

## Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace

---

Konstrukce v omezené nákresně

In: Václav A. Hruška (author): Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1940. pp. 14–31.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405492>

### Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

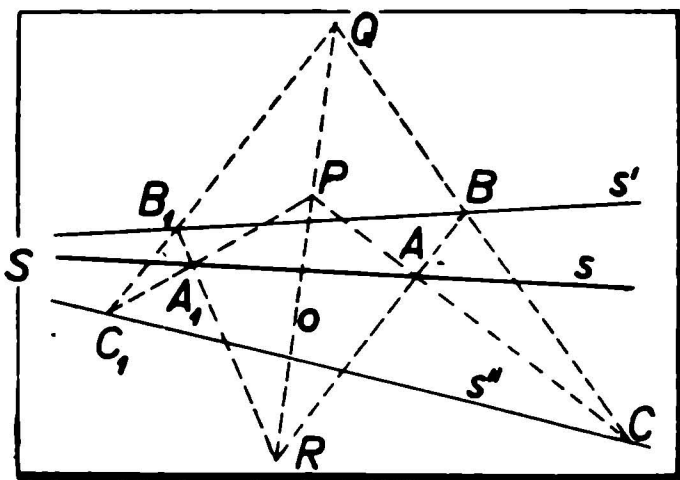


This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## 2.

KONSTRUKCE V OMEZENÉ NÁKRESNĚ.<sup>1)</sup>

**2,1. Nedostupné body a přímky.** A. Bod  $A$  na omezené nákresně jest spojití s nedostupným průsečíkem  $S$  přímek  $s'$  a  $s''$  (obr. 4). Řešení této úlohy bylo již naznačeno v odst. 1,3. Výhodnější však je užití k tomu t. zv. Desarguesovy konfigurace.



Obr. 4. Spojiti bod  $A$  s nedostupným průsečíkem přímek  $(s', s'') \equiv S$ . (Desarguesova konfigurace.)

$BC$  v bodě  $Q$  atd.). Hledaná spojnice  $s \equiv SA$  prochází pak také bodem  $A_1$ .

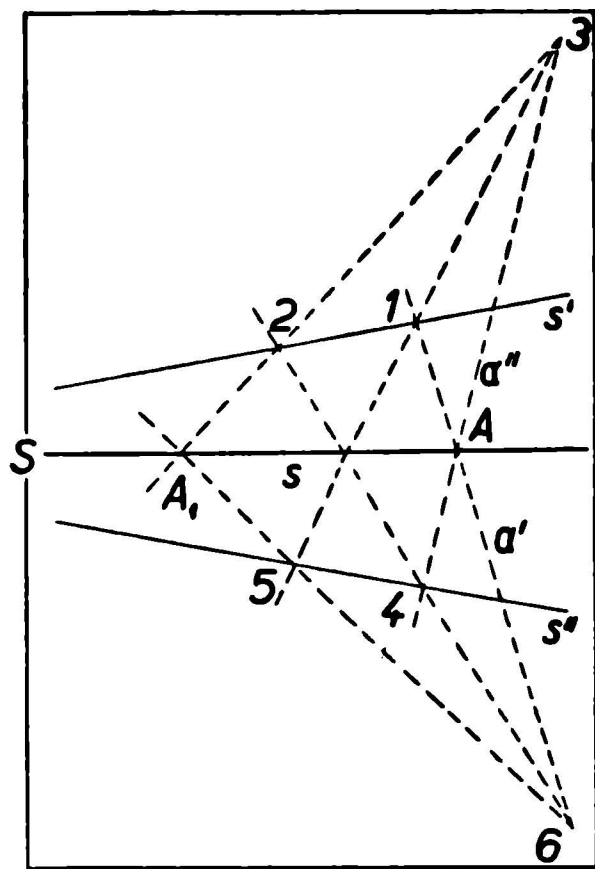
Sestrojíme trojúhelník  $ABC$ , jehož jedním vrcholem je daný bod  $A$  a jehož ostatní dva vrcholy leží resp. na přímkách  $s'$  a  $s''$ . Zvolme osu  $o$  a sestrojíme trojúhelník  $A_1B_1C_1$ , jehož vrcholy  $B_1$  a  $C_1$  leží také na  $s'$  a  $s''$  a jehož strany se protínají na  $o$  s odpovídajícími stranami trojúhelníka  $ABC$  (tedy na př.  $B_1C_1$  protne

<sup>1)</sup> A. Adler, cit. kap. 1, pozn. 4); F. Redl, *Constructions de planimétrie. Solutions nouvelles de problèmes compliqués par des conditions particulières.* (L'Enseignement mathématique, t. XII, 1910, str. 293—310); Th. Vahlen, *Konstruktionen und Approximationen* (Leipzig, 1911); A. Witting, *Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene* (Pro gr. d. Gymn. zum hlg. Kreuz, Dresden, 1899); P. Zühlke, *Konstruktionen in begrenzter Ebene* (Math.-Physik. Bibl., sv. 11).

Aby konstrukce zůstala celá na nákresně a abychom se vyhnuli spojnicím, určeným příliš blízkými body a tedy nepřesným, doporučuje se vycházeti z vhodně voleného bodu  $Q$ . Vedme jím osu  $o$  a přímky  $QBC$  a  $QB_1C_1$  tak, aby  $A$  byl mezi  $o$  a  $QBC$  a aby také průsečíky  $R$  a  $P$  stran  $AB$  a  $AC$  s osou  $o$  padly na nákresnu. Doplněná konfigurace, která poskytuje bod  $A_1$ , zůstane pak na nákresně. Ke konstrukci stačí jediné pravítko.

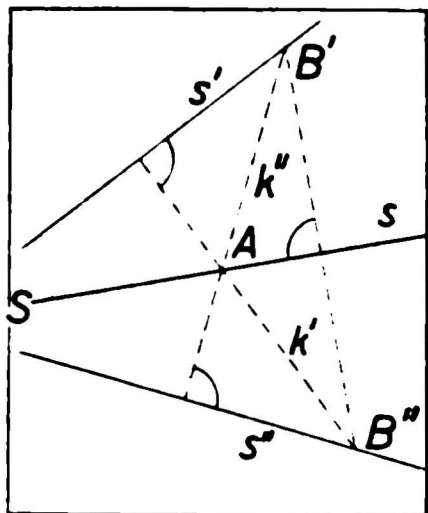
Volíme-li osu  $o$  v nekonečnu, strany trojúhelníka  $ABC$  a trojúhelníka  $A_1B_1C_1$  jsou rovnoběžné a oba trojúhelníky stejnohlé (homothetické) podle středu  $S$ . Naše konstrukce přejde u této úlohy v řešení známé ze střední školy. Nevýhodou tohoto „zjednodušení“ konstrukce jest nutnost vedení rovnoběžek, což je operace málo přesná, zvláště, jsou-li rovnoběžky od sebe značně vzdálené. Mimo to ke konstrukci jest pak zapotřebí kromě pravítka ještě kružítka nebo kreslicího trojúhelníka.

Úlohu však lze řešiti i jinými konstrukcemi, na příklad Pascalovou větou v kuželosečce degenerované ve dvě přímky  $1; 3; 5$  a  $2; 4; 6$  (obr. 5). Bodem  $A$  vedme přímky  $a'$ ,  $a''$  tak, aby protály přímky  $s'$  a  $s''$  na nákresně v bodech  $1 \equiv (s', a')$ ,  $4 \equiv (s'', a'')$ . Zvolme na  $a'$  a  $a''$  body  $3, 6$  a označme průsečíky:  $2 \equiv (s', 46)$  a  $5 \equiv (s'', 13)$ . Na Pascalově přímce  $s$  leží body  $S \equiv (12, 45) \equiv (s', s'')$ ,



Obr. 5. Spojiti bod  $A$  s nedostupným průsečíkem přímek  $(s', s'') \equiv S$ . (Užitím Pascalovy věty).

$A \equiv (34, 61)$ ,  $A_1 \equiv (23, 56)$  a jest to tedy hledaná spojnice  $AS$ . Velmi výhodné je voliti body 3 a 6 v nekonečnu. Podobně by bylo možno užiti k této konstrukci věty Brianchonovy v kuželosečce degenerované ve dva svazky paprsků (viz Zühlke, cit. str. 10).



Obr. 6. Spojiti bod  $A$  s nepřístupným průsečíkem přímek  $(s', s'') \equiv S$ . (Užitím výšek trojúhelníka.)

Ještě jiné řešení úlohy podává věta, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě (obr. 6). Z  $A$  spustíme kolmice  $k'$  a  $k''$  na  $s'$  a  $s''$  a označíme  $B'' \equiv (k', s'')$  a  $B' \equiv (k'', s')$ . Pak je spojnice  $s \equiv AS$  kolmá na  $B'B''$ .

B. Veškeré body spojnice dvou nedostupných bodů mohou padati mimo nákresnu. Pak říkáme, že ona spojnice je nedostupná. Část spojnice takových dvou nedostupných bodů však může také padnouti na nákresnu. Jest sestrojiti, pokud existuje, dostupnou část takové spojnice dvou nedostupných bodů  $A \equiv (a', a'')$  a  $S \equiv (s', s'')$ .

Zvolme vhodně  $B$  na  $s'$  a  $C$  na  $s''$  a spojíme je s  $A$ . Padnou-li průsečíky  $(s', a')$  a  $(s'', a'')$  na nákresnu jako v obr. 7, volíme je přímo za  $B$  a  $C$ . V opačném případě užijeme k sestrojení spojnic  $BA$  a  $CA$  některé z konstrukcí v uvedených pod A.

Konstrukcí podle obr. 4 sestrojíme nyní na nákresně bod  $A_1$  na spojnici  $AS$ , který spojíme opět podle A s nedostupným bodem  $A$  nebo  $S$  (na př. v obr. 7 užitím  $\triangle A_1PR \sim \triangle A_2P_2R_2$ ).

Jiné řešení podává konstrukce popsaná v odst. 1,3 (obr. 3), zvolíme-li čtyřroh  $CDEF$  na nákresně tak, aby také  $H$  byl dostupný. Jeho spojnice s nedostupným  $A$  nebo  $S$  je hledanou spojnicí obou nedostupných bodů. Padnou-li zbývající čtyři průsečíky přímek  $a', a'', s', s''$  na nákresnu, jest nejjednodušší voliti je přímo za čtyřroh  $CDEF$  jako v obr. 8.

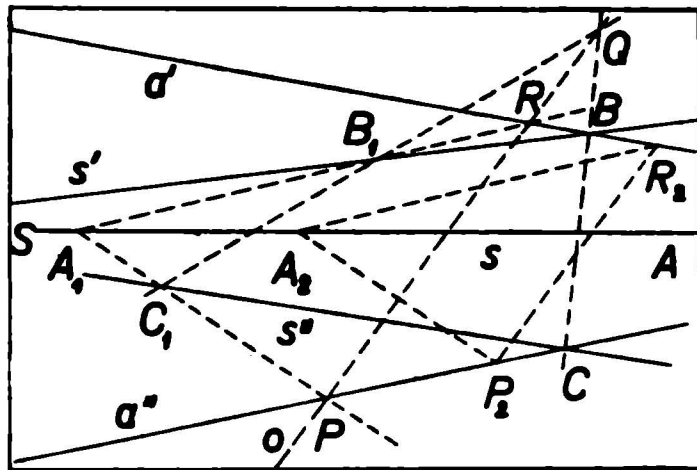


Nedostupným bodem  $S \equiv (s', s'')$  vésti rovnoběžku  $s$  s přímkou  $a$  jest speciálním případem předešlé úlohy, padne-li  $A$  do nekonečna na  $a$ . Lépe však úlohu řešíme spuštěním kolmice z  $S$  na libovolnou přímkou  $k \perp a$  (odst. 2,2 A.)

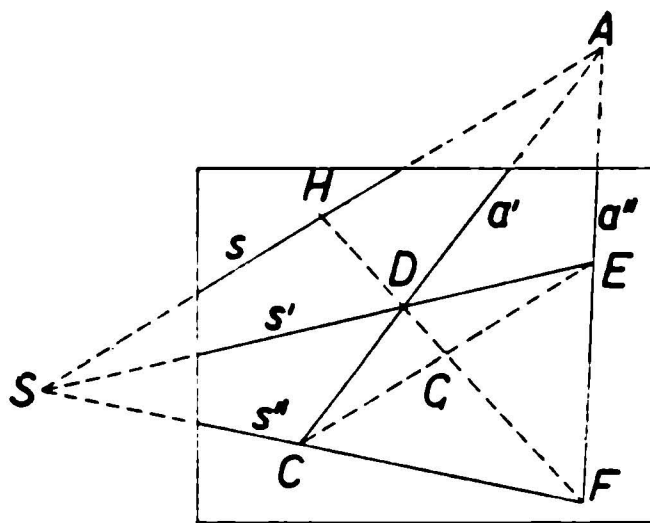
C. Dosud jsme mlčky předpokládali, že nedostupné body jsou určeny jako průsečíky dvou dostupných přímek. Říkejme jim nedostupné body prvního řádu.

V konstrukcích však může býti bod také průsečíkem přímky dostupné a přímky nedostupné, která sama je určena jako spojnice dvou nedostupných bodů prvního řádu. Nazýváme jej pak nedostupným bodem druhého řádu. Na příklad v obr. 9 je  $S \equiv (s', s'')$  takovým nedostupným bodem druhého řádu, jelikož přímka  $s'' \equiv (B, C)$  jest sama nedostupná. Body  $B \equiv (b', b'')$  a  $C \equiv (c', c'')$ , jimiž je určena, jsou nedostupné prvního řádu.

Jest však také možno, že nedostupný bod je dán jako průsečík dvou nedostupných přímek, jako na př.  $S \equiv (s', s'')$  v obr. 10. Nazýváme pak  $S$  nedostupným bodem řádu třetího.

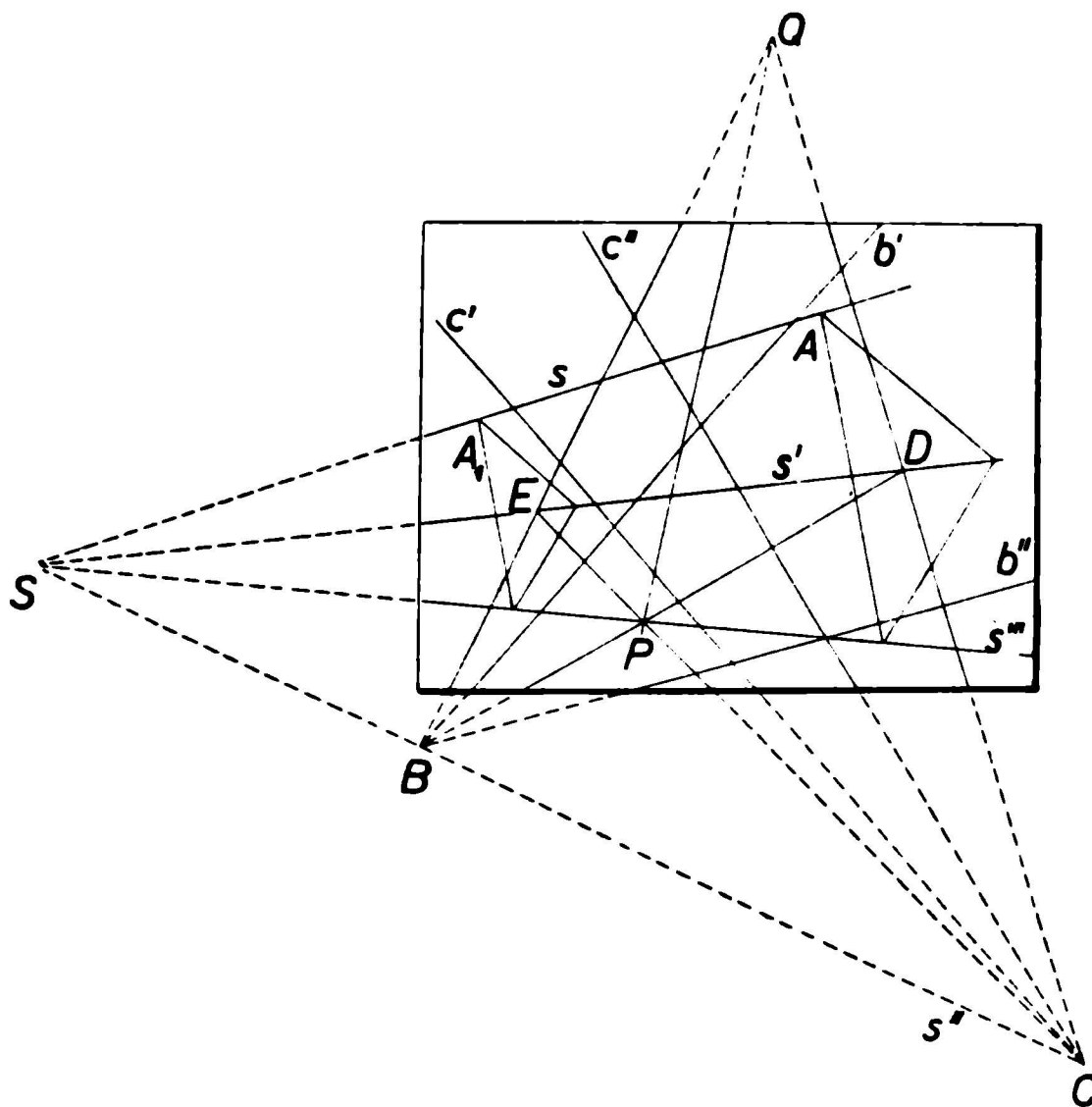


Obr. 17. Sestrojení spojnice  $s$  dvou nepřístupných bodů  $A \equiv (a', a'')$ ,  $S \equiv (s', s'')$ .



Obr. 8. Jiné sestrojení spojnice dvou nedostupných bodů  $A \equiv (a', a'')$ ,  $S \equiv (s', s'')$ .

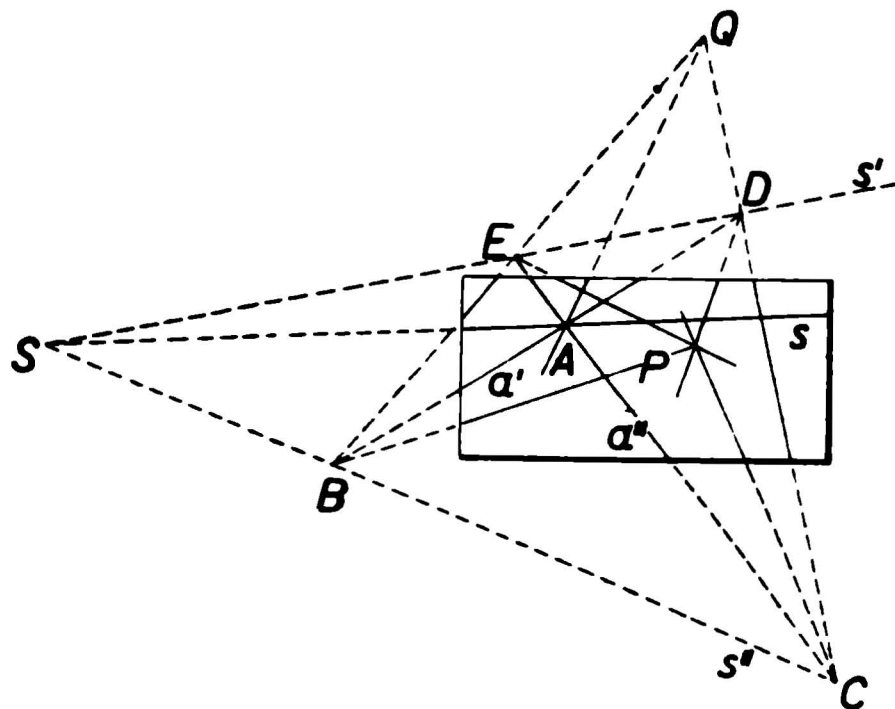
a) Nejprve sestrojme spojnicí  $s$  bodu  $A$  (obr. 9) s nedostupným bodem druhého řádu  $S \equiv (s', s'')$ . Na dostupné přímce  $s'$  zvolené body  $E, D$  spojme podle odst. A s oběma nedostupnými body prvního řádu  $B \equiv (b', b'')$ ,



Obr. 9. Sestrojení spojnice bodu  $A$  s nedostupným bodem  $S$  druhého řádu.

$C \equiv (c', c'')$ , které určují nedostupnou přímku  $s'' \equiv BC$ . Tato konstrukce však byla v obr. 9 vynechána pro přehlednost. Označme  $P$  průsečík spojnic  $EC$  a  $DB$  a  $Q$  průsečík spojnic  $EB$  a  $DC$ . Volíme-li vhodně body  $E, D$  (hlavně navzájem dosti blízko), padne  $P$  určitě na nákresnu. Spojme

jej s  $Q$ , který může být i nedostupný, ale pak nejvýš prvního řádu, jelikož je průsečíkem dostupných přímek  $EB$  a  $DC$ . V úplném čtyřrohu  $BCDE$  tvoří spojnice  $PE$ ,  $PD$ ,  $PQ$  a  $PS$  harmonickou čtveřinu, z níž prvé tři paprsky známe a k nimž tedy čtvrtý  $s''' \equiv (PS)$  snadno sestrojíme. Nedostupný bod  $S$  je nyní již určen jako průsečík dostupných přímek  $s'$  a  $s'''$ , tedy je nedostupný již pouze prvního řádu. Jeho spojnicí

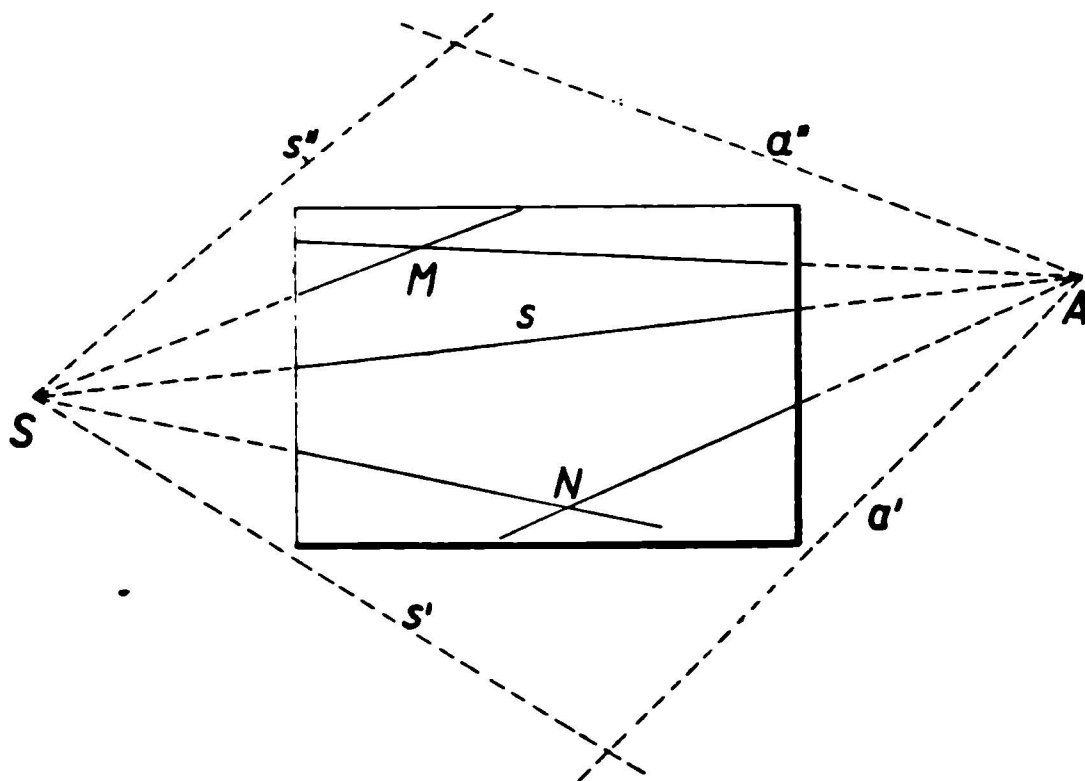


Obr. 10. Sestrojení spojnice bodu  $A$  nákresny s nedostupným bodem  $S$  třetího řádu.

s  $A$  dovedeme vždy sestrojiti, buď podle odst. A, je-li  $A$  dostupný, nebo podle odst. B, je-li  $A$  nedostupný prvního řádu.

b) Nedostupný bod třetího řádu  $S \equiv (s', s'')$  jest spojiti s dostupným bodem  $A$  (obr. 10). Bodem  $A$  vedme dvě přímky  $a'$ ,  $a''$ , jejichž průsečíky  $BCDE$  s  $s''$  a  $s'$  jsou nedostupné body druhého řádu. Právě popsanou konstrukcí spojme je s libovolně zvoleným dostupným bodem  $P$ . Tím jsme body  $BCDE$  proměnili v nedostupné body řádu pouze prvního.

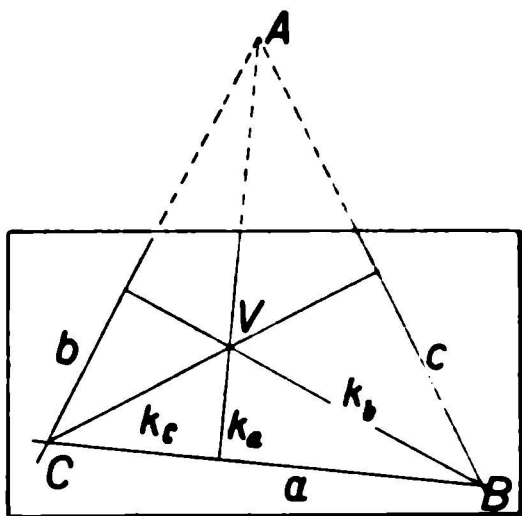
Podle odst. B veďme spojnice  $BE$  a  $CD$ , které nepadnou zcela mimo názkresnu, jestliže přímky  $a'$ ,  $a''$  byly vhodně vedeny bodem  $A$ . Průsečík  $Q$  spojnic  $BE$  a  $CD$  jest tedy nedostupný řádu nejvyšší prvního. Spojme jej s  $A$  (odst. A). Hledaná spojnice  $s \equiv (SA)$  pak je paprsek harmonicky sdružený s  $AQ$  vzhledem k  $a'$  a  $a''$ .



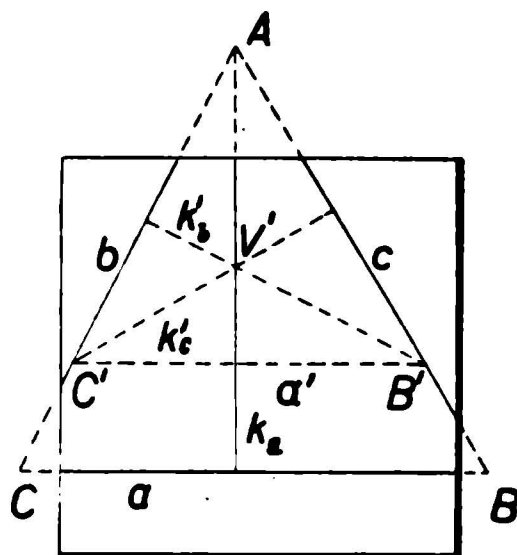
Obr. 11. Rozbor sestrojení spojnice  $s$  dvou nedostupných bodů  $A$ ,  $S$  třetího řádu.

c) Nyní můžeme také nakresliti spojnici dvou nedostupných bodů řádu druhého nebo třetího. Na příklad v obr. 11 je naznačeno sestrojení spojnice dvou nedostupných bodů třetího řádu  $A \equiv (a', a'')$ ,  $S \equiv (s', s'')$ . Na názkresně zvolme dva body  $M$  a  $N$  a spojme je s  $A$  i s  $S$  konstrukcí naznačenou v obr. 10. Tím je proměníme v nedostupné body pouze řádu prvního. Jejich spojnici  $s$  sestrojíme tedy nyní podle odst. B. V obr. 11 byly vynechány veškeré konstrukce, jichž provedení bylo již dříve vyloženo.

**2,2. Metrické úlohy v omezené nákresně. A.** Z nedostupného průsečíku  $A$  dostupných přímek  $b$  a  $c$  jest spustiti kolmici  $k_a$  na danou dostupnou přímku  $a$ .



Obr. 12. Spuštění kolmice  $k_a$  na přímku  $a$  z nedostupného bodu  $A$  prvního řádu.

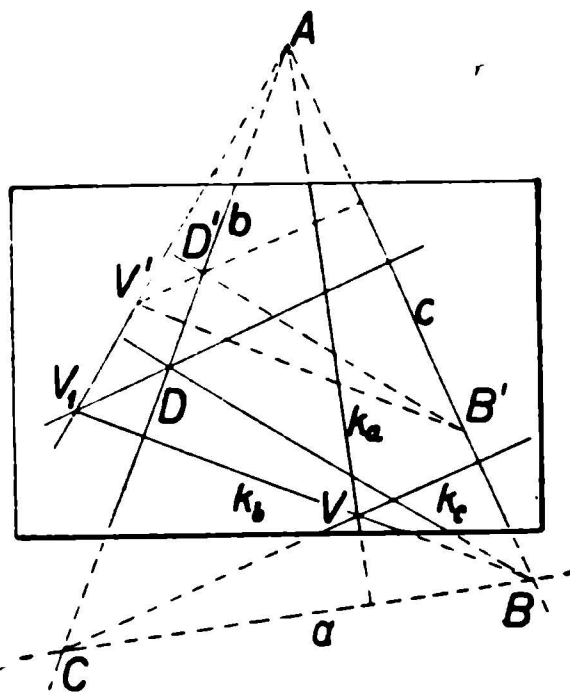


Obr. 13. Alternativa obr. 12, je-li jeden (příp. oba) z bodů  $B, C$  nepřístupný.

Užijeme věty, že výšky trojúhelníka, vytvořeného přímkami  $a, b, c$  se protínají v jednom bodě  $V$ .

a) Jsou-li  $B \equiv (a, c)$  a  $C \equiv (a, b)$  dostupné (obr. 12), jest sestrojení bodu  $V$  zřejmé. Je-li  $V$  dostupný, kolmice z něho spuštěná na  $a$  je hledanou  $k_a$ . Nemí-li  $V$  dostupný, jest nejvýš nedostupný prvního řádu. Hledanou výšku sestrojíme pak jako spojnicí  $k_a \equiv VA$  podle odst. 2,1 A nebo B.

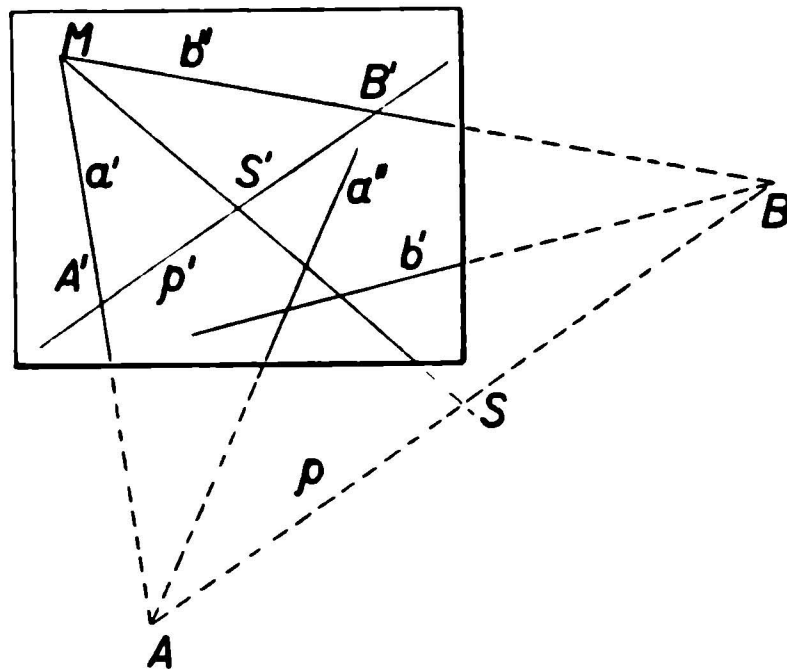
b) Je-li jeden nebo oba body  $B \equiv (a, c)$  a  $C \equiv (a, b)$  také



Obr. 14. Z nedostupného bodu  $A$  spustiti kolmici  $k_a$  na nedostupnou přímku  $a$ .

nedostupné, pomůžeme si rovnoběžkou  $a' \parallel a$  (obr. 13) tak zvolenou, aby její průsečíky  $B'$  a  $C'$  s  $b$  a  $c$  již padly na nákresnu.

c) Kdyby také přímka  $a$  byla nedostupná (obr. 14), spojíme podle odst. 2,1 C nedostupný bod druhého řádu  $B \equiv (a, c)$  s bodem  $D$ , který jsme libovolně zvolili na  $b$ . Kol-



Obr. 15. Rozpůlení nedostupné úsečky  $AB$ .

mici  $k_b$  sestrojíme užitím průsečíku  $V_1$  výšek v  $\triangle ABD$ . K sestrojení výšky na stranu  $BD$  musíme ovšem užití obratu načrtnutého v obr. 13, je-li  $A$  nedostupný (v obr. 14 tato konstrukce je čárkovaná). Podobně sestrojíme kolmici  $k_c$  (její konstrukce v obr. 14 je již vynechána). Další konstrukce  $k_a \equiv VA$  je stejná jako dříve.

d) Nyní dovedeme také bodem vésti rovnoběžku s nedostupnou přímkou  $a$ . Je to kolmice spuštěná z onoho bodu na libovolnou přímku  $k \perp a$  (bez obrázku; srov. s odst. 2,1 B).

e) Na základě předešlých konstrukcí můžeme vztýčiti kolmici k přímce  $a$  v jejím nedostupném bodě  $A$ . Na nákresně

veďme přímku  $a' \parallel a$  a spust'me na ni kolmici z  $A$  (bez obrázku).

B. Rozpůliti úsečku  $AB$ , je-li nedostupný aspoň jeden z jejích koncových bodů.

Na nákresně veďme rovnoběžku  $p'$  s úsečkou  $AB$  (obr. 15). Promítněme na ni koncové body úsečky  $AB$  do  $A'B'$  z bodu  $M$  tak zvoleného na nákresně, aby oba body  $A', B'$  byly dostupné. Půlí-li  $S'$  úsečku  $A'B'$ , prochází  $MS'$  středem  $S$  úsečky  $AB$ . Je to bod dostupný nebo nedostupný nejvýš druhého řádu.

Podobně bychom rozdělili nedostupnou úsečku  $AB$  na libovolný jiný počet stejných dílů. Stejně promítáním řešíme úlohu: Na přímce  $p$  budiž dána zčásti neb zcela nedostupná úsečka. Jest ji zdvojnásobiti, ztrojnásobiti atd.

Nyní dovedeme také nakresliti symetrálu nedostupné úsečky  $AB$ . Je to kolmice v  $S$  na  $AB$ . Sestrojíme ji podle odst. A spuštěním kolmice z  $S$  na  $p'$ .

Rovněž dovedeme najíti střed kružnice, jdoucí třemi body  $A, B, C$ , z nichž některé nebo všechny mohou býti nedostupné. Je to průsečík symetrál úseček  $AB$  a  $BC$ . Za kontrolu správné konstrukce slouží, že jím také prochází symetrála úsečky  $CA$  (bez obrázku).

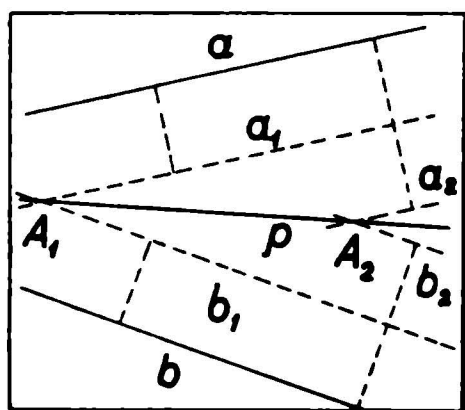
C. Rozpůliti úhel s nedostupným vrcholem.

a) Půlicí přímkou  $p$  je geometrickým místem bodů stejně vzdálených od obou ramen  $a, b$  úhlu (obr. 16a).

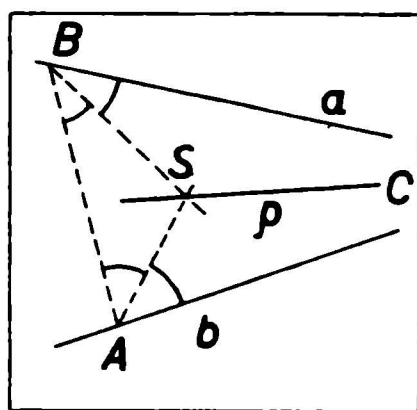
b) Na ramenech zvolme dostupné body  $A, B$  a označme  $C$  jeho nedostupný vrchol (obr. 16b). V  $\triangle ABC$  symetrály úhlů se protínají v jednom bodě  $S$ , který najdeme jako průsečík dostupných symetrál  $\sphericalangle CBA$  a  $\sphericalangle CAB$ . Hledaná symetrála  $\sphericalangle ACB$  je spojnice  $SC$ .

c) Dosud jsme mlčky předpokládali, že obě ramena úhlu, který půlíme, jsou dostupná. Jsou-li jedno nebo obě ramena úhlu nedostupná, spust'me podle odst. A na ně kolmice  $k_a$  a  $k_b$  z vhodně zvoleného bodu  $M$  na nákresně (obr. 16c). Budiž  $k_p$  symetrála úhlu jimi sevřeného, která je patrně

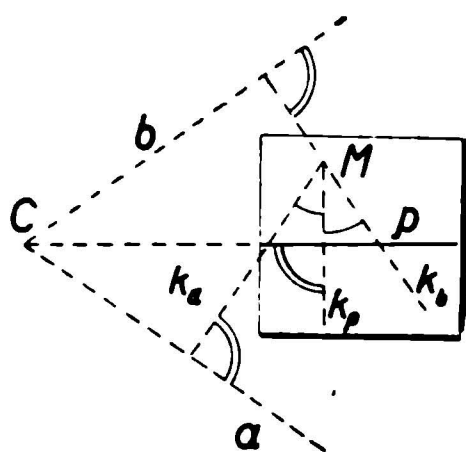
dostupná. Z vrcholu  $C \equiv (a, b)$  spuštěná  $p \perp k_p$  (odst. A) je hledaná půlicí přímka.



Obr. 16a.



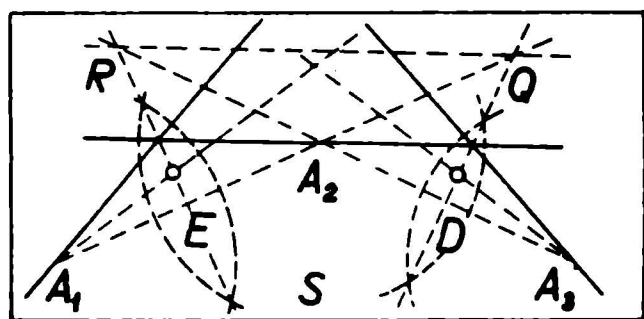
Obr. 16b.



Obr. 16c.

Obr. 16. Rozpůlení úhlu s nedostupným vrcholem.

D. Kružnice procházející dostupnými body  $A_1, A_2, A_3$  měž nedostupný střed  $S$  (obr. 17). Pak není možno kružítkem sestrojiti její dostupný oblouk. Můžeme však sestrojiti tečny kružnice v  $A_1, A_2, A_3$  a takový počet dalších dostupných bodů na ní, aby ji bylo možno jimi proložit s dostatečnou přesností od ruky.



Obr. 17. V bodech  $A_1, A_2, A_3$  kružnice (s nedostupným středem) sestrojiti její tečny a sestrojiti další body na kružnici.

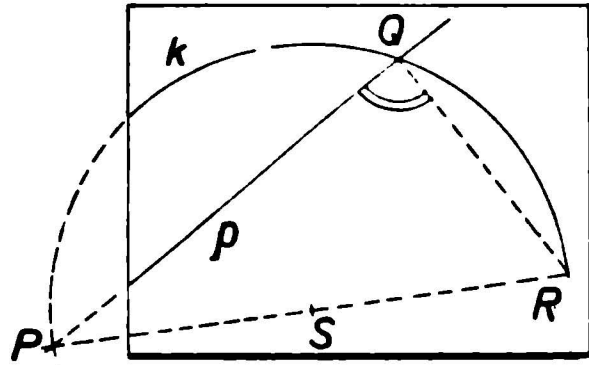
Sestrojme symetrály  $DQ$  a  $ER$  tětiv  $A_2A_3$  a  $A_1A_2$ . Najděme průsečíky  $R$  a  $Q$  těchto tětiv se symetrálami. Spojnice  $RQ$  je rovnoběžná s tečnou kružnice v  $A_2$ . Neboť  $A_2$  je průsečík výšek v trojúhelníku  $RQS$ , takže  $SA_2 \perp RQ$ , charakteristická to vlastnost



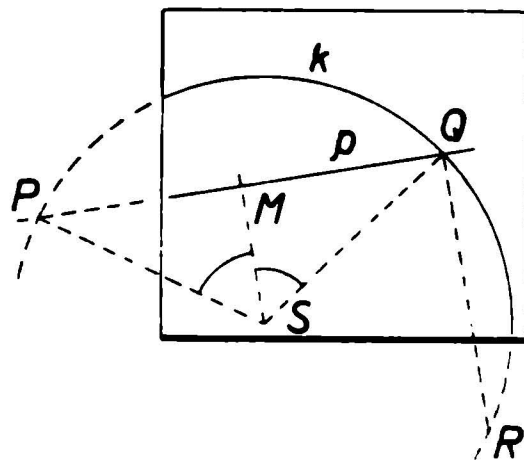
tečny kružnice. Tečny kružnice v  $A_1$  a  $A_3$  protínají se s tečnou v  $A_2$  na symetrálách. Rozpůlíme-li úhel tečny a tětivy (čárkovaně), dostaneme další bod kružnice na symetrále tětivy (označený kroužkem). Jinou konstrukci dalších bodů kružnice poskytuje Pascalova věta, dobře známá ze střední školy, považujeme-li kružnici za kuželosečku určenou třemi body a tečnami ve dvou z nich. Nebo můžeme užít i věty Brianchonovy (tři tečny kuželosečky se dvěma body dotyku).

E. Přímka  $p$  protíná kružnici  $k$  v nedostupném bodě  $P$ . Jest jím vésti další přímku, aby byl určen jako průsečík dvou přímek. Ve všech dosavadních konstrukcích byly totiž nedostupné body určeny vždy tímto způsobem.

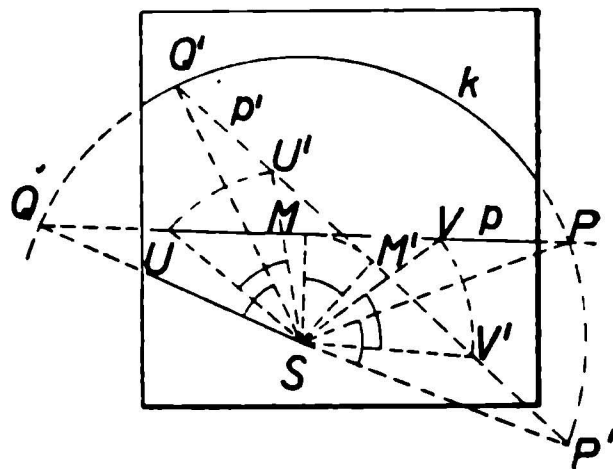
a) Je-li dostupný střed  $S$  kružnice a druhý průsečík  $Q$  přímky a kružnice (obr. 18), vztyčme  $QR \perp p$ . Protně-li tato kolmice kružnici po druhé v dostupném bodě  $R$ , spojnice  $RS$  jde bodem  $P$ .



Obr. 18.



Obr. 19.



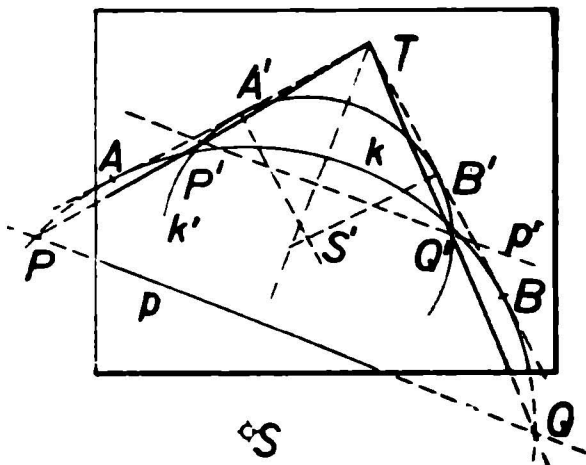
Obr. 20.

Obr. 18.—20. Spojiti bod  $S$  s nedostupným průsečíkem  $P$  přímky  $p$  a kružnice  $k$ .

Je-li také  $R$  nedostupný (obr. 19), spustíme z  $S$  kolmici  $SM$  na  $p$  a přenesením učiníme  $\sphericalangle QSM = \sphericalangle MSP$ . Toto řešení platí ostatně i při dostupném  $R$ .

Je-li také  $Q$  nedostupný (obr. 20), otočíme přímku  $p$  okolo středu  $S$  do takové polohy  $p'$ , aby aspoň jeden průsečík  $Q' \equiv (p', k)$  byl dostupný. Otočení přímky provedeme buď otočením kolem středu  $S$  nejbližšího bodu  $M$  na ní nebo otočením dvou bodů  $U, V$  přímky o stejný úhel. Právě vyloženým způsobem najdeme  $SP'$  a body  $P'$  a  $Q'$  otočíme kolem  $S$  zpátky o stejný úhel

$\sphericalangle P'SP = \sphericalangle Q'SQ = \sphericalangle U'SU = \sphericalangle V'SV (= \sphericalangle M'SM)$  jestliže jsme k otáčení přímky užili bodu  $M$ .



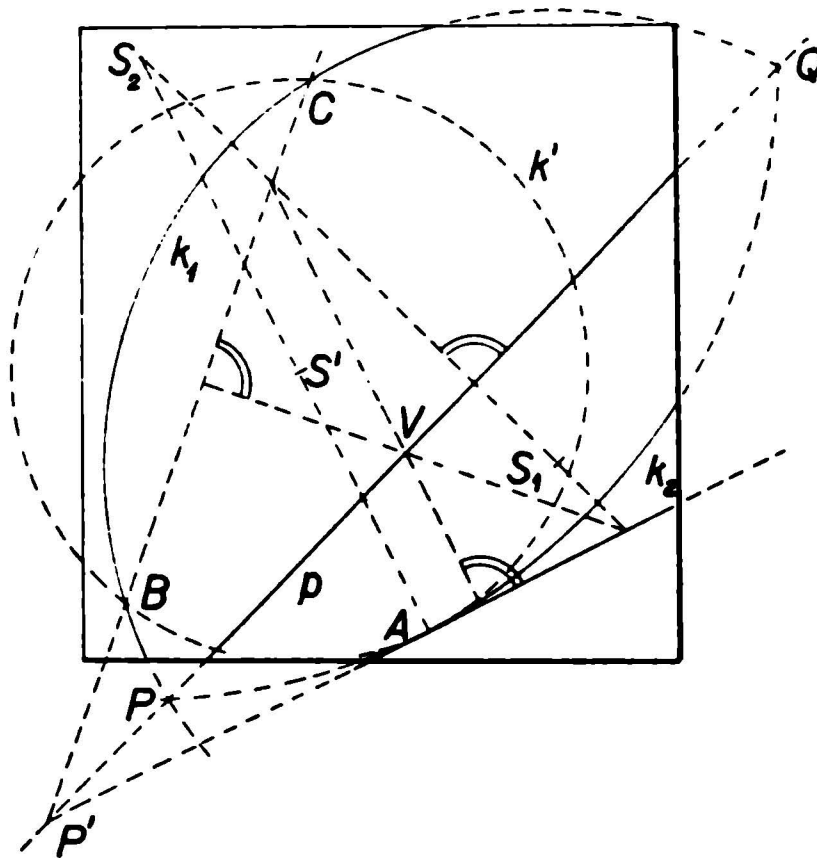
Obr. 21. Sestrojení přímek nedostupnými průsečíky přímky  $p$  s kružnicí  $k$  o nedostupném středu  $S$ .

stejnolehlé podle středu  $T$ . Padnou-li průsečíky  $P', Q' \equiv (k', p')$  na nákresnu, procházejí  $TP'$  a  $TQ'$  průsečíky  $P, Q \equiv (k, p)$ .

c) Úloha: určití nedostupné průsečíky  $P, Q$  dvou kružnic  $k_1$  a  $k_2$  jako průsečíky přímek se převede na předešlou sestavením chordály  $p$  obou kružnic. K tomu užíváme nejčastěji poznatku, že chordály tří kružnic procházejí týmž bodem, jemuž říkáme potenční střed těch tří kružnic.

b) Je-li střed  $S$  kružnice  $k$  nedostupný, nemůžeme její dostupný oblouk sestrojiti kružítkem (odst. D). Proto také nemůžeme na ní přímo sestrojiti žádný z obou průsečíků  $P, Q$  kružnice  $k$  a přímky  $p$ , i když padne na nákresnu. Sestrojíme však ke kružnici tečny ve dvou jejích dostupných bodech  $A, B$  (odst. D) tak zvolených, aby průsečík  $T$  obou tečen byl dostupný (obr. 21). Sestrojíme kružnici  $k'$  a přímku  $p'$ , které jsou s  $k$  a  $p$

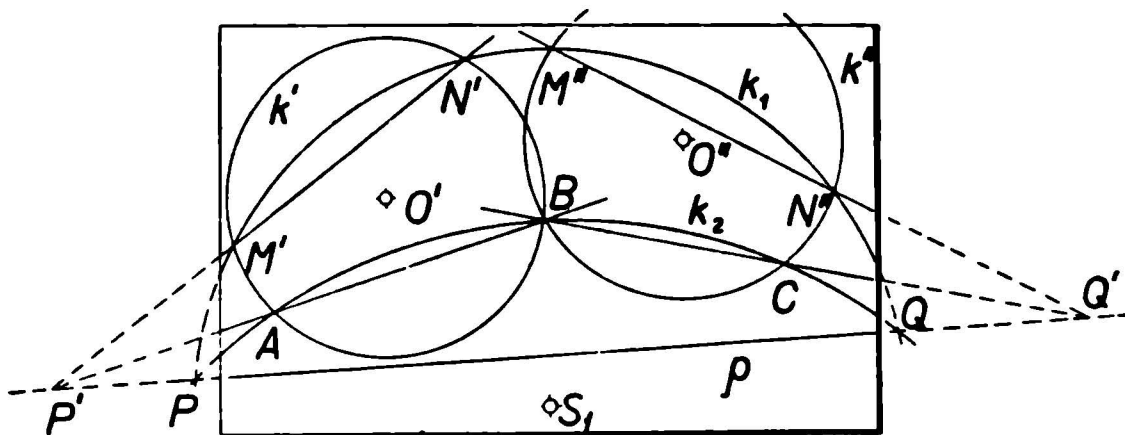
Jsou-li středy  $S_1, S_2$  obou kružnic dostupné (obr. 22), nakresleme libovolnou kružnici  $k'$  s dostupným středem  $S'$ , která protíná dané kružnice v dostupných bodech. Sestrojme chordály kružnic  $(k_1, k') \equiv BC$  a kružnic  $k_2, k'$ . Pro jednoduchost jsme volili  $k'$  dotýkající se  $k_2$  v  $A$ . Proto jejich chordála je jejich společnou tečnou v  $A$ . Průsečíkem  $P'$  obou chordál jde i chordála  $(k_1, k_2) \equiv p \perp S_1S_2$  (odst. A).



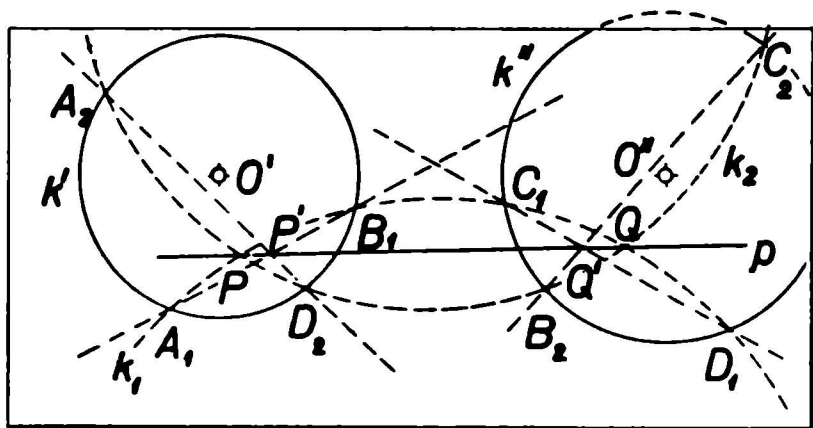
Obr. 22. Sestrojení chordály  $p$  kružnic  $k_1, k_2$  s dostupnými středy, jsou-li průsečíky  $P, Q$  obou kružnic nedostupné.

Má-li jedna z obou kružnic nedostupný střed ( $k_2$  v obr. 23), sestrojme na ní tři body  $A, B, C$  (odst. D). Body  $A, B$  proložme kružnicí  $k'$  s dostupným středem  $O'$  a sestrojme průsečík  $P'$  chordál  $(k_2, k') \equiv AB$  a  $(k_1, k') \equiv M'N'$ . Jím prochází také hledaná chordála  $p \equiv (k_1, k_2)$ . Pomocnou kružnici  $k''$  vedenou body  $B, C$  sestrojme podobně bod  $Q'$  na chordále  $p \equiv (P', Q')$ . Kontrolou je, že  $p \perp S_1S_2$ . Chordálu  $p$

dvou kružnic  $k_1$  a  $k_2$ , z nichž jedna má nedostupný střed, sestrojíme stejným způsobem i tehdy, protínají-li se obě kružnice v dostupných bodech  $P, Q$ , které však nemůžeme najít přímo protnutím oblouků obou kružnic, protože kružítkem nemůžeme sestrojiti oblouk kružnice s nedostupným středem.



Obr. 23. Sestrojení chordály  $p$  kružnic  $k_1, k_2$ , je-li střed kružnice  $k_2$  nedostupný.



Obr. 24. Sestrojení chordály  $p$  kružnic  $k_1, k_2$  s nedostupnými středy.

Jsou-li nedostupné středy obou kružnic  $k_1, k_2$ , sestrojme na každé z nich tři dostupné body  $A_1, B_1, C_1$ , resp.  $A_2, B_2, C_2$  (obr. 24). Body  $A_2A_1B_1$  proložme kružnici  $k'$  s dostupným středem  $O'$ . Z kružnic  $k'$  a  $k_1$  jedna má střed dostupný a druhá nedostupný. Jejich chordálu  $A_2D_2$  dovedeme sestrojiti (podobně jako v obr. 23). Průsečík  $P' \equiv (A_2D_2, A_1B_1)$  je po-

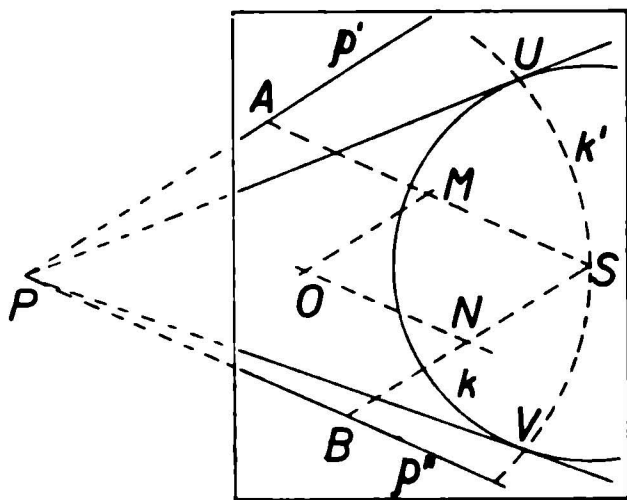
tenčním středem kružnic  $(k_1, k_2, k')$  a leží proto na hledané chordále  $p \equiv (k_1, k_2)$ . Podobně pomocnou kružnicí  $k''$  s dostupným středem  $O''$ , proloženou body  $B_2, C_2, C_1$  najdeme další bod  $Q'$  na chordále  $p$ . Průsečíky  $P, Q$  chordály  $P'Q'$  s kteroukoliv z kružnic  $k', k''$  jsou také průsečíky obou kružnic a sestrojíme je podle b).

F. Z nedostupného bodu  $P \equiv (p', p'')$  vésti tečny ke kružnici  $k$ .

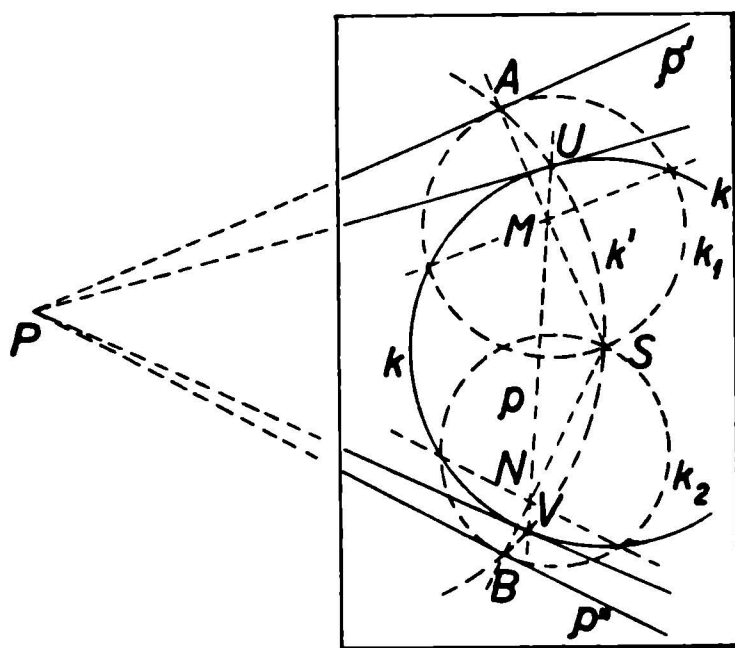
a) Je-li dostupný střed  $S$  kružnice (obr. 25), vedme jim libovolné přímky  $SA$  a  $SB$  až protnou  $p'$  a  $p''$  v dostupných bodech  $A, B$ , rozpůlme úsečky  $SA$  a  $SB$  body  $M, N$  a vedme  $MO \parallel p'$  a  $NO \parallel p''$ .  $O$  je středem kružnice  $k'$  o průměru  $SP$ , která prochází dotykovými body  $U, V$  tečen z  $P$  vedených ke  $k$ . Konstrukce je výhodná, padne-li i  $O$  na ná-kresnu. Je-li úhel přímek  $p'$  a  $p''$  malý, je tato konstrukce nepřesná.

b) Buďtež  $A, B$  paty kolmic, spuštěných z  $S$  na  $p'$  a  $p''$  (obr. 26).

Tyto body leží na kružnici  $k'$  nad průměrem  $PS$ , která pro-

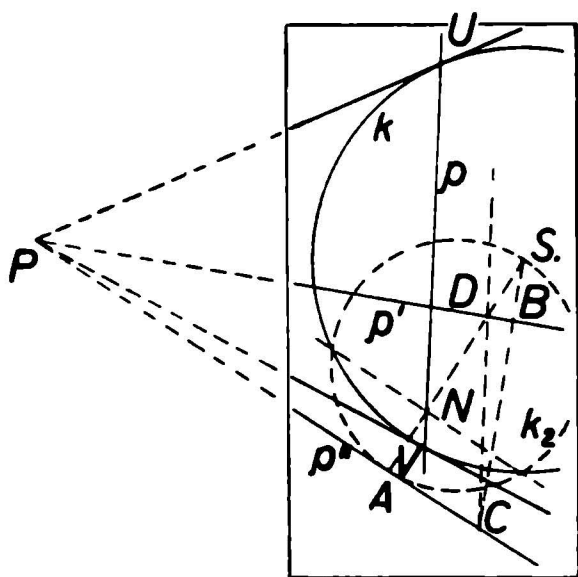


Obr. 25. Sestrojení tečen vedených z nepřístupného bodu  $P$  ke kružnici  $k$  s dostupným středem  $S$ .

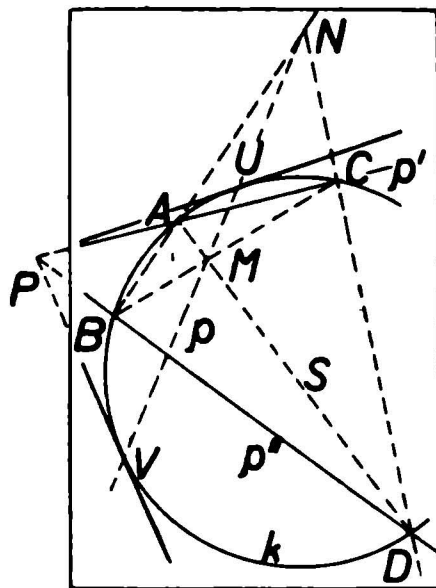


Obr. 26. Sestrojení bodů dotyku  $U, V$  tečen vedených ke kružnici  $k$  z nepřístupného bodu  $P$ .

cháží body dotyku  $U, V$  tečen, vedených ke  $k$  z  $P$ . Body  $U, V$  najdeme na  $k$  bez kreslení kružnice  $k'$  chordálou  $p$  kružnic  $(k, k')$ . Chordálu sestrojíme podle odst. E. Nejlépe užijeme pomocných kružnic  $k_1$  a  $k_2$  nad průměry  $AS$  a  $BS$ , které poskytnou potenční středy  $M$  a  $N$  na  $p$ . Spojnice  $p \equiv MN$  vytíná na  $k$  hledané body dotyku  $U, V$ . Jelikož není potřeba kreslit kružnici  $k'$ , může její střed  $O$  býti i nedostupný.



Obr. 27. Sestrojení tečen vedených z nedostupného bodu  $P$  ke kružnici  $k$ .



Obr. 28. Sestrojení tečen vedených z nedostupného bodu  $P$  ke kružnici  $k$ .

c) Tato konstrukce je nevýhodná, probíhá-li jedna z přímek  $p', p''$  blízko  $S$  (v obr. 27 je to  $p'$ ). Pak potenční střed  $M$  padá zpravidla mimo nákresnu. Jsou-li však  $C$  a  $D$  průsečíky kolmic  $SB$  s  $p''$  a  $SA$  s  $p'$ , jest  $S$  průsečíkem výšek v  $\triangle PDC$ . Proto spojnice  $CD$  stojí kolmo na spojnici  $PS$ , t. j. je rovnoběžná s hledanou chordálou  $p$ . Stačí na ní sestrojiti proto jediný další bod  $N$  stejnou konstrukcí jako dříve.

d) Jiná konstrukce (obr. 28): Zvolme na  $k$  body  $A, B$ , spojme je s  $P$  a najdeme druhé průsečíky  $C, D$  spojníc  $AP$  a  $BP$  s  $k$ . Body  $(AD, BC) \equiv M$ ,  $(AB, CD) \equiv N$  leží na poláře  $p$  bodu  $P$  vzhledem ke kružnici. Dotykové body  $U, V$

jsou průsečíky poláry  $p$  a kružnice  $k$ . Konstrukce je zvláště výhodná, protínají-li již přímky  $p'$  a  $p''$  kružnici  $k$  v dostupných bodech, které volíme přímo za  $ABCD$ .

Konstrukci podle b), c) nebo d) můžeme provést, ovšem s jistými obtížemi, i tehdy, je-li střed kružnice nedostupný.