

Měřické chyby a jejich vyrovnaní: (podle metody nejmenších čtverců)

Vyrovňování přímých měření

In: B. Kladivo (author): Měřické chyby a jejich vyrovnaní: (podle metody nejmenších čtverců). (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1943. pp. 30–51.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405502>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

II.

VYROVNÁNÍ PŘÍMÝCH MĚŘENÍ.

1. **Různé druhy vyrovnání.** V této kapitole si nejprve uvědomíme, o jaké úkoly v t. zv. vyrovnávacím počtu jde.

a) Vyrovnání přímých měření. Pro danou veličinu x jsme naměřili hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n . Podle jakého pravidla vypočteme z měřených hodnot výslednou neboli vyrovnanou hodnotu? Jak můžeme posouditi přesnost provedených měření a přesnost vyrovnané hodnoty?

b) Vyrovnání zprostředkujících měření. Mezi délkou L kovového měřítka M a teplotou t předpokládejme jednoduchý vztah

$$L = A + Bt.$$

Měřítka M bylo srovnáno při různých teplotách t_1, t_2, \dots, t_n s jiným měřítkem M' , jehož délku při každé teplotě umíme vypočísti, a ze srovnání byly určeny délky L_i srovnávaného měřítka M pro teplotu $t_i, i = 1, 2, \dots, n$, takže má být

$$L_i = A + Bt_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Hledané veličiny jsou v tomto případě A a B . Nejsou měřeny přímo, provedená měření veličin L_i a $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ zprostředkují výpočet hledaných veličin.

Obyčejně je počet rovnic (1) větší než počet hledaných veličin, tedy $n > 2$, a vliv měřických chyb působí, že nemohou být všechny rovnice (1) splněny přesně.

Jaké hodnoty v tomto případě zvolíme za výsledné (vyrovnané) hodnoty A a B , aby rovnice (1) byly splněny alespoň „co nejlépe“? A jak zde posoudíme přesnost provedených měření a přesnost vyrovnaných hodnot?

c) Vyrovnání závislých měření. V trojúhelníku ABC byly měřeny všechny tři vnitřní úhly. Označíme naměřené hodnoty A, B, C a jejich hledané opravy x, y, z . Jde-li o rovinný trojúhelník, musí součet jeho vnitřních úhlů být roven 180° , t. j.

$$x + y + z + A + B + C - 180^\circ = 0. \quad (2)$$

Rovnice (2), které se říká podmínka nebo rovnice závislosti, musí býti splněna přesně. Ale k určení tří neznámých nestačí.

Jak určíme v takovém případě hledané vyrovnané veličiny? A můžeme i v takových případech posouditi nějak přesnost měření a přesnost vyrovnaných hodnot?

V dalších odstavcích uvidíme, že vyrovnaní přímých i závislých měření se dá převést na vyrovnaní měření zprostředkujících (srovn. III, odst. 7b a IV, odst. 1). Proto začneme s úvahou o tomto vyrovnaní.

Máme určit neznámé x, y, z, \dots tak, aby byly „co nejlépe“ splněny rovnice

$$a_i x + b_i y + c_i z + \dots = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

α) je-li počet neznámých menší než počet rovnic n a

β) nedají-li se všechny rovnice přesně splniti žádným systémem hodnot x, y, z, \dots .

Podobné úlohy jsou dosti časté, a to nejen v měřických vědách (na př. fysice, astronomii, geodesii). Hledá se na př. přímka či křivka, která se „co nejlépe přimyká“ nebo „co nejlépe nahrazuje“ řadu daných bodů. Nebo hledá se vztah mezi proměnnými, který „co nejlépe vyhovuje“ daným, statisticky zjištěným, hodnotám atd.

Ve všech takových a podobných případech musíme vyjasniti, jaký je přesný smysl matematicky neurčitých slovních obrátů „co nejlépe splniti“, „co nejlépe nahraditi“, „co nejlépe se přimykati“, „co nejlépe vyhovovati“.

At' zvolíme jakýkoli systém hodnot $x = X, y = Y, z = Z, \dots$ budou — podle podmínky β) — aspoň některé z hodnot

$$a_i X + b_i Y + c_i Z + \dots - l_i = V_i \quad (4)$$

různé od nuly.

Hodnotám V_i se říká odchylky, rovnicím (4) odchylkové rovnice.

Abychom mohli posouditi, který ze dvou libovolně zvole-

ných systémů hodnot x, y, z, \dots , „lépe“ splňuje rovnice (3), musíme srovnávat v obou případech zbývající odchylky V_i . Ale jak je máme srovnávat? Uvedu tři různé způsoby takového srovnávání.

α) Ve své *Mécanique céleste**) navrhuje Laplace určovat vyrovnané hodnoty x, y, z, \dots tak, aby absolutní hodnota největší z odchylek V_i byla menší než pro jakékoli jiné hodnoty neznámých.

Objasníme tento předpis na jednoduchém příkladě přímých měření. Naměřili jsme pro danou veličinu x hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n . Předpokládejme, že jsme je uspořádali podle velikosti, takže

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

V tomto případě má být

$$x - x_i = 0, \quad (3')$$

ale vlivem měřických chyb bude

$$x - x_i = V_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4')$$

kde odchylky V_i jsou obyčejně malé hodnoty.

Snadno se nahlédne, že vyrovnaná hodnota x' , vyhledaná podle uvedeného předpisu Laplaceova, musí být uprostřed mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou, t. j. musí $x' = \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$. V tomto případě bude totiž největší odchylka $+\frac{1}{2}(x_1 + x_n) - x_1 = \frac{1}{2}(x_n - x_1)$, a nejmenší odchylka $+\frac{1}{2}(x_1 + x_n) - x_n = \frac{1}{2}(x_1 - x_n)$, absolutní hodnoty obou těchto extrémních odchylek jsou stejné. A je ihned patrné, že pro jakékoli x' , různé od $\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, bychom došli k větším odchylkám než je $\frac{1}{2}(x_n - x_1)$.

Jak viděti, nezávisí v tomto případě výsledná hodnota x' vůbec na tom, jaké hodnoty byly naměřeny mezi x_1 a x_n .

Ten, kdo se postaví na stanovisko, že je nesprávné, nedbati takto — mnohdy — většiny naměřených hodnot, musí tento návrh Laplaceův pro případ přímých měření odmítnouti.

*) Livre III, § 39.

β) Uvedu jiný vyrovnávací předpis, který navrhl Edgeworth:*) Určiti vyrovnané hodnoty neznámých x, y, z, \dots tak, aby součet absolutních hodnot odchylek byl co nejmenší. Má tedy býti minimem součet

$$S = \sum_{i=1}^n |a_i x + b_i y + c_i z + \dots - l_i|. \quad (5)$$

Ukážeme na jednoduchém příkladě, že tento předpis nevede vždy k určité vyrovnané hodnotě.

Mysleme si, že jsme veličinu x změřili dvakrát, s výsledky x_1 a x_2 , a necht' $x_1 < x_2$. Pak jest $S = |x_1 - x| + |x_2 - x|$.

Pro $x \leq x_1$ bude $S = x_1 - x + x_2 - x$, minimum nastane pro $x = x_1$ a je rovné $x_2 - x_1$.

Pro $x \geq x_2$ bude $S = x - x_1 + x - x_2$, minimum nastane pro $x = x_2$ a je rovné $x_2 - x_1$.

Pro $x_1 < x < x_2$ bude $S = x - x_1 + x_2 - x = x_2 - x_1$, ať je x kdekoli mezi x_1 a x_2 .

Určili jsme tedy minimum součtu S , ale toto minimum nenastává pro jedinou hodnotu x , nýbrž pro všechny hodnoty v celém intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, t. j. i včetně mezí.

Jak viděti, Edgeworthův vyrovnávací předpis nevede v tomto případě k cíli.

γ) Roku 1806 uveřejnil Legendre vyrovnávací způsob, který nazval methodou nejmenších čtverců. Již před ním užíval však metody nejmenších čtverců C. F. Gauss.

Podle této metody se určují vyrovnané hodnoty neznámých x, y, z, \dots tak, aby součet čtverců odchylek byl co nejmenší. Má tedy býti minimem součet

$$S = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i y + c_i z + \dots - l_i)^2. \quad (6)$$

Aby součet (6) nabyl pro určitý bod x', y', z', \dots maxima nebo minima, musí se jeho první parciální derivace podle

*) Phil. Mag. 24 (1887), str. 222, a 25 (1888), str. 184. Cituji podle Whittaker-Robinson: l. c. str. 259.

x, y, z, \dots v bodě x', y', z', \dots rovnati nule.*) Musí tedy býti

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=x', \dots} = \sum_i a_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i) = 0 = \sum_i a_i v_i,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_{x=x', \dots} = \sum_i b_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i) = 0 = \sum_i b_i v_i,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_{x=x', \dots} = \sum_i c_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i) = 0 = \sum_i c_i v_i,$$

.....

kde odchylka $v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' + \dots - l_i$. Zde a v dalším rozumíme odchylkami vždy odchylky vypočtené z hodnot x', y', z', \dots plynoucích podle metody nejmenších čtverců. Na rozdíl od odchylek V_i vypočtených z libovolných hodnot X, Y, Z, \dots označujeme je v_i .

Zavedeme-li označení $\sum_i a_i^2 = [a^2]$, $\sum_i a_i b_i = [ab]$, $\sum_i a_i c_i = [ac]$, $\sum_i a_i l_i = [al]$ atd., kde všude i probíhá celá čísla od 1 do n , můžeme místo předcházejících rovnic napsat:

$$\begin{aligned} [a^2] x' + [ab] y' + [ac] z' + \dots &= [al], \\ [ab] x' + [b^2] y' + [bc] z' + \dots &= [bl], \\ [ac] x' + [bc] y' + [c^2] z' + \dots &= [cl]. \end{aligned} \tag{7}$$

.....

Rovnicím (7) se říká normální rovnice. Z nich můžeme určit vyrovnané hodnoty x', y', z', \dots jednoznačně, pokud determinant soustavy (7) není roven 0. Prozatím to budeme předpokládati. Později ukážeme, co značí pro koeficienty a_i, b_i, c_i , když je determinant soustavy (7) roven 0 (viz III, odst. 4).

Legendre metodu nejmenších čtverců nedokazoval. Jen upozornil na její výhody.

*) J. Vojtěch: *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických*, I. díl, 5. vyd., Praha 1939, str. 408—410. — K. Petr: *Počet diferenciální*, Praha 1923, str. 390—394.

Pro přímé měření veličiny x , při kterém jsme naměřili hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n , má býti minimem součet $\sum_i (x - x_i)^2$. Podmínka minima je $\sum_i (x' - x_i) = 0$ čili $nx' - \sum_i x_i = 0$, tedy $x' = [x] : n$.

V případě přímých měření vede tedy metoda nejmenších čtverců k vyrovnané hodnotě rovné aritmetickému průměru všech naměřených hodnot. Legendre upozorňuje na tuto přednost metody nejmenších čtverců. Všechny naměřené hodnoty vstupují do výsledku stejně, nejmenší a největší naměřená hodnota nemá přednostní postavení, jako měla v návrhu Laplaceově.

Jak jsme viděli, vede metoda nejmenších čtverců k jednoznačným výsledkům, ať jde o vyrovnání měření přímých nebo zprostředkujících. Uvidíme později, že vede k jednoznačným výsledkům i při vyrovnání závislých měření (srovn. IV, odst. 1). Je to tedy metoda obecnější než předpis Laplaceův nebo Edgeworthův. — Její užití je také mnohem snadnější než užití způsobů právě jmenovaných. Snadno se lze o tom přesvědčiti, pokusíme-li se vyhledati vyrovnané hodnoty všemi třemi způsoby pro případ, že zbývající odchylky mají tvar $a_i x - l_i = v_i$.

2. První (Gaussovo) zdůvodnění metody nejmenších čtverců: Postulát aritmetického průměru vede k metodě nejmenších čtverců. Označíme skutečnou hodnotu měřené veličiny písmenem x , naměřené hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n . Pak skutečné chyby jsou $\varepsilon_i = x - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pravděpodobnost, že skutečná chyba ε_i je v mezích od ε_i do $\varepsilon_i + d\varepsilon$, necht' jest $\varphi(\varepsilon_i) d\varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pravděpodobnost, že skutečné chyby při n měřeních, provedených po sobě, jsou v mezích $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon \rangle$, ..., $\langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + d\varepsilon \rangle$, jest podle pravidla o součinu pravděpodobností rovna

$$(d\varepsilon)^n \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) \dots \varphi(\varepsilon_n). \quad (8)$$

Kdy je pravděpodobnost (8) při daných x_1, \dots, x_n největší,

t. j. pro které x nabude součin $\varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) \dots \varphi(\varepsilon_n)$ maxima, nebo jinak řečeno, který předpoklad o správné hodnotě x bude nejpravděpodobnější? Je-li $\varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) \dots \varphi(\varepsilon_n)$ maximální, jest i $\sum_{i=1}^n \lg \varphi(\varepsilon_i)$ maximální. Aby tento výraz byl maximální, musí derivace podle x býti rovna 0, tedy

$$\sum_{i=1}^n \frac{d \lg \varphi(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} = 0. \quad (9)$$

To je podmínka pro maximum pravděpodobnosti (8). Tážeme se, lze-li určit funkci φ tak, aby maximální hodnota pravděpodobnosti (8) nastala vždy pro

$$x = [x] : n? \quad (10)$$

Jinak řečeno, aby nejpravděpodobnější hodnotou byl vždy aritmetický průměr (postulát aritmetického průměru).

Rovnice (10) se dá psáti

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0. \quad (10')$$

Podmínka (9) přechází v (10'), je-li na př.

$$\frac{d \lg \varphi(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} = k\varepsilon_i,$$

kde k je nějaká konstanta. Odtud

$$\lg \varphi(\varepsilon_i) = \frac{1}{2}k \varepsilon_i^2 + k_1, \quad \varphi(\varepsilon_i) = e^{k_1} \cdot e^{\frac{1}{2}k\varepsilon_i^2}.$$

Protože pak funkce φ klesá s rostoucím ε , musí býti konstanta k záporná. Píšeme $\frac{1}{2}k = -h^2$ a $e^{k_1} = c$. Tedy

$$\varphi(\varepsilon_i) = c \cdot e^{-h^2\varepsilon_i^2}. \quad (11)$$

Aby při naměřených hodnotách x_1, x_2, \dots, x_n byl nejpravděpodobnější hodnotou aritmetický průměr, musí se chyby zatěžující měření nutně řídití normálním zákonem četnosti, ovšem za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi(\varepsilon_i)$ (srovn. I, odst. 8).

Pak je pravděpodobnost (8) rovna $c^n(d\varepsilon)^n e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2)}$. Požadavek, aby pravděpodobnost (8) byla maximální, je v tom případě totožný s požadavkem, aby $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$, (t. j. součet čtverců chyb) byl minimální; tento požadavek vede tedy k metodě nejmenších čtverců.

Jak patrně, nutnost vyrovnávati podle metody nejmenších čtverců plyne z toho, že se chyby zatěžující měření řídí normálním zákonem četnosti. A dále z postulátu aritmetického průměru plyne, že se chyby zatěžující výsledky měření řídí normálním zákonem četnosti, ač za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi(\varepsilon_i)$.

Tedy za uvedeného předpokladu postulát aritmetického průměru vede k vyrovnání podle metody nejmenších čtverců (srovn. VII, odst. 2a).

3. Vyrovnání přímých měření o nestejně váze. Označíme zase skutečnou hodnotu měřené veličiny písmenem x , hodnoty plynoucí z měření x_1, x_2, \dots, x_n a skutečné chyby $\varepsilon_i = x - x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Předpokládejme, že se tyto chyby řídí normálním zákonem četnosti a že hodnoty x_1, \dots, x_n nemají stejnou váhu. Nejsou tedy stejně přesné. Označíme příslušné míry přesnosti h_1, h_2, \dots, h_n a váhy p_1, p_2, \dots, p_n .

Pravděpodobnost, že chyba ε_i je v intervalu $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i + d\varepsilon_i \rangle$, jest $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$ a pravděpodobnost, že skutečné chyby

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ jsou po řadě v intervalech $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1 \rangle, \langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2 \rangle, \dots, \langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + d\varepsilon_n \rangle$, jest

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + h_n^2 \varepsilon_n^2)}. \quad (12)$$

Který předpoklad o správné hodnotě x bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost (12) největší, tedy pro nějž je součet $h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + h_n^2 \varepsilon_n^2$ nejmenší.

Mezi měrou přesnosti h_i , střední chybou m_0 pro jednotku váhy a vahou p_i jsou vztahy $p_i = m_0^2 : m_i^2$, a při normálním rozdělení četnosti $m_i^2 = 1 : 2h_i^2$, tedy

$$h_i = \frac{1}{m_0} \sqrt{\frac{p_i}{2}}$$

[srovn. I, (16) a I, (24)]. Předcházející výraz pro pravděpodobnost bude tedy roven

$$d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}}{(\sqrt{2\pi})^n m_0^n} e^{-\frac{1}{2m_0^2} (p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \dots + p_n \varepsilon_n^2)}. \quad (12')$$

Který předpoklad o vyrovnané hodnotě x' bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost (12') největší, tedy pro nějž je součet

$$S = p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \dots + p_n \varepsilon_n^2 = \\ = p_1 (x - x_1)^2 + p_2 (x - x_2)^2 + \dots + p_n (x - x_n)^2 \quad (13)$$

nejmenší. Aby byl nejmenší, musí derivace podle x býti rovna 0, t. j.

$$p_1 (x' - x_1) + p_2 (x' - x_2) + \dots + p_n (x' - x_n) = 0,$$

čili

$$x' = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \quad (14)$$

Vzorec (14), dávající t. zv. obecný aritmetický průměr, je též jako vzorec pro výpočet těžiště hmotných bodů o vahách p_1, p_2, \dots, p_n . Tato obdoba vedla k tomu, že veličiny $p = m_0^2 : m^2$ byly nazvány vahami (viz I, odst. 1, 5).

Váhy p_1, \dots, p_n , příslušné hodnotám x_1, \dots, x_n , klademe obyčejně — podle vzorce I, (18) — rovny počtu jednotlivých měření, z nichž jako aritmetický průměr byly vypočteny. To ovšem za předpokladu, že o jednotlivých měřeních můžeme důvodně souditi, že nemají různou váhu.

Jestliže nestejná přesnost jednotlivých měření je charakterisována ne vahami, ale příslušnými středními chybami

m_1, m_2, \dots, m_n [vypočtenými podle vzorce II, (16')], užijeme k výpočtu vyrovnané hodnoty vzorce, který plyne ze (14), když tam dosadíme $p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$. Krátíme-li v čitateli a jmenovateli m_0^2 , vyjde

$$x' = \frac{\frac{x_1}{m_1^2} + \frac{x_2}{m_2^2} + \dots + \frac{x_n}{m_n^2}}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \dots + \frac{1}{m_n^2}}. \quad (14')$$

Jde-li o dvě měření, přejde vzorec (14') ve

$$x' = \frac{m_2^2 x_1 + m_1^2 x_2}{m_1^2 + m_2^2}. \quad (14'')$$

Že nastane pro $x = x'$ minimum součtu S , je patrné z toho, že druhá derivace výrazu (13) podle x jest rovna $[p]$, tedy kladná.*)

Ke stejnému výsledku přijdeme také touto úvahou:

Má-li měřená veličina x váhu p , pak má veličina kx váhu $P = \frac{p}{k^2}$. Neboť je-li m střední chyba veličiny x , je střední chyba veličiny kx rovna km a

$$P : p = \frac{1}{k^2 m^2} : \frac{1}{m^2} \quad \text{čili} \quad P = \frac{p}{k^2}.$$

Zvolíme-li $k = \sqrt{p}$, bude $P = 1$. To znamená: Místo abychom uvažovali měření různých vah, stačí násobiti každou odchylkovou rovnicí odmocninou příslušné váhy a přisouditi všem měřením (a tedy i novým odchylkovým rovnicím) stejné váhy, rovné 1. V uvažovaném případě přímých měření o nestejně váze jsou odchylkové rovnice $v_i = x - x_i$, váhy p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Místo nich uvažujeme odchylkové rovnice $v'_i = (x - x_i)\sqrt{p_i}$ o stejné váze, rovné 1.

*) J. Vojtěch, l. c. str. 268—270. — K. Petr, l. c. str. 272 až 274.

Podle předcházejícího odstavce má být minimem součet čtverců odchylek

$$v'_1{}^2 + v'_2{}^2 + \dots + v'_n{}^2 = p_1 v_1{}^2 + p_2 v_2{}^2 + \dots + p_n v_n{}^2.$$

A z toho plyne zase vzorec (14).

4. Střední chyba pro jednotku váhy. Střední chyba výsledku. Označíme střední chybu pro jednotku váhy písmenem m_0 . Protože váha veličiny x_i je p_i , bude střední hodnota chyby ε_i rovna $\frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$, kde $i = 1, 2, \dots, n$ (viz I, (16')).

Ze vzorců $v_i = x' - x_i$, $\varepsilon_i = x - x_i$, plyne, násobíme-li p_i a sečteme:

$$[pv] = [p] x' - [px], \quad [p\varepsilon] = [p] x - [px]$$

a protože $[pv] = 0$ [viz (14)], jest $\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = x - x'$.

Odtud

$$\begin{aligned} v_i &= x' - x + x - x_i = \varepsilon_i - \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \\ &= \frac{1}{[p]} \left\{ -p_1 \varepsilon_1 - p_2 \varepsilon_2 - \dots + ([p] - p_i) \varepsilon_i - \dots - p_n \varepsilon_n \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Podle vzorce I, (12'') vypočteme odtud čtverec střední hodnoty v_i^2 , který označíme \dot{v}_i^2 . Bude

$$\begin{aligned} \dot{v}_i^2 &= \frac{1}{[p]^2} \left\{ p_1^2 \frac{m_0^2}{p_1} + p_2^2 \frac{m_0^2}{p_2} + \dots + ([p_i] - p_i)^2 \frac{m_0^2}{p_i} + \right. \\ &+ \left. \dots + p_n^2 \frac{m_0^2}{p_n} \right\} = \frac{m_0^2}{[p]^2} \left\{ ([p] - p_i) + ([p] - p_i)^2 \cdot \frac{1}{p_i} \right\} = \\ &= \frac{m_0^2}{[p]} \cdot \frac{[p] - p_i}{p_i} \end{aligned}$$

a součet

$$[p\dot{v}^2] = \frac{m_0^2}{[p]} [p] (n - 1) = m_0^2 (n - 1),$$

čili

$$m_0^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}.$$

Správnou hodnotu součtu $[pv^2]$ nemůžeme vypočítati, protože neznáme střední hodnoty v_i^2 . Jsme proto nuceni dosaditi za $[pv^2]$ přibližnou hodnotu, t. j. součet čtverců odchylek, násobených příslušnými vahami $[pv^2]$, jak plyne z uvažované řady měření. Bude tedy přibližně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-1}. \quad (15')$$

Protože skutečná chyba vyrovnané hodnoty $x' = \frac{[px]}{[p]}$ jest $\frac{[p\varepsilon]}{[p]}$, bude čtverec její střední hodnoty [viz I, (12'')]]

$$\frac{1}{[p]^2} \left\{ p_1^2 \frac{m_0^2}{p_1} + p_2^2 \frac{m_0^2}{p_2} + \dots + p_n^2 \frac{m_0^2}{p_n} \right\} = \frac{m_0^2}{[p]}.$$

Tedy střední chyba vyrovnané hodnoty $x' = \frac{[px]}{[p]}$ jest přibližně

$$\pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{(n-1)[p]}}. \quad (16)$$

Podobně střední chybu vyrovnané hodnoty (14') můžeme psáti

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} &= \frac{m_0}{\sqrt{\frac{m_0^2}{m_1^2} + \frac{m_0^2}{m_2^2} + \dots + \frac{m_0^2}{m_n^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \dots + \frac{1}{m_n^2}}}. \end{aligned} \quad (16')$$

A střední chyba ve vzorci (14'') bude rovna

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}}} = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \quad (16'')$$

Jde-li o přímá měření stejných vah ($p_i = 1$), bude střední chyba pro jednotku váhy rovna

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad (15'')$$

a střední chyba vyrovnané hodnoty, t. j. aritmetického středu $x' = [x] : n$ jest

$$\pm \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)n}}. \quad (16')$$

Abychom mohli počítati s malými čísly, píšeme $x_i = d + \dot{x}_i$, kde d je vhodně zvolená přibližná hodnota. Pak jest

$$x' = \frac{[px]}{[p]} = \frac{[p(d + \dot{x})]}{[p]} = d + \frac{[p\dot{x}]}{[p]}. \quad (17)$$

Dále bude

$$v_i = x' - x_i = d + \frac{[p\dot{x}]}{[p]} - d - \dot{x}_i = \frac{[p\dot{x}]}{[p]} - \dot{x}_i. \quad (18)$$

Pak

$$v_i^2 = \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]^2} - 2 \frac{[p\dot{x}]}{[p]} \dot{x}_i + \dot{x}_i^2,$$

tedy

$$[pv^2] = [p] \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]^2} - \frac{2 [p\dot{x}]}{[p]} [p\dot{x}] + [p\dot{x}^2] = [p\dot{x}^2] - \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]}. \quad (19)$$

Pro přímá měření stejných vah ($p_i = 1$), bude

$$x' = d + [\dot{x}] : n, \quad (17')$$

$$v_i = [\dot{x}] : n - \dot{x}_i, \quad (18')$$

$$[v^2] = [\dot{x}^2] - [\dot{x}]^2 : n. \quad (19')$$

5. Dvojice měření. a) Délky stran v polygonální síti se měří obyčejně dvakrát, jednou při postupu vpřed (p) a po druhé při postupu zpět (z). Předpokládáme, že jsou přibližně stejné, a označíme délku naměřenou pro i -tou stranu písmenem l_{ip} resp. l_{iz} .

Takovým a podobným měřením (na př. výškových rozdílů mezi dvěma sousedními výškovými značkami) se říká dvojice měření.

Označíme-li $l_{iz} - l_{ip} = d_i$ (rozdíl, diferenci měření zpět a měření vpřed), budou vyrovnané hodnoty $l'_i = \frac{1}{2}(l_{iz} + l_{ip})$ a odchylky

$$v_{i1} = \frac{1}{2}(l_{iz} - l_{ip}) = \frac{1}{2}d_i, \quad v_{i2} = \frac{1}{2}(l_{ip} - l_{iz}) = -\frac{1}{2}d_i.$$

Podle vzorce (15') bude střední chyba jednoho měření

$$\pm \frac{d_i}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

a podle vzorce (16') střední chyba aritmetického průměru obou měření

$$\pm \frac{1}{2}d_i. \quad (20')$$

Uvažujme nyní o rozdílech $l_{iz} - l_{ip} = d_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Označíme-li skutečné chyby veličin l_{iz} a l_{ip} písmeny ε_{iz} a ε_{ip} , musí být $l_{iz} + \varepsilon_{iz} = l_{ip} + \varepsilon_{ip}$, čili $l_{iz} - l_{ip} + (\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{ip}) = 0$. Rozdíly $\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{ip} = -d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou tedy skutečné chyby rozdílů měření zpět a vpřed.

Protože jsme předpokládali, že délky stran byly přibližně stejné, můžeme všem naměřeným délkám prisuzovati stejné váhy. Tedy i rozdíly d_i mají stejné váhy, jež volíme za 1. Pak střední hodnota těchto rozdílů, právě protože je můžeme považovati za skutečné chyby o váze rovné 1, je podle vzorce I, (10') rovna

$$\pm \sqrt{[d^2] : n}. \quad (21)$$

Protože se váhy mají k sobě jako převrácené hodnoty čtverců středních chyb, budou podle vzorců (20) a (20') váhy jednot-

livých měření rovny 2 a váhy aritmetických středů rovny 4, takže příslušné střední chyby pro jednotlivá měření jsou

$$\pm \sqrt{[d^2] : 2n} \quad (21')$$

a pro aritmetické středy

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{[d^2] : n}. \quad (21'')$$

b) Liší-li se značně délky stran (tratí), musíme předpokládati, že naměřené rozdíly mají nestejnou váhu. Označíme váhu rozdílu d_i písmenem p_i . Při nivelacích na př. se klade váha rozdílu d_i rovna $1 : S_i$, kde S_i je délka trati v km. To značí, že váhu rovnou jednotce přisuzujeme rozdílu d pro trati rovnou 1 km.

Abychom vypočetli v tomto případě střední hodnotu d' rozdílu pro váhu rovnou 1, musíme nejprve naměřené rozdíly d převést na rozdíly o váze rovné 1. To se stane tím, že je násobíme $\sqrt{p_i}$ (viz II, odst. 3). Pak užijeme zase vzorce I, (10'), takže

$$d' = \pm \sqrt{[pd^2] : n}. \quad (22)$$

Stejně jako v případě a) bude střední chyba pro jedno měření a váhu rovnou 1 nebo střední kilometrová chyba pro jedno měření

$$\pm \sqrt{[pd^2] : 2n}. \quad (22')$$

A střední kilometrová chyba pro střed ze dvou měření jest

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{[pd^2] : n}. \quad (22'')$$

6. Příklady na vyrovnání přímých měření. 1. Pro dobu kyvu kyvadla č. 5 bylo naměřeno

0,50862228 sec,

245, (188; 217; 305; 278; 247; 328; 211; 159; 316; 307).

Jest vypočísti výslednou hodnotu, dále střední chybu pro jednotku váhy (t. j. střední chybu jednoho měření) a střední chybu výsledku.

Položíme $d = 0,50862$. Pak v jednotkách 10^{-8} bude
 $\dot{x}_i = 228, (245; 188; 217; 305; 278; 247; 328; 211; 159; 316; 307)$;
 odtud $[\dot{x}] = 3029$ a ${}_{1/2}[\dot{x}] = 252$, tedy výsledná hodnota
 $0,50862252$ sec. Pak zase v jednotkách 10^{-8} bude

$$v_i = [\dot{x}] : n - \dot{x}_i = +24, (+7, +64, +35, -53, -26, +5, \\ -76, +41, +93, -64, -55),$$

$$v_i^2 = 576, (49; 4096; 1225; 2809; 676; 25; 5776; 1681; 8649; \\ 4096; 3025). \text{ Odtud dostaneme } [v^2] = 32683 \cdot 10^{-16}.$$

Podle vzorce (15'') bude

$$m_0 = \pm \sqrt{2971} \cdot 10^{-8} = \pm 5,45 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

A střední chyba výsledku podle vzorce (16') jest

$$\pm \sqrt{\frac{32683}{132}} \cdot 10^{-8} = \pm \sqrt{247,6} \cdot 10^{-8} = \pm 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

Užijeme-li vzorce (19'), bude $[\dot{x}^2] = 797251 \cdot 10^{-16}$,
 $[\dot{x}]^2 = 3029^2 \cdot 10^{-16} = 9174841 \cdot 10^{-16}$, tedy
 ${}_{1/2}[\dot{x}]^2 = 764570 \cdot 10^{-16}$ a konečně $[v^2] = 32681 \cdot 10^{-16}$.

Rozdíl mezi hodnotou $[v^2]$ vypočtenou podle vzorce (19')
 a hodnotou vypočtenou přímo z odchylek v_i , je zaviněn za-
 okrouhlováním při výpočtu v_i resp. x' . Hodnota $32681 \cdot 10^{-16}$
 je přesnější.

Označíme-li chybu ve výsledku, pocházející ze zaokrouhle-
 ní, písmenem ε , budou správné hodnoty odchylek rovny
 $v_i + 2$, správné hodnoty jejich čtverců $v_i^2 + 2\varepsilon v_i + \varepsilon^2$
 a správná hodnota součtu čtverců odchylek

$$[v^2] + 2\varepsilon [v] + n\varepsilon^2.$$

V uvažovaném případě je $\varepsilon = 0,42 \cdot 10^{-8}$, $[v] =$
 $= -5 \cdot 10^{-8}$, tedy $2\varepsilon [v] = -4,20 \cdot 10^{-16}$. A protože
 $n \cdot \varepsilon^2 = 12 \cdot 0,1764 \cdot 10^{-16} = 2,12 \cdot 10^{-16}$, je $2\varepsilon [v] + n\varepsilon^2 =$
 $= -2,08 \cdot 10^{-16}$. Proto byl součet čtverců odchylek, vy-
 počtený přímo z odchylek v_i , o 2 jednotky řádu 10^{-16} větší
 než správnější hodnota vypočtená podle vzorce (19'). Oby-
 čejně se omezujeme na přímý výpočet $[v^2]$ z odchylek v_i .

Aby byl při výpočtu přehled, je dobře prováděti výpočet v tabulce, která počítajícího sama nutí k pořádku.

Předešlý příklad sestavený v tabulce bude:

Tabulka II.

x_i	$v_i = \frac{[\dot{x}]}{n} - x_i$	v_i^2
228	+ 24	576
245	+ 7	49
188	+ 64	4096
217	+ 35	1225
305	— 53	2809
278	— 26	676
247	+ 5	25
328	— 76	5776
211	+ 41	1681
159	+ 93	8649
316	— 64	4096
307	— 55	3025
$[\dot{x}] = 3029$ $\frac{1}{2}[\dot{x}] = 252$	$[v] = - 5$	$[v^2] = 32683$

$$m_0 = \pm \sqrt{32683 : 11} = \pm 5,45 \cdot 10^{-7} \text{ sec};$$

$$m_0 : \sqrt{n} = \pm 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

$$\text{Výsledek } 0,50862252 \pm 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

2. Základna na české technice v Brně byla měřena po sobě čtyřmi různými invarovými měřítky (dráty a pásmy). Výsledky měření*) byly

$$12004 \text{ cm} + 0,755 \text{ cm}, (0,684; 0,659; 0,703).$$

Vypočísti výslednou hodnotu, střední chybu pro jednotku

*) A. Semerád: Podrobná délková měření dráty a pásmy invarovými, Techn. Obzor 1916, tab. V.

váhy (t. j. pro měření jedním měřítkem) a střední chybu výsledku.

(Výsledek $12004,100 \text{ cm} \pm 0,020 \text{ cm}$, $m_0 = \pm 0,041 \text{ cm}$.)

3. Na stanici Trenk byly naměřeny pro úhel Mednicken-Fuchsberg tyto hodnoty*)

$83^\circ 30' 36,25''$

7,50, (6,00; 4,77; 3,75; 0,25; 3,70; 6,14; 4,04;
6,96; 3,16; 4,57; 4,75; 6,50; 5,00; 4,75;
4,25; 5,25).

Vypočítá výslednou hodnotu, střední chybu pro jednotku váhy (t. j. pro jedno měření) a střední chybu výsledku.

(Výsledek $83^\circ 30' 34,87'' \pm 0,39''$, $m_0 = \pm 1,66''$.)

4. Při nivelaci byly zjištěny tyto rozdíly dvojic měření v mm: $d = -0,6; +0,4; -0,6; -1,2; +2,4$.**) Příslušné délky tratí v km byly 0,72; 0,42; 0,47; 0,48; 0,51. Jaká plyne odtud střední kilometrová chyba pro jedno měření a pro střed z obou měření?

K výpočtu uijeme vzorce (22') a (22''), při čemž váhy p jsou rovny převráceným hodnotám délek tratí.

Bude $[pd^2] = 15,94$ a odtud střední kilometrová chyba pro jedno měření $\pm \sqrt{\frac{1}{10}[pd^2]} = \pm 1,26 \text{ mm}$ a střední kilometrová chyba pro střed obou měření $\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}[pd^2]} = \pm 0,89 \text{ mm}$.

5. Při určování času byly odvozeny tyto opravy chronometru z pozorování 21 hvězd:

$-8,78^s$

76, (85; 78; 51; 64; 68; 63; 58; 80; 75; 78; 96; 64;
65; 83; 70; 64; 79; 90; 93).

*) Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, I, Stuttgart, 1904 (5. Aufl.), str. 22.

**) Jordan, l. c. str. 37.

Za předpokladu, že váha všech měření byla stejná, vypočtete vyrovnanou hodnotu opravy chronometru, její střední chybu a střední chybu jednoho měření (střední chybu pro jednotku váhy)!*)

(Výsledek — $8,74^s \pm 0,03^s$, $m_0 = \pm 0,117^s$.)

6. Gravitační konstanta k byla určena několikrát různými badateli:

Cornu a Baille (1873).....	určili $k = 6668 \cdot 10^{-11}$
Poynting (1894)	$6698 \cdot 10^{-11}$
Boys (1894).....	$6657 \cdot 10^{-11}$
Richarz a Krigar-Menzel (1896)	$6685 \cdot 10^{-11}$
Braun (1897)	$6658 \cdot 10^{-11}$

Předpokládáme, že váhy těchto jednotlivých měření jsou stejné. Vypočtete výslednou hodnotu pro gravitační konstantu a její střední chybu!

(Výsledek: $6673,2 \cdot 10^{-11} \pm 8,0 \cdot 10^{-11}$.)

7. Pro určitou délku byly naměřeny tyto hodnoty:

5000,7 mm při 6 měřeních, 5007,9 mm při 15 měřeních,
4997,1 mm při 6 měřeních, 5002,1 mm při 8 měřeních,
5001,9 mm při 15 měřeních, 5001,1 mm při 8 měřeních.

Vypočtete vyrovnanou hodnotu a její střední chybu i střední chybu pro jednotku váhy za předpokladu, že váhy jsou rovny počtu měření!

Zvolíme $d = 4997,1$ a počítáme v připojené tabulce postupně ve sloupcích: \dot{x}_i ; p_i , $[p]$; $p_i \dot{x}_i$, $[p\dot{x}]$, $[p\dot{x}] : [p]$; $v_i = [p\dot{x}] : [p] - \dot{x}_i$; v_i^2 ; $p_i v_i^2$, $[pv^2]$; m_0 , $m_0 : \sqrt{[p]}$.

*) Wright-Hayford, l. c. str. 37 a 43.

Tabulka III.

\dot{x}_i	p_i	$p_i \dot{x}_i$	v_i	v_i^2	$p_i v_i^2$
+ 3,6	6	21,6	+2,05	4,2025	25,2150
+ 0,0	6	0,0	+5,65	31,9225	191,5350
+ 4,8	15	72,0	+0,85	0,7225	10,8375
+10,8	15	162,0	-5,15	26,5225	397,8375
+ 5,0	8	40,0	+0,65	0,4225	3,3800
+ 4,0	8	32,0	+1,65	2,7225	21,7800
	$[p] = 58$	$[p\dot{x}] = 327,6$			$[pv^2] = 650,5850$

$$[p\dot{x}] : [p] = 5,65$$

$$m_0 = \pm \sqrt{650,5850 : 5} = \pm \sqrt{130,1170} = \pm 11,4 \text{ mm,}$$

$$m_0 : \sqrt{[p]} = \pm \sqrt{130,1170 : 58} = \pm 1,50 \text{ mm.}$$

Tedy výsledek $x' = 5002,75 \text{ mm} \pm 1,50 \text{ mm}$.

8. Na české technice v Brně byla změřena dvakrát tíže. V roce 1926 bylo naměřeno 980,9618 dyn, při čemž střední chyba byla $\pm 1,39 \cdot 10^{-3}$ dyn. V r. 1928 bylo naměřeno 980,9606 dyn se střední chybou $\pm 1,26 \cdot 10^{-3}$ dyn. Určete výslednou hodnotu z obou měření (s ohledem na jejich váhy) a střední chybu výsledku.

Podle vzorce (14'') bude $x' = d + \frac{m_2^2 x_1 + m_1^2 x_2}{m_1^2 + m_2^2}$.

Zvolíme $d = 980,96$ dyn. Pak $\dot{x}_1 = 0,0018$, $\dot{x}_2 = 0,0006$; $m_1^2 = 1,9321$, $m_2^2 = 1,5876$. Tedy

$$x' = 980,96 + \frac{0,004017}{3,52} = 980,96 + 0,0011 = 980,9611 \text{ dyn.}$$

Střední chyba výsledku je podle vzorce (16'') rovna

$$\frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \frac{1,39 \cdot 1,26}{\sqrt{3,52}} \cdot 10^{-3} = \pm 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ dyn.}$$

Tedy výsledek

$$980,9611 \pm 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ dyn.}$$

9. Výsledky měření rozdílu zeměpisné délky mezi Washingtonem a Key West a příslušné pravděpodobné chyby byly

1873, prosinec	24	19 ^m 1,42 ^s	$\pm 0,044^s$
	26	1,37	37
	30	1,38	36
	31	1,45	36
1874, leden	9	1,60	46
	10	1,55	45
	11	1,57	47

Určete výslednou hodnotu s ohledem na váhy a příslušnou střední chybu.*).

Ve vzorci (14') se vyskytují v čitateli i jmenovateli čísla $\frac{1}{m_i^2}$, můžeme tedy místo nich klásti úměrné hodnoty $\frac{1}{r_i^2}$, neboť $m_i = 1,483r_i$, [I, (31)].

$$\text{Pro } r_i = 3,6 \cdot 10^{-2} (3,7 \cdot 10^{-2}; 4,4 \cdot 10^{-2}; 4,5 \cdot 10^{-2}; \\ 4,6 \cdot 10^{-2}; 4,7 \cdot 10^{-2})$$

$$\text{bude } \frac{1}{r_i^2} \doteq 772, (730; 517; 494; 473; 453).$$

$$\text{Klademe-li } d = 19^m 1,3^s, \text{ bude } \dot{x}_i = + 0,12^s, (+ 0,07^s; \\ + 0,08^s; + 0,15^s; + 0,30^s; + 0,25^s; + 0,27^s).$$

$$\text{Tedy podle vzorce (14') je } \left[\frac{\dot{x}}{r^2} \right] : \left[\frac{1}{r^2} \right] = \frac{678,41}{4211} = + 0,161, \\ \text{čili } x' = 19^m 1,461^s.$$

A podle vzorce (16) bude střední chyba hodnoty x' rovna

*) Wright-Hayford, l. c. str. 72.

$$\pm \frac{1,483}{\sqrt{\left[\frac{1}{r^2}\right]}} = \pm \frac{1,483}{\sqrt{4211}} \text{ sec} = \pm 0,228^s.$$

Tedy výsledek $19^m 1,461^s \pm 0,228^s$.

10. Rychlost světla byla určena Fizeauem a jinými takto:

$$\begin{aligned} 298\ 000 \text{ km} \pm 1500 \text{ km}; & \quad 300\ 100 \text{ km} \pm 1500 \text{ km}; \\ 298\ 500 \text{ km} \pm 1500 \text{ km}; & \quad 299\ 930 \text{ km} \pm 150 \text{ km}. \\ 299\ 990 \text{ km} \pm 300 \text{ km}; & \end{aligned}$$

Jsou-li čísla uvedená na druhém místě pravděpodobné chyby, určete vyrovnanou hodnotu a její střední chybu.*)

Zvolíme $d = 299\ 900 \text{ km}$ a za jednotku váhy zvolíme váhu měření s největší pravděpodobnou chybou ($\pm 1500 \text{ km}$).

Podle vzorce $p = \frac{m_0^2}{m^2} = \frac{m_0^2}{1,483^2 \cdot r^2}$ budou váhy příslušné pravděpodobným chybám $\pm 300 \text{ km}$ a $\pm 150 \text{ km}$ rovny 25 a 100. Při tom $l = \frac{m_0^2}{1,483^2 \cdot 1500^2}$, čili

$$m_0 = \pm 1500 \text{ km} \cdot 1,483.$$

Bude tedy $\dot{x}_i = -1900, -1400, +90, +200, +30$
a příslušná $p_i = 1, 1, 25, 1, 100, [p] = 128$.

Tedy $p_i \dot{x}_i = -1900, -1400, +2250, +200, +3000,$
 $[p\dot{x}] = +2150$.

Odtud $\frac{[p\dot{x}]}{[p]} = + \frac{2150}{128} = +17$, čili $x' = 299\ 917 \text{ km}$.

Střední chyba podle vzorce $m_0 : \sqrt{[p]}$ bude

$$\pm \frac{1500 \text{ km}}{\sqrt{128}} \cdot 1,483 = \pm 197 \text{ km}.$$

Tedy výsledek $299\ 917 \text{ km} \pm 197 \text{ km}$.

*) Wright-Hayford, l. c. str. 57—58.