa_\sigma a_2], & \ldots, & [qa_\sigma a_\sigma] \end{vmatrix} = 1.$$

Podobně

$$\sum_{j=1}^{\varrho} h_2 a_{2j} = 1, \ldots, \quad \sum_{j=1}^{\varrho} h_\sigma a_{\sigma j} = 1, \text{ tedy } \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \varrho - \sigma.$$

Počet sčítanců $p_j : P_j$ jest ϱ. Průměrná hodnota poměru váhy měřené hodnoty k váze vyrovnané hodnoty jest tedy

$$\frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \frac{\varrho - \sigma}{\varrho}. \tag{16}$$

5. Příklady na vyrovnání závislých měření. 1. V trojúhelníku ABC byly měřeny úhly $A = 61° 07' 52{,}00''$, $B = 76° 50' 54{,}00''$, $C = 42° 01' 12{,}15''$. Jejich váhy jsou po řadě 3, 2, 2, sférický excess $\varepsilon' = 2{,}11''$. Provésti vyrovnání.

Označíme-li opravy úhlů x_1, x_2, x_3, má býti $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ minimální a při tom má býti přesně splněna podmínka

$$x_1 + x_2 + x_3 = + 3{,}96''. \tag{17}$$

Funkce

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 + x_3 - 3{,}96'')$$

nabude minima, když

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0,$$

tedy když

$$3x'_1 = k_1, \; 2x'_2 = k_1, \; 2x'_3 = k_1;$$

dosadíme-li do rovnice (17), bude $k_1 (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = +3{,}96''$. To je normální rovnice, kterou bychom mohli přímo napsati podle první z rovnic (9): $k_1 [qa_1a_1] = a_{10}$. Odtud $k_1 = 2{,}97''$.

Pak

$$x'_1 = \tfrac{1}{3}k_1 = + 0{,}990'', \; x'_2 = \tfrac{1}{2}k_1 = + 1{,}485'' = x'_3.$$

Vyrovnané úhly budou:

$$\begin{aligned} A + x'_1 &= 61° 07' 52{,}990'', \\ B + x'_2 &= 76° 50' 55{,}485'', \\ C + x'_3 &= 42° 01' 13{,}635''. \end{aligned}$$

Střední chyba pro jednotku váhy je $m_0 = \pm\sqrt{[pvv] : 1}$, kde $v_j = x'_j$, tedy $[pvv] = 3x'^2_1 + 2x'^2_2 + 2x'^2_3 = 11{,}7611$. Podle vzorce (11) je $[pvv] = a_{10}k_1 = + 3{,}96'' . 2{,}97'' = 11{,}7612$. Pak $m_0 = \pm 3{,}43''$.

Čtverec střední chyby pro x_1 je podle vzorce (14), do něhož dosadíme $f_0 = f_2 = \ldots = f_\varrho = 0$ a $f_1 = 1$, roven

$$m_{x_1}^2 = m_0^2 \left\{ q_1 - \frac{q_1^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\} = m_0^2 \frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3},$$

odtud

$$m_{x_1}^2 = \tfrac{1}{4} m_0^2, \quad m_{x_1} = \pm\, 1{,}72''.$$

Podobně je

$$m_y^2 = m_0^2 \frac{q_2 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}, \qquad m_y = \tfrac{1}{4} m_0 \sqrt{5} = \pm\, 1{,}92'' = m_z.$$

To jsou střední chyby vyrovnaných úhlů uvažovaného trojúhelníka.

Můžeme je vypočísti také přímo takto: Jsou-li ΔA, ΔB, ΔC skutečné chyby úhlů A, B, C a tedy

$$k_1 = \frac{180^\circ + \varepsilon' - A - B - C}{q_1 + q_2 + q_3},$$

bude skutečná chyba ve vyrovnaném úhlu $A + x'_1$ rovna

$$\Delta A - \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{q_1 + q_2 + q_3}\, q_1 =$$

$$= \frac{(q_2 + q_3)\,\Delta A - q_1\,\Delta B - q_1\,\Delta C}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

A protože střední hodnoty $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ jsou $\frac{m_0}{\sqrt{p_1}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{p_2}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{p_3}}$ čili $m_0 \sqrt{q_1}$, $m_0 \sqrt{q_2}$, $m_0 \sqrt{q_3}$, bude čtverec střední chyby vyrovnaného úhlu $A + x'_1$ roven podle vzorce [I, (12″)]

$$\frac{m_0^2}{(q_1 + q_2 + q_3)^2} \left[(q_2 + q_3)^2 q_1 + q_1^2 q_2 + q_1^2 q_3\right] =$$

$$= m_0^2 \frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Podobně jest čtverec střední chyby pro vyrovnaný úhel $B + x'_2$ roven

$$m_0^2 \frac{q_2 (q_1 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}$$

a pro úhel $C + x'_3$ jest

$$m_0^2 \frac{q_3 (q_1 + q_2)}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Váhy vyrovnaných úhlů jsou po řadě rovny

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_1 (q_2 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_2 (q_1 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_3 (q_1 + q_2)}.$$

V uvažovaném zvláštním případě budou rovny číslům 4, $\frac{16}{5}$, $\frac{16}{5}$.

2. Na stanovisku bylo měřeno n úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tvořících dohromady plný úhel. Jaká je váha jednotlivých vyrovnaných úhlů, je-li váha každého měřeného úhlu rovna p?

V tomto případě je

$$F = px_1^2 + px_2^2 + \ldots + px_n^2 -$$
$$- 2k_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_{10}),$$

kde $a_{10} = 360° - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n$. Pak

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{k_1}{p},$$

a dosadíme-li do podmínky $x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n - a_{10} = 0$, bude

$$k_1 = \frac{a_{10}p}{n} \text{ a } x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{a_{10}}{n}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy je

$$m_0 = \pm \sqrt{p (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_n)} = k_1 \sqrt{\frac{n}{p}} = a_{10} \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Abychom vypočetli čtverec střední chyby vyrovnané hodnoty x_j (a vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x_j$), položíme ve vzorci (14) $f_j = 1$ a místo ostatních f klademe 0. Pak

$$m_{x_j}^2 = m_0^2 \left(q_j - \frac{q_j^2}{q_1 + q_2 + \cdots + q_n} \right) = m_0^2 \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 n} \right) =$$
$$= m_0^2 \frac{n-1}{pn},$$

tedy

$$m_{x_j} = \pm\, m_0 \sqrt{\frac{n-1}{pn}} = \pm \frac{a_{10}}{n} \sqrt{n-1}.$$

Váha vyrovnaného úhlu bude $pn : (n - 1)$.

Střední chybu vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x'_j$ můžeme počítati také přímo:

$$\alpha_j + x'_j = \alpha_j + \frac{360^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n}{n} =$$

$$= \frac{360^\circ}{n} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\alpha_2}{n} - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\alpha_j -$$

$$- \frac{\alpha_{j+1}}{n} - \ldots - \frac{\alpha_n}{n}.$$

Protože střední chyba jednoho měřeného úhlu je $m_0 : \sqrt{p}$, je střední chyba vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x'_j$ podle vzorce [I, (12″] rovna

$$m_0 \sqrt{\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)}{p} + \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{1}{p}} = m_0 \sqrt{\frac{n-1}{pn}}.$$

3. Mezi body Brest, Greenwich a Paříž byly v r. 1872 určeny tyto rozdíly zeměpisných délek:

Brest—Greenwich	$17^m\ 57{,}154^s$,	váha	10,
Greenwich—Paříž ...	$9^m\ 21{,}120^s$,	váha	7,
Brest—Paříž	$27^m\ 18{,}190^s$,	váha	9.

Určiti jejich vyrovnané hodnoty, jejich střední chyby a váhy nejprve obecně a pak číselně.*)

Označíme délkové rozdíly

$$\omega_{B-G} = \omega_1 + x_1,\ \omega_{G-P} = \omega_2 + x_2,\ \omega_{B-P} = \omega_3 + x_3,$$

má býti

$$\omega_1 + x_1 + \omega_2 + x_2 = \omega_3 + x_3, \text{ tedy } x_1 + x_2 - x_3 = a_{10},$$

*) Wright-Hayford, l. c. str. 166.

kde

$$a_{10} = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 = -0{,}084^s.$$

Funkce

$$F = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 - x_3 - a_{10}),$$

odtud

$$x'_1 = \frac{k_1}{p_1}, \quad x'_2 = \frac{k_1}{p_2}, \quad x'_3 = -\frac{k_1}{p_3}.$$

Dosadíme-li do rovnice

$$x'_1 + x'_2 - x'_3 = a_{10}, \text{ bude } k_1 = \frac{a_{10}}{q_1 + q_2 + q_3},$$

tedy

$$x'_1 = \frac{a_{10} q_1}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad x'_2 = \frac{a_{10} q_2}{q_1 + q_2 + q_3},$$

$$x'_3 = -\frac{a_{10} q_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

V uvažovaném zvláštním případě jest

$k_1 = 0{,}237^s$, $x'_1 = -0{,}024^s$, $x'_2 = -0{,}034^s$, $x'_3 = +0{,}026^s$

a tedy vyrovnané hodnoty délkových rozdílů jsou

$$17^m\,57{,}130^s;\ 9^m\,21{,}086^s;\ 27^m\,18{,}216^s.$$

Střední chyba pro jednotku váhy bude

$$m_0 = \pm \sqrt{p_1 x_1'^2 + p_2 x_2'^2 + p_3 x_3'^2} =$$
$$= \pm \sqrt{1{,}994 \cdot 10^{-2}} = \pm 0{,}141^s.$$

Podle vzorce (11) je

$$[pvv] = a_{10} k_1 = 1{,}991 \cdot 10^{-2}.$$

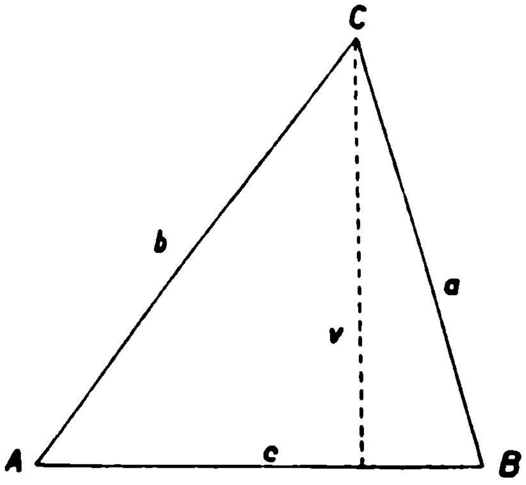
Jako v 1. příkladě jsou střední chyby vyrovnaných veličin x'_1, x'_2, x'_3 rovny

$$m_0 \sqrt{\frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}}, \quad m_0 \sqrt{\frac{q_2 (q_1 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}}, \quad m_0 \sqrt{\frac{q_3 (q_1 + q_2)}{q_1 + q_2 + q_3}}$$

a váhy daných délkových rozdílů jsou

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_1\,(q_2 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_2\,(q_1 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_3\,(q_1 + q_2)}.$$

V uvažovaném číselném příkladě jsou střední chyby $\pm 0{,}038^s$, $\pm 0{,}041^s$, $\pm 0{,}039^s$ a váhy po řadě $\frac{223}{16}$, $\frac{223}{19}$, $\frac{223}{17}$.



obr. 6

4. V trojúhelníku ABC (obr. 6) jsou vnitřní úhly měřeny s vahami p_1, p_2, p_3. Je-li dána délka strany $\overline{AB} = c$, o které předpokládáme, že je bez chyby, a je-li m_0 střední chyba pro jednotku váhy, jaká je relativní střední chyba délky $a = \overline{BC}$ a výšky v_c?

Označíme-li úhly A, B, C a jejich opravy x_1, x_2, x_3, bude jako v 1. příkladě

$$F = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 2k_1\,(x_1 + x_2 + x_3 - a_{10}),$$

kde

$$a_{10} = 180 + \varepsilon' - A - B - C.$$

Hledáme především střední chybu veličiny

$$a = \frac{c}{\sin C} \sin A.$$

Jsou-li ΔA, ΔB, ΔC skutečné chyby v úhlech A, B, C a jestliže skutečnou chybu v a označíme Δa, jest

$$\Delta a = \frac{\partial a}{\partial A}\,\Delta A + \frac{\partial a}{\partial C} \sin C.$$

A protože

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{c}{\sin C} \cos A = a \cotg A,$$

$$\frac{\partial a}{\partial C} = -\frac{c}{\sin^2 C}\sin A \cos C = -a \operatorname{cotg} C,$$

bude, zavedeme-li zkratky

$$c_1 = \operatorname{cotg} A,\quad c_2 = \operatorname{cotg} B,\quad c_3 = \operatorname{cotg} C,$$

relativní chyba

$$\Phi = \frac{\Delta a}{a} = c_1\,\Delta A - c_3\,\Delta C.$$

Protože tedy jde o střední chybu výrazu $c_1 x'_1 - c_3 x'_3$, stačí použíti vzorce (14), kde položíme $f_1 = c_1$, $f_2 = 0$, $f_3 = -c_3$. Bude tedy

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2\left\{q_1 c_1{}^2 + q_3 c_3{}^2 - \frac{(q_1 c_1 - q_3 c_3)^2}{q_1 + q_2 + q_3}\right\}.$$

Pro $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ bude

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2\left\{c_1{}^2 + c_3{}^2 - \frac{(c_1 - c_3)^2}{3}\right\} = \frac{2m_0{}^2}{3}(c_1{}^2 + c_1 c_3 + c_3{}^2).$$

Jde-li o trojúhelník rovnostranný, je

$$c_1 = c_3 = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a tedy

$$m_\Phi = m_0\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Chceme ještě vyhledati střední relativní chybu ve výšce

$$v_c = \frac{c}{\sin C}\sin A \sin B.$$

V tomto případě je

$$\frac{\Delta v_c}{v_c} = c_1\,\Delta A + c_2\,\Delta B - c_3\,\Delta C.$$

Půjde tedy o střední chybu lineárního výrazu

$$\Phi_1 = c_1 x'_1 + c_2 x'_2 - c_3 x'_3.$$

Užijeme-li zase vzorce (14), bude

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left\{ q_1c_1{}^2 + q_2c_2{}^2 + q_3c_3{}^2 - \frac{(q_1c_1 + q_2c_2 - q_3c_3)^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\}.$$

Je-li uvažovaný trojúhelník rovnoramenný a měříme-li oba úhly při základně stejně přesně, jest $c_1 = c_2$, $p_1 = p_2$ a tedy

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left\{ 2q_1c_1{}^2 + q_3c_3{}^2 - \frac{(2q_1c_1 - q_3c_3)^2}{2q_1 + q_3} \right\} =$$

$$= m_0{}^2\, 2q_1q_3 \frac{(c_1 + c_3)^2}{2q_1 + q_3} = m_0{}^2 \frac{2(c_1 + c_3)^2}{p_1 + 2p_3}.$$

V tomto případě je

$$c_1 = \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg}(90 - \tfrac{1}{2}C) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C,$$

takže

$$c_1 + c_3 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{cotg} C = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}C}{2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}C}{2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C} = \frac{1}{\sin C},$$

tedy

$$m_{\Phi_1} = \frac{m_0}{\sin C} \sqrt{\frac{2}{p_1 + 2p_3}}.$$

5. Od vrcholu P_0 je veden podél poledníku bodu P_0 řetěz σ trojúhelníků (obr. 7), s vrcholy $P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma+1}$, v nichž byly měřeny všechny úhly se stejnou přesností. Jaká je střední chyba: a) ve straně $s_g = P_gP_{g+1}$; b) v úhlu, který svírá strana s_g s poledníkem bodu P_0; c) v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ čáry $P_0P_1 \ldots P_{\sigma+1}$ do poledníku bodu P_0.*) (Výpočty prováděti jakoby body $P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma+1}$ ležely v rovině.)

Délku P_0P_1 označíme s_0 a předpokládáme o ní, že byla změřena bez chyby. Měřené úhly v g-tém trojúhelníku jsou

*) A. R. Charke: Geodesy, Oxford 1880, str. 225—227.

A_g, B_g, C_g a jejich opravy x_g, y_g, z_g. Podmínka z g-tého trojúhelníka bude

$$x_g + y_g + z_g = a_{g0}, \quad (17')$$

kde

$$a_{g0} = 180^0 - A_g - B_g - C_g.$$

Funkce F je v tomto případě

$$F = \sum_{g=1}^{\sigma} (x_g^2 + y_g^2 + z_g^2) -$$

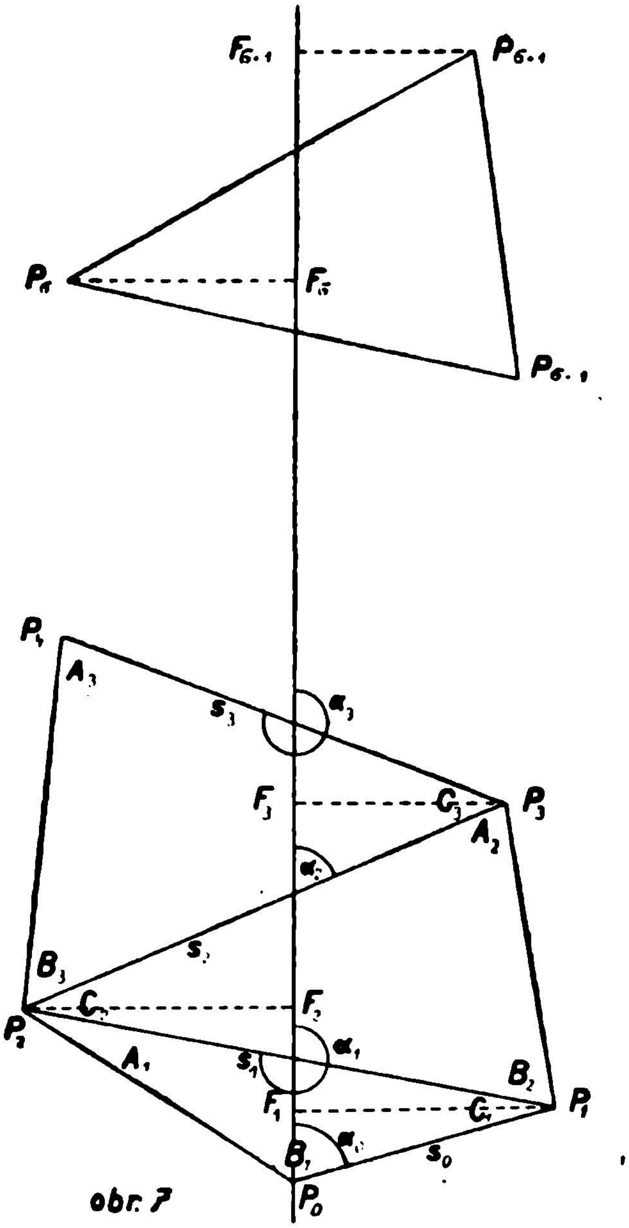
$$- 2k_g (x_g + y_g + z_g - a_{g0}).$$

Anulováním derivací podle x_g, y_g, z_g plyne $x'_g = y'_g = z'_g = k_g$. Dosadíme-li do podmínek (17'), bude

$$y'_g = x'_g = z'_g = \tfrac{1}{3} a_{g0},$$

tedy vyrovnané hodnoty úhlů v g-tém trojúhelníku jsou

$$A_g + x'_g, \; B_g + y'_g, \; C_g + z'_g.$$



obr. 7

Označíme-li střední chybu pro jednotku váhy (t. j. v jednom měřeném úhlu) písmenem m_0, pak podle vzorce (15'), kde klademe na př. $f_g = 1$ a ostatní f rovna 0 a $q_g = q'_g = q''_g = 1$, plyne střední chyba ve vyrovnaném úhlu

$$m_0 \sqrt{q_g - \frac{q_g}{q_g + q'_g + q''_g}} = m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

a) Abychom odvodili vztah mezi skutečnými chybami ΔA_i, ΔB_i, $i = 1, 2, \ldots, g$ a příslušnou skutečnou chybou strany s_g, vyjdeme z věty sinové

$$s_g = s_0 \frac{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_g}{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_g}.$$

A_1 jest úhel proti dané straně s_0, B_1 proti první hledané straně s_1 atd.

Ze změněných hodnot úhlů bychom vypočetli

$$s_g + \Delta s_g = s_0 \frac{\sin(B_1+\Delta B_1)\sin(B_2+\Delta B_2)\ldots\sin(B_g+\Delta B_g)}{\sin(A_1+\Delta A_1)\sin(A_2+\Delta A_2)\ldots\sin(A_g+\Delta A_g)}.$$

Logaritmováním plyne odtud

$$\log(s_g + \Delta s_g) - \log s_0 = \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin(B_i + \Delta B_i) - \\ - \log\sin(A_i + \Delta A_i)\}$$

a z předcházející rovnice

$$\log s_g - \log s_0 = \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin B_i - \log\sin A_i\},$$

tedy

$$\log(s_g + \Delta s_g) - \log s_g = \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin(B_i+\Delta B_i) - \log\sin B_i\} - \\ - \sum_{i=1}^{g}\{\log\sin(A_i + \Delta A_i) - \log\sin A_i\}.$$

Rozdíl

$$\log(s_g + \Delta s_g) - \log s_g = M \log\frac{s_g + \Delta s_g}{s_g} = \\ = M\log\left(1 + \frac{\Delta s_g}{s_g}\right) \doteq M \,.\, \frac{\Delta s_g}{s_g}.$$

Označíme-li značkami δA_i, δB_i tabulkové diference pro log sin a jednu vteřinu v místě A_i, resp. B_i, jest

$$\log\sin(B_i + \Delta B_i) - \log\sin B_i \doteq \Delta B_i\,\delta B_i$$

a

$$\log\sin(A_i + \Delta A_i) - \log\sin A_i \doteq \Delta A_i\,\delta A_i,$$

tedy

$$\frac{\Delta s_g}{s_g} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{g}(\Delta B_i\,\delta B_i - \Delta A_i\,\delta A_i).$$

Půjde tedy o střední chybu výrazu

$$\Phi = \frac{\Delta s_g}{s_g} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{g}(y'_i\,\delta B_i - x'_i\,\delta A_i).$$

Užijeme zase vzorce (15′), v němž klademe

$$q_g = q'_g = q''_g = 1,\ f_g = -\,\delta A_i,\ f'_g = +\,\delta B_i,\ f''_g = 0.$$

Pak

$$m_\Phi{}^2 = \frac{m_0{}^2}{M^2}\sum_{i=1}^{g}\left\{\delta A_i{}^2 + \delta B_i{}^2 - \frac{(-\,\delta A_i + \delta B_i)^2}{3}\right\} =$$

$$= \frac{m_0{}^2}{M^2}\,\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{g}(\delta A_i{}^2 + \delta A_i\,\delta B_i + \delta B_i{}^2).$$

Tedy střední relativní chyba ve straně s_g jest

$$\frac{m_0}{M}\sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{g}(\delta A_i{}^2 + \delta A_i\,\delta B_i + \delta B_i{}^2)}. \qquad (18)$$

Při tom ΔA_i, ΔB_i, ΔC_i a tedy i m_0 značí počet vteřin, tedy prostá čísla.

b) Označíme-li úhel, který svírá strana s_0 s poledníkem bodu P_0, písmenem α_0 (azimut bodu P_1, čítaný od severu přes východ na západ), bude

azimut směru P_1P_2 roven $\alpha_1 = \ \ 180^\circ + \alpha_0 + C_1$,
azimut směru P_2P_3 jest $\alpha_2 = -\,180^\circ + \alpha_1 - C_2$,
azimut směru P_3P_4 jest $\alpha_3 = \ \ 180^\circ + \alpha_2 + C_3$,
azimut směru P_4P_5 jest $\alpha_4 = -\,180^\circ + \alpha_3 - C_4$,
. . . .

azimut směru P_gP_{g+1} jest

$$\alpha_g = (-1)^{g-1}\,180^\circ + \alpha_{g-1} + (-1)^{g-1}\,C_g.$$

Odtud

$$\alpha_g = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases} + \alpha_0 + C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{g-1} C_g.$$

Ve vzorci klademe $\begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$, je-li g $\begin{cases} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{cases}$.

Předpokládáme-li, že azimut první strany (α_0) byl změřen bez chyby, bude skutečná chyba v α_g rovna

$$\Delta\alpha_g = \Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g.$$

Půjde tedy o střední chybu výrazu

$$\Phi_1 = z'_1 - z'_2 + \ldots + (-1)^{g-1} z'_g,$$

a užijeme-li vzorce (15'), plyne

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left(\tfrac{2}{3}g\right);$$

střední chyba v α_g bude proto rovna

$$m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}g}.$$

c) Průmět

$$P_0F_{\sigma+1} = s_0 \cos\alpha_0 + s_1 \cos\alpha_1 + \ldots + s_\sigma \cos\alpha_\sigma.$$

Skutečná chyba v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ je rovna

$$\sum_{g=1}^{\sigma} (\Delta s_g \cos\alpha_g - s_g \sin\alpha_g \,\Delta\alpha_g).$$

Viděli jsme, že

$$\Delta s_g = \frac{s_g}{M} \sum_{i=1}^{g} (\delta B_i \,\Delta B_i - \delta A_i \,\Delta A_i),$$

$$\Delta\alpha_g = \Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g,$$

tedy skutečná chyba v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ je

$$\sum_{g=1}^{\sigma} \Bigg\{ \frac{s_g \cos\alpha_g}{M} \sum_{i=1}^{g} \delta B_i \,\Delta B_i - \delta A_i \,\Delta A_i -$$

$$- s_g \sin\alpha_g (\Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g) \Bigg\}.$$

Označíme délky průmětů od F_1 do $F_{\sigma+1}$, t. j. $s_1 \cos \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \cos \alpha_\sigma$ písmenem $\overline{P}_\sigma$ a délky průmětů do přímky kolmé k poledníku, t. j. $s_1 \sin \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \sin \alpha_\sigma$, písmenem $\overline{Q}_\sigma$ (pro $\sigma = 1, 2, \ldots, \sigma$). Pak můžeme psáti skutečnou chybu v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$:

$$(\delta B_1 \Delta B_1 - \delta A_1 \Delta A_1) \frac{\overline{P}_\sigma}{M} + (\delta B_2 \Delta B_2 - \delta A_2 \Delta A_2) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_1}{M} +$$
$$+ (\delta B_3 \Delta B_3 - \delta A_3 \Delta A_3) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_2}{M} + \ldots +$$
$$+ (\delta B_\sigma \Delta B_\sigma - \delta A_\sigma \Delta A_\sigma) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_{\sigma-1}}{M} - \overline{Q}_\sigma \Delta C_1 +$$
$$+ (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_1) \Delta C_2 - (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_2) \Delta C_3 +$$
$$+ \ldots - (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_{\sigma-1}) (-1)^{\sigma-1} \Delta C_\sigma.$$

Půjde tedy zde o střední chybu výrazu

$$\Phi_2 = (-x'_1 \delta A_1 + y'_1 \delta B_1) \frac{\overline{P}_\sigma}{M} - z'_1 \overline{Q}_\sigma +$$
$$+ (-x'_2 \delta A_2 + y'_2 \delta B_2) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_1}{M} + z'_2 (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_1) +$$
$$+ (-x'_3 \delta A_3 + y'_3 \delta B_3) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_2}{M} - z'_3 (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_2) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (-x'_\sigma \delta A_\sigma + y'_\sigma \delta B_\sigma) \frac{\overline{P}_\sigma - \overline{P}_{\sigma-1}}{M} -$$
$$- z'_\sigma (\overline{Q}_\sigma - \overline{Q}_{\sigma-1}) (-1)^{\sigma-1}.$$

Protože $q_g = q'_g = q''_g = 1$, bude podle vzorce (15'):

$$m_{\Phi_2}^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{\sigma} \left\{ (f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g) - \frac{(f_g + f'_g + f''_g)^2}{3} \right\}.$$

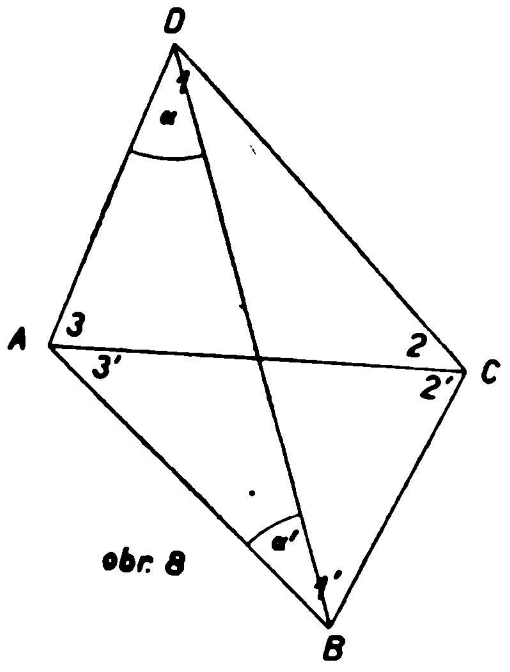
Další výpočet se doporučuje prováděti číselně.

6. V řetězci pěti podobných rovnoramenných trojúhelníků, v nichž úhly při vrcholech jsou 38° a úhly při základně 71°, je dána základna s_0 prvního trojúhelníka. Je-li m_0 střední chyba jednoho měřeného úhlu a předpokládáme-li, že byly měřeny všechny úhly v trojúhelnících a že byly vyrovnány, jaká je relativní střední chyba strany s_5?

Podle vzorce (18) je střední relativní chyba strany s_5 rovna

$$\frac{m_0}{M}\sqrt{\tfrac{10}{3}\,(\delta^2 38^\circ + \delta 38^\circ\, \delta 71^\circ + \delta^2 71^\circ)}.$$

Protože $\delta 38^\circ = 26{,}9\,.\,10^{-7}$, $\delta 71^\circ = 7{,}2\,.\,10^{-7}$, bude střední relativní chyba strany s_5 rovna $1{,}31\,.\,10^{-5} m_0$.



obr. 8

7. Ve čtyrúhelníku $ABCD$ (obr. 8) je dána úhlopříčka $z = \overline{AC}$ a byly měřeny úhly (1), (2), (3); (1'), (2'), (3') s vahami rovnými po řadě p_1, p'_1, p''_1; p_2, p'_2, p''_2. Určiti střední relativní chybu úhlopříčky $\overline{BD} = Z$.*)

V tomto případě je

$$Z^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AD}\,.\,\overline{AB}\cos[(3) + (3')],$$

a

$$\overline{AD} = \frac{z}{\sin(1)}\sin(2),\quad \overline{AB} = \frac{z}{\sin(1')}\sin(2').$$

Abychom vypočetli, jak závisí chyba v délce Z na chybách $\Delta 1, \Delta 2, \ldots, \Delta 3'$ měřených úhlů, postupujeme takto: Derivujeme výraz pro Z^2 podle (1). Jest

*) Jordan, l. c. III, Stuttgart 1907 (5. vyd.), str. 153—155.

$$Z\frac{dZ}{d(1)} = \overline{AD}\,.\,\frac{d\overline{AD}}{d(1)} - \overline{AB}\cos[(3)+(3')]\,\frac{d\overline{AD}}{d(1)}\,,$$

$$\frac{d\overline{AD}}{d(1)} = -\frac{z}{\sin^2(1)}\sin(2)\cos(1) = -\overline{AD}\operatorname{cotg}(1) =$$
$$= -\overline{AD}c_1,$$

edy

$$Z\frac{dZ}{d(1)} = -\overline{AD}c_1\,\{\overline{AD} - \overline{AB}\cos[(3)+(3')]\},$$

a protože (viz obr. 8)

$$\overline{AD} - \overline{AB}\cos[(3)+(3')] = Z\cos\alpha,$$

je

$$\frac{dZ}{d(1)} = -\overline{AD}\,c_1\cos\alpha.$$

Podobně je

$$\frac{dZ}{d(2)} = +\overline{AD}\,c_2\cos\alpha, \qquad \frac{dZ}{d(1')} = -\overline{AB}\,c'_1\cos\alpha',$$

$$\frac{dZ}{d(2')} = +\overline{AB}\,c'_2\cos\alpha',$$

kde

$$c_2 = \operatorname{cotg}(2),\ c'_1 = \operatorname{cotg}(1'),\ c'_2 = \operatorname{cotg}(2').$$

Dále

$$\frac{ZdZ}{d(3)} = +\overline{AD}\,.\,\overline{AB}\sin[(3)+(3')],$$

a protože

$$\overline{AB}\sin[(3)+(3')] = Z\sin\alpha$$

(viz obr. 8), je

$$\frac{dZ}{d(3)} = \overline{AD}\sin\alpha.$$

Podobně

$$\frac{dZ}{d(3')} = \overline{AB} \sin \alpha'.$$

Půjde tedy o výpočet střední chyby pro výraz

$$\Phi = f_1(1) + f'_1(2) + f''_1(3) + f_2(1') + f'_2(2') + f''_2(3'),$$

kde

$$f_1 = -\overline{AD}c_1 \cos \alpha, \quad f'_1 = +\overline{AD}c_2 \cos \alpha, \quad f''_1 = \overline{AD} \sin \alpha,$$
$$f_2 = -\overline{AB}c'_1 \cos \alpha', \quad f'_2 = +\overline{AB}c'_2 \cos \alpha', \quad f''_2 = \overline{AB} \sin \alpha'.$$

Při tom podmínky jsou

$$(1) + (2) + (3) = a_{10}, \quad (1') + (2') + (3') = a_{20}.$$

Podle vzorce (15′) bude

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ q_1 f_1^2 + q'_1 f'^2_1 + q''_1 f''^2_1 + q_2 f_2^2 + q'_2 f'^2_2 + q''_2 f''^2_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{(q_1 f_1 + q'_1 f'_1 + q''_1 f''_1)^2}{q_1 + q'_1 + q''_1} - \frac{(q_2 f_2 + q'_2 f'_2 + q''_2 f''_2)^2}{q_2 + q'_2 + q''_2} \right\}.$$

Jde-li o kosočtverec, budou úhly (1) a (1′) stejné a rovněž úhly (2), (3), (2′), (3′) budou stejné; a také $\alpha = \alpha'$, tedy $f_1 = f_2$, $f'_1 = f'_2$, $f''_1 = f''_2$. Předpokládáme-li dále, že $p_1 = p_2$, $p'_1 = p''_1 = p'_2 = p''_2$, bude výraz ve složené závorce

$$2 \left\{ q_1 f_1^2 + q'_1 (f'^2_1 + f''^2_1) - \frac{[q_1 f_1 + q'_1 (f'_1 + f''_1)]^2}{q_1 + 2q'_1} \right\}.$$

Dosadíme-li sem $f_1 = -\overline{AD}c_1 \cos \alpha$, $f'_1 = +\overline{AD}c_2 \cos \alpha$, $f''_1 = \overline{AD} \sin \alpha$ a uvážíme-li, že $c_1 = \operatorname{cotg} 2\alpha$, $c_2 = \operatorname{cotg} (2) = \operatorname{tg} \alpha$, jest výraz ve složené závorce po úpravě

$$\frac{\overline{AD}^2}{\sin^2 \alpha} \frac{q_1 q'_1}{q_1 + 2q'_1} = \frac{\overline{AD}^2}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{(p'_1 + 2p_1)},$$

a tedy

$$m_Z = \frac{m_0 \overline{AD}}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}$$

A protože v případě kosočtverce jest $\overline{AD}\cos\alpha = \frac{1}{2}Z$, jest

$$\frac{m_Z}{Z} = \frac{m_0}{\sin 2\alpha}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}. \tag{19}$$

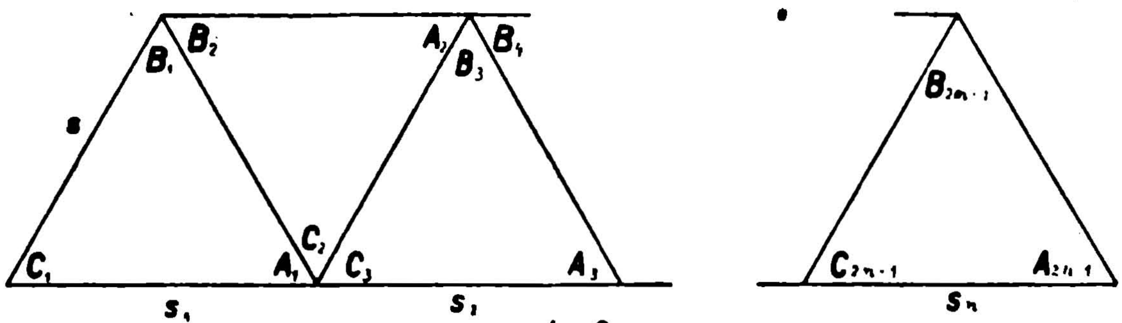
Zavedeme-li místo úhlu α poměr $Z : z = v$, bude

$$\sin\alpha = \frac{z}{2\overline{AD}}, \quad \cos\alpha = \frac{Z}{2\overline{AD}},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2zZ}{4\overline{AD}^2} = \frac{4zZ}{2(Z^2 + z^2)} = \frac{2v}{1 + v^2},$$

tedy

$$\frac{m_Z}{Z} = m_0 \frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}. \tag{19'}$$



obr. 9

8. V řetězci trojúhelníků (obr. 9) je dána strana s prvního trojúhelníka a byly měřeny všechny úhly se stejnou střední chybou m_0. Jest vypočísti střední chybu součtu $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ za předpokladu, že trojúhelníky jsou rovnostranné.*)

Protože v tomto případě půjde o $2n - 1$ podmínek tvaru (15) a všechny váhy p jsou stejné a rovné 1, bude

$$m_\varphi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{2n-1} \{(f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g) - \tfrac{1}{3}(f_g + f'_g + f''_g)^2\}. \tag{15''}$$

*) Jordan, l. c. str. 159—161.

Musíme tedy určiti veličiny f_g, f'_g, f''_g, t. j. koeficienty u dA_g, dB_g, dC_g ve výrazu

$$S = \sum_{g=1}^{2n-1} (f_g\, dA_g + f'_g\, dB_g + f''_g\, dC_g).$$

Podle věty sinové vypočteme

$$s_1 = \frac{s}{\sin A_1} \sin B_1, \quad s_2 = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \sin B_3,$$

$$s_3 = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \frac{\sin C_3}{\sin A_4} \frac{\sin B_4}{\sin A_5} \sin B_5, \ldots,$$

$$s_g = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \cdots \frac{\sin B_{2g-2}}{\sin A_{2g-1}} \sin B_{2g-1}.$$

Derivujeme-li podle A_1, obdržíme

$$ds_1 = -\frac{s}{\sin^2 A_1} \sin B_1 \cos A_1\, dA_1 = -s_1 \operatorname{cotg} A_1\, dA_1,$$

. . . .

$$ds_g = -s_g \operatorname{cotg} A_1\, dA_1.$$

Podobně, derivujeme-li podle A_2, dostaneme

$$ds_2 = -s_2 \operatorname{cotg} A_2\, dA_2, \ldots, ds_g = -s_g \operatorname{cotg} A_2\, dA_2$$

a stejně pro ostatní úhly A_3, A_4 atd. Tedy

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\operatorname{cotg} A_1 (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = -ns \operatorname{cotg} 60°,\\
f_2 &= -\operatorname{cotg} A_2 (s_2 + \ldots + s_n) = -(n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°,\\
f_3 &= -\operatorname{cotg} A_3 (s_2 + \ldots + s_n) = -(n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°,\\
f_4 &= -\operatorname{cotg} A_4 (s_3 + \ldots + s_n) = -(n-2)\, s \operatorname{cotg} 60°,
\end{aligned}$$

. . . .

$$f_{2n-1} = -\operatorname{cotg} A_{2n-1} s_n = -s \operatorname{cotg} 60°.$$

Derivujeme-li podle B_1, obdržíme

$$ds_1 = \frac{s}{\sin A_1} \cos B_1\, dB_1 = s_1 \operatorname{cotg} B_1\, dB_1$$

a stejně

$$ds_2 = s_2 \operatorname{cotg} B_3\, dB_3,\ ds_3 = s_3 \operatorname{cotg} B_5\, dB_5,\ \ldots,$$
$$ds_n = s_n \operatorname{cotg} B_{2n-1}\, dB_{2n-1}.$$

Pro sudé indexy u B jest

$$ds_g = s_g \operatorname{cotg} B_2\, dB_2,\ \text{pro}\ g = 2, \ldots, n,$$
$$ds_g = s_g \operatorname{cotg} B_4\, dB_4,\ \text{pro}\ g = 3, \ldots, n\ \text{atd.}$$

Tudíž

$$f'_1 = s_1 \operatorname{cotg} B_1 = s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_2 = \operatorname{cotg} B_2 (s_2 + \ldots + s_n) = (n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_3 = s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_4 = (n-2)\, s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_5 = s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_6 = (n-3)\, s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'_{2n-1} = s \operatorname{cotg} 60°.$$

Úhel C_1 obsahují $s_2, s_3, \ldots, s_n$, tedy $f''_1 = (n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°$; úhel C_2 a všechny úhly se sudými indexy neobsahují žádné s_g, tedy $f''_{2k} = 0$; úhel C_3 obsahují $s_3, s_4, \ldots, s_n$, tedy $f''_3 = (n-2)\, s \operatorname{cotg} 60°$; podobně $f''_5 = (n-3)\, s \operatorname{cotg} 60°$, $f''_7 = (n-4)\, s \operatorname{cotg} 60°$ atd.

Vidíme, že

$$f_1 + f'_1 + f''_1 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 1 + n - 1) = 0,$$
$$f_2 + f'_2 + f''_2 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 1 + n - 1) = 0,$$
$$f_3 + f'_3 + f''_3 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 1 + 1 + n - 2) = 0,$$
$$f_4 + f'_4 + f''_4 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 2 + n - 2) = 0\ \text{atd.}$$

Tím vzorec (15″) přejde v

$$m_\varphi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{2n-1} (f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g).$$

Dále jest

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f_g^2 = s^2 \operatorname{cotg}^2 60° \{n^2 + (n-1)^2 + (n-1)^2 +$$
$$+ (n-2)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 + 1^2\}.$$

A protože

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1),$$

jest

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n - 1)^2 = \tfrac{1}{6} (n - 1) n (2n - 1),$$

tedy

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f_g^2 = \tfrac{1}{3} s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \, n (2n^2 + 1).$$

Podobně

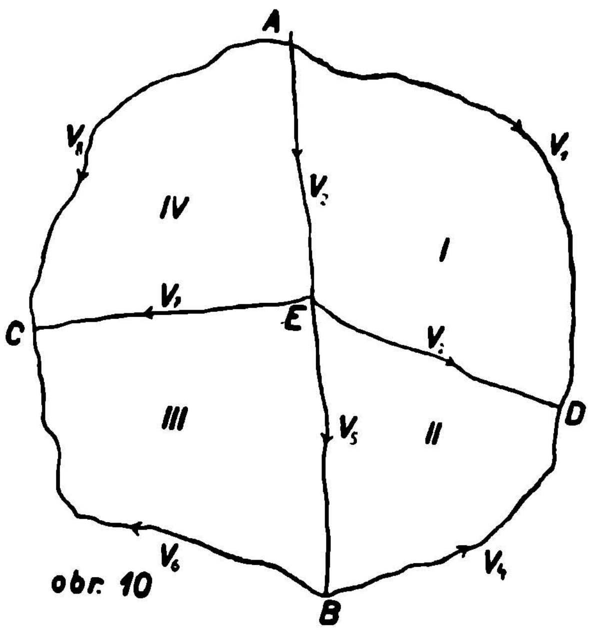
$$\sum_{g=1}^{2n-1} f'^2_g = s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \{1^2 + (n - 1)^2 + \\ + 1^2 + (n - 2)^2 + \ldots + 1^2 + 1^2\} = \\ = \tfrac{1}{6} n s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ (2n^2 - 3n + 7),$$

a

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f''^2_g = s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \{(n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \ldots + 1^2\} = \\ = \tfrac{1}{6} s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ (n - 1) n (2n - 1);$$

proto

$$m_\varphi^2 = m_0^2 s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3}.$$



obr. 10

9. Vyrovnání nivelační sítě. Při nivelaci města byla nivelační síť připojena na body A a B základní nivelační sítě, jejichž výšky jsou V_A a V_B. V obr. 10 značí šipky stoupání tratí. V_i jsou naměřené rozdíly výšek a v_i příslušné hledané opravy. Úkolem je vyrovnati tuto nivelační síť. Opravené rozdíly výšek mají splňovati tyto podmínky: Z obrazce I jest

$$V_1 + v_1 - (V_2 + v_2) - (V_3 + v_3) = 0,$$

čili

$$v_1 - v_2 - v_3 = a_1, \text{ kde } a_1 = -V_1 + V_2 + V_3.$$

Podobné jsou podmínky plynoucí z obrazců II, III a IV:

$$\begin{aligned} v_2 - v_4 - v_5 &= a_2, & a_2 &= -V_2 + V_4 + V_5, \\ v_5 + v_6 - v_7 &= a_3, & a_3 &= -V_5 - V_6 + V_7, \\ v_3 + v_7 - v_8 &= a_4, & a_4 &= -V_3 - V_7 + V_8. \end{aligned}$$

Podmínka pevného výškového rozdílu mezi body A a B jest

$$V_3 + v_3 + V_5 + v_5 = V_B - V_A,$$

čili

$$v_3 + v_5 = a_5, \; a_5 = V_B - V_A - V_3 - V_5.$$

Prosté členy $a_1, \ldots, a_5$ vyjadřujeme obyčejně v mm.

Osm neznámých oprav $v_1, \ldots, v_8$ nemůže býti určeno uvedenými pěti podmínkami. Ale přistupuje ještě podmínka, aby součet čtverců oprav násobených příslušnými vahami byl minimální (viz IV, odst. 1). V případě nivelací se podle zkušeností předpokládá, že váhy jsou nepřímo úměrné vzdálenostem. Píše se obyčejně $p_i = 1 : s_i$, kde s_i jest délka příslušné trati v km. To také znamená, že váha rovná 1 přísluší trati rovné 1 km. Má tedy býti minimem součet

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_8 v_8^2$$

a při tom mají býti splněny podmínky

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_3 &= a_1, \\ v_2 - v_4 - v_5 &= a_2, \\ v_5 + v_6 - v_7 &= a_3, \\ v_3 + v_7 - v_8 &= a_4, \\ v_3 + v_5 &= a_5. \end{aligned} \tag{20}$$

Funkce F [viz (7)] v tomto případě jest

$$\begin{aligned} F = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_8 v_8^2 - 2k_1 (v_1 - v_2 - v_3 - a_1) - \\ - 2k_2 (v_2 - v_4 - v_5 - a_2) - 2k_3 (v_5 + v_6 - v_7 - a_3) - \\ - 2k_4 (v_3 + v_7 - v_8 - a_4) - 2k_5 (v_3 + v_5 - a_5). \end{aligned}$$

Anulujeme-li parciální derivace podle jednotlivých v_i, bude

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= k_1, \\ p_2 v_2 &= -k_1 + k_2, \\ p_3 v_3 &= -k_1 + k_4 + k_5, \\ p_4 v_4 &= -k_2, \\ p_5 v_5 &= -k_2 + k_3 + k_5, \\ p_6 v_6 &= k_3, \\ p_7 v_7 &= -k_3 + k_4, \\ p_8 v_8 &= -k_4. \end{aligned} \tag{21}$$

Dosadíme-li tyto rovnice do podmínek (20) a píšeme-li $q_i = 1 : p_i$, bude

$$\begin{aligned} k_1 (q_1 + q_2 + q_3) - k_2 q_2 - k_4 q_3 - k_5 q_3 &= a_1, \\ -k_1 q_2 + k_2 (q_2 + q_4 + q_5) - k_3 q_5 - k_5 q_5 &= a_2, \\ -k_2 q_5 + k_3 (q_5 + q_6 + q_7) - k_4 q_7 + k_5 q_5 &= a_3, \\ -k_1 q_3 - k_3 q_7 + k_4 (q_3 + q_7 + q_8) + k_5 q_3 &= a_4, \\ -k_1 q_3 - k_2 q_5 + k_3 q_5 + k_4 q_3 + k_5 (q_3 + q_5) &= a_5. \end{aligned}$$

Ke stejným rovnicím bychom došli podle vzorců (9). Koeficient $[qa_1^2]$ se rovná součtu převrácených hodnot vah pro ty trati, jež se vyskytují v první podmínce. Podobně $[qa_2^2]$, $[qa_3^2]$ atd. V koeficientu $[qa_1a_2]$ jest qa_1a_2 převrácená hodnota váhy pro trať, jež se vyskytuje v podmínce první a druhé a znaménko je buď $+$ nebo $-$ podle toho, jsou-li znaménka u a_1 i a_2 stejná či různá. Tak je na př. $[qa_1a_2] = -q_2$, $[qa_1a_3] = 0$ (protože žádná trať se nevyskytuje současně v první a třetí podmínce) atd.

Sem stačí klásti $q_i = 1 : p_i = s_i$, jsou to tedy lineární rovnice se známými číselnými koeficienty.

Z těchto rovnic vypočteme koreláty $k_1, k_2, \ldots, k_5$ (na př. postupem Gaussovým). Pak z rovnic (21) vypočteme opravy $v_1, \ldots, v_8$.

Pro kontrolu dosadíme do podmínek (20), jež musí býti splněny až na chyby plynoucí ze zaokrouhlování.

Střední chyba m_0 pro jedničku váhy — jmenuje se také střední chyba kilometrová, protože váha rovná 1 přísluší trati dlouhé 1 km — se vypočte podle vzorce (4)

$$m_0 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{5}[pv^2]}.$$

Vyrovnaná výška na př. bodu C jest $V_A + V_8 + v_8$. Předpokládáme, že výšku V_A známe bez chyby. Pak střední chyba vyrovnané výšky bodu C bude rovna střední chybě opravy v_8. Podle vzorce (13′) jest

$$m_{v_8}{}^2 = m_0{}^2 (q_8 + q_8 h_4) = m_0{}^2 q_8 (1 + h_4), \qquad (22)$$

neboť jen $f_8 = 1$ a ostatní f jsou rovna 0, takže $[qa_1 f] = 0$ (člen $qa_1 f$ je součin převrácené hodnoty váhy, příslušného koeficientu v první podmínce a příslušného f),

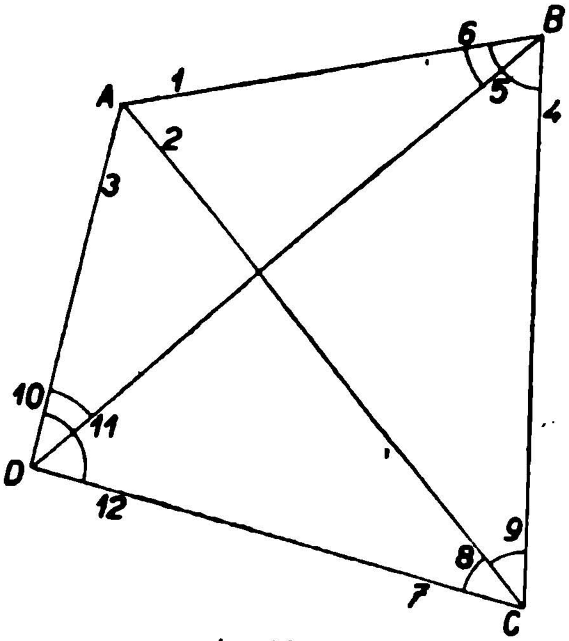
$$[qa_2 f] = 0,\ [qa_3 f] = 0,\ [qa_4 f] = -q_8,\ [qa_5 f] = 0.$$

Stačí tedy vypočísti h_4 z rovnic (12), jež zde budou:

$$\begin{aligned}
h_1 (q_1 + q_2 + q_3) - h_2 q_2 - h_4 q_3 - h_5 q_3 &= 0,\\
-h_1 q_2 + h_2 (q_2 + q_4 + q_5) - h_3 q_5 - h_5 q_5 &= 0,\\
-h_2 q_5 + h_3 (q_5 + q_6 + q_7) - h_4 q_7 + h_5 q_5 &= 0,\\
-h_1 q_3 - h_3 q_7 + h_4 (q_3 + q_7 + q_8) + h_5 q_3 &= -q_8,\\
-h_1 q_3 - h_2 q_5 + h_3 q_5 + h_4 q_3 + h_5 (q_3 + q_5) &= 0,
\end{aligned}$$

a dosaditi do vzorce (22).

10. **Vyrovnání trigonometrické sítě.** Ve čtyřúhelníku byly měřeny na každém vrcholu směry vždy ke všem třem zbývajícím vrcholům. Vyrovnati tuto síť! (Viz obr. 11.)



obr. 11

Označíme naměřené hodnoty S_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$. Vypočteme-li na př. úhly v trojúhelníku ABC ($S_2 - S_1$, $S_6 - S_4$, $S_9 - S_8$), uvidíme, že jejich součet není přesně roven $180° +$ + excess ε_1 trojúhelníka ABC (počítáme jako na kouli). Je tedy patrno, že musíme naměřené hodnoty S_i opraviti o hledané opravy s_i. Pak podmínka, že součet vyrovnaných úhlů v trojúhelníku ABC má býti $180° + \varepsilon_1$, bude

$$-s_1 + s_2 - s_4 + s_6 - s_8 + s_9 = a_1,$$
$$a_1 = 180° + \varepsilon_1 + S_1 - S_2 + S_4 - S_6 + S_8 - S_9. \qquad (23_1)$$

Podobně z trojúhelníků ACD a ABD:

$$-s_2 + s_3 - s_7 + s_8 - s_{10} + s_{12} = a_2,$$
$$a_2 = 180° + \varepsilon_2 + S_2 - S_3 + S_7 - S_8 + S_{10} - S_{12}, \qquad (23_2)$$
$$-s_1 + s_3 - s_5 + s_6 - s_{10} + s_{11} = a_3,$$
$$a_3 = 180° + \varepsilon_3 + S_1 - S_3 + S_5 - S_6 + S_{10} - S_{11}. \qquad (23_3)$$

Podmínka, která by plynula z trojúhelníka DBC, se dá odvoditi již z těchto tří podmínek, nepodala by tedy nic nového.

Podle sinové věty sférické trigonometrie vypočteme $\sin AC$ ze $\sin AB$ v trojúhelníku ABC, dále $\sin AD$ ze $\sin AC$ v trojúhelníku ADC a konečně $\sin AB$ ze $\sin AD$ v trojúhelníku ABD. Tak se dá odvoditi další podmínka

$$\frac{\sin(S_6 - S_4 + s_6 - s_4)\sin(S_8 - S_7 + s_8 - s_7)}{\sin(S_6 - S_5 + s_6 - s_5)\sin(S_9 - S_8 + s_9 - s_8)} \cdot$$
$$\cdot \frac{\sin(S_{11} - S_{10} + s_{11} - s_{10})}{\sin(S_{12} - S_{10} + s_{12} - s_{10})} = 1.$$

Tuto podmínku převedeme na lineární tvar tím, že ji logaritmujeme a jednotlivé sčítance $\log\sin(S_6 - S_4 + s_6 - s_4)$, $\log\sin(S_8 - S_7 + s_8 - s_7)$ atd. nahradíme přibližně stejnými výrazy $\log\sin(S_6 - S_4) + a'(s_6 - s_4)$, $\log\sin(S_8 - S_7) + b'(s_8 - s_7)$ atd., kde a', b' jsou logaritmické diference pro log sin a $1''$ v místě úhlu $S_6 - S_4$, $S_8 - S_7$ atd. Dá se tedy poslední podmínka psáti ve tvaru

$$a_{4,4}s_4 + a_{4,5}s_5 + a_{4,6}s_6 + a_{4,7}s_7 + a_{4,8}s_8 +$$
$$+ a_{4,9}s_9 + a_{4,10}s_{10} + a_{4,11}s_{11} + a_{4,12}s_{12} = a_4. \qquad (23_4)$$

V uvažovaném případě máme 4 podmínky a 12 neznámých. Ale přistupuje ještě podmínka, aby součet čtverců oprav $s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{12}^2$ byl minimální (viz IV, odst. 1).

Funkce F v tomto případě bude

$$F = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{12}^2 - 2k_1 (-s_1 + s_2 - \ldots - a_1) - \\ - 2k_2 (-s_2 + s_3 - \ldots - a_2) - 2k_3 (-s_1 + s_3 - \ldots - a_3) - \\ - 2k_4 (a_{4,4}s_4 + a_{4,5}s_5 + \ldots - a_4).$$

Anulujeme-li derivace podle $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} s_1 &= -k_1 - k_3, & s_7 &= -k_2 + k_4a_{4,7}, \\ s_2 &= k_1 - k_2, & s_8 &= -k_1 + k_2 + k_4a_{4,8}, \\ s_3 &= k_2 + k_3, & s_9 &= k_1 + k_4a_{4,9}, \\ s_4 &= -k_1 + k_4a_{4,4}, & s_{10} &= -k_2 - k_3 + k_4a_{4,10}, \\ s_5 &= -k_3 + k_4a_{4,5}, & s_{11} &= k_3 + k_4a_{4,11}, \\ s_6 &= k_1 + k_3 + k_4a_{4,6}, & s_{12} &= k_2 + k_4a_{4,12}. \end{aligned} \tag{24}$$

Dosadíme-li odtud do podmínek, budeme míti čtyři normální rovnice pro koreláty:

$$6k_1 - 2k_2 + 2k_3 + k_4 (-a_{4,4} + a_{4,6} - a_{4,8} + a_{4,9}) = a_1$$

atd.

Můžeme je zase kontrolovati přímo z rovnic (9).

Normální rovnice řešíme na př. způsobem Gaussovým. Tak vypočteme koreláty k_1, k_2, k_3, k_4. Pak z rovnic (24) plynou opravy $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$. Výpočet kontrolujeme dosazením do podmínek (23).

Střední chyba pro jednotku váhy bude podle vzorce (4) rovna

$$m_0 = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}[s^2]}.$$

Střední chybu jednotlivých vyrovnaných směrů, nebo jakékoli lineární funkce vyrovnaných směrů, počítáme zase jako v př. 9 podle vzorce (13'), při čemž koeficienty h plynou z rovnic (12).