Korešpondenčný seminár vo východoslovenskom kraji

Martin Gavalec, Božena Mihalíková, Peter Mihók

História KMS

V školskom roku 1985/86 zavŕšil Korešpondenčný matematický seminár (KMS) vo Východoslovenskom kraji desiaty ročník svojej existencie. KMS je organizovaný od roku 1976 pre študentov stredných škôl skupinou učiteľov a študentov matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach.

Ako vznikla myšlienka organizovať KMS? V septembri 1976 sa pri Ružínskej priehrade konalo sústredenie vybraných riešiteľov MO, ktoré možno považovať za prvé sústredenie východoslovenského KMS. Boli na ňom uplatnené princípy z organizácie táborov mladých matematikov, ktorých základom je vytvorenie citovej klímy, priaznivej pre rozvoj tvorivého myslenia. Vhodná citová klíma bola vytváraná uplatňovaním zásady dobrovoľnosti a podnecovaním prirodzenej potreby telesného, duševného a societného rastu účastníkov. Matematický program založený na samostatnom experimentovaní a objavovaní, hry s matematickým obsahom, kolektívna súťaživosť a pestrosť denného programu — to všetko spolu s kamarátskym prístupom vedúcich vyvolalo výraznú zmenu klímy sústredenia. Vzrástla aktivita účastníkov na matematickom i nematematickom programe; prejavilo sa to napríklad aj na príprave a priebehu spoločných večerov, po ktorých nasledovali diskusie často do neskorých večerných hodín. Záver poslednej diskusie pri táboráku prekvapujúcim spôsobom demonštroval, akým intenzívnym zážitkom bolo sústredenie: účastníci vyhlásili, že sú do takej miery presvedčení o potrebe pravidelných vzájomných kontaktov, že sú ochotní sami si organizovať podobné sústredenia a zúčastňovať sa ich hoci aj na vlastné náklady. Od vedúcich žiadali pomoc pri zabezpečovaní matematického programu a prevzatia oficiálneho patronátu nad sústredeniami.

Napriek počiatočným ťažkostiam sa sústredenia napokon uskutočnili a teraz tvoria jednu z dvoch základných zložiek KMS. Organizačnej prípravy a vedenia sústredení sa ujala skupina matematikov z Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach. Dôležitým momentom bola podpora Odboru školstva Vsl. KNV, najmä zo strany inšpektora RNDr. Martina Lučivianského, L. Schwartza z Vsl. KV SZM a tiež porozumeniu riaditeľstva gymnázia na Šmeralovej ulici 9 v Košiciach, ktorí pomohli pri riešení problémov hospodárskeho charakteru. Spomedzi samotných stredoškolákov, účastníkov sústredení, vykonal v počiatočnom období pri ich príprave veľký kus práce J. Nižňanský. V školskom roku 1976/77 prebehlo ďalších päť sústredení väčšinou 2–3 dňových, v časových odstupoch 6–8 týždňov. Na sústredenia bol pozývaný stále ten istý kolektív vybraných riešiteľov MO, ktorí sa zúčastnili sústredenia na Ružíne. Sústredenia sa konali podľa zásad osvedčených na prvom sústredení.

Priebeh sústredení ukázal popri očakávaných kladných výsledkoch aj niektoré nedostatky. Došlo k diferencovaniu účastníkov, pričom časť z nich prejavovala o matematiku menší záujem, celková aktivita účastníkov poklesla. Krátky čas sústredení negatívne vplýval na vytváranie citovej klímy v kolektíve, pri problémovom zameraní programu sa riešenia len naznačovali a nedovádzali do konca. Výsledky v krajskom kole 26. ročníka MO ukázali, že olympionici majú ťažkosti s písomnou formuláciou nájdených riešení.

Snaha odstrániť uvedené nedostatky viedla ku vzniku korešpondenčného matematického seminára v takej forme, v akej v podstate pracuje dodnes. Počet sústredení sa znížil na tri ročne, ich dĺžka sa zvýšila na 5–6 dní. Sústredenia boli doplnené korešpondenčnou súťažou, na základe ktorej sa robí výber účastníkov sústredení.

Od roku 1977 sa v korešpondenčnej súťaži zadáva ročne 8–9 sérií úloh (po 4–6 príkladoch) a uskutočňujú sa ročne tri sústredenia. Počet riešiteľov korešpondenčnej súťaže sa pohybuje v rozpätí 50–100 z Východoslovenského kraja a 5–20 mimokrajských. Na sústredenia bolo pozývaných 30–35 účastníkov z Východoslovenského kraja a 4–8 mimokrajských účastníkov. Pre ilustráciu: za 10 rokov pôsobenia KMS bolo opravených približne 20 000 súťažných riešení, uskutočnilo sa 33 sústredení, k 180 úlohám boli napísané a rozmnožené komentáre. Do KMS bolo zapojených okolo 600 študentov z Československa, ale aj z Poľska a Maďarska.

Opravovanie úloh korešpondenčnej súťaže a časť organizačnej práce vykonávajú študenti Prírodovedeckej fakulty UPJŠ, prevažne bývalí účastníci KMS. Študenti PF UPJŠ sa tiež zúčastňujú na sústredeniach KMS a tým prispievajú ku kontinuite klímy. Starostlivosť o odbornú a organizačnú náplň KMS prebrali katedry matematiky PF UPJŠ, od roku 1983 v spolupráci s Krajským domom pionierov a mládeže v Košiciach. V KMS sa podarilo udržať a rozvinúť atmosféru nadšenia pre matematiku. Sústredenia svojou príťažlivou klímou motivujú k systematickej práci v korešpondenčnej súťaži. Tým sa nasledovne rozvíjajú matematické schopnosti žiakov. Výsledky východoslovenských účastníkov v celoštátnom kole MO za obdobie činnosti KMS presvedčivo dokumentujú účinnosť tejto formy práce s matematickými talentami. Napríklad, kým za prvých 25 ročníkov MO získal titul víťaza celoštátneho kola MO jediný účastník z Východoslovenského kraja, od 26. do 35. ročníka MO mal Východoslovenský kraj 17 víťazov kola MO.

Východoslovenský KMS krátko po svojom vzniku našiel nasledovníkov. Od roku začali pracovať podobné KMS v Bratislave, v Severomoravskom kraji (pri gymnáziu v Bílovci). Neskôr bol založený KMS v Stredoslovenskom kraji (1979) a v niektorých krajoch ČSR. Ich vplyv na výchovu matematických talentov je jednoznačne pozitívny.

Posledné sústredenie ...

V maturitnom ročníku pre človeka veľa končí. Pre maturantov-sústredencov začína čosi končiť už v zime. Čaká na nich posledné sústredenie. Alebo oni čakajú naň. Na sústredenie, ktoré sa zaradí k radu predchádzajúcich. Už len horko-ťažko ich dokážu spočítať na prstoch svojich rúk. Zvykli si na ne, a vlastne si ten koniec nevedia dosť dobre predstaviť. Neopakovateľná a predsa sa opakujúca atmosféra, akú len tak ľahko hocikde nepostretnú, starí známi kamaráti a priatelia, s ktorými prerozprávali, prešarádili či prežužolili nejednu noc, neobyčajne bezprostredné vzťahy medzi nimi, medzi vedúcimi i medzi nimi a vedúcimi — toto všetko má byť o chvíľu minulosťou?

A potom, ani nevedia ako, ocitajú sa uprostred diania na tomto sústredení a na podobné úvahy už nieto času. Je zima, vonku je všade plno snehu, alebo aj nie, zatiaľ čo vnútri sa podľa pravidla najrovnomernejšieho rozdelenia sústredenci rozdeľujú do družín, ktoré budú tvoriť tradičnú a nevyhnutnú štruktúru pre organizáciu života sústredenia. Občas má pravidlo výnimku: jedna družina nie je celkom rovnomerná vo vzťahu k ostatným. V živote na sústredení sa jej, ak už nie vždy, tak určite väčšinou darí. Na čo nestačia jej maturanti, po celý čas tak trochu prenasledovaní tieňom blížiaceho sa konca, to s prehľadom zvládnu mladší, prípadne najmladší. Nevyhne sa síce patričnej dávke namyslenosti a uzavretosti do seba, ale ona si to v tom čase ešte neuvedomuje.

Postupne zožína úspech za úspechom na poli najrozličnejších súťaží poriadaných organizačným výborom sústredenia. Bezpečne vedie v celosústredennom súperení družín, hoci je ešte pred ňou GRAND PRIX — reťaz navzájom viac-menej poprepájaných úloh, ktorá je už takmer neodmysliteľnou súčasťou každého sústredenia. Preto si po krátkej porade svojich členov, môže dovoliť začať GP so slovami: „Je nepodstatné vyhrať, podstatné je zabaviť sa."

A tak sa spoločnými a zároveň rozdelenými silami púšťa do plnenia úloh. 500bodová úloha — naštartovať a doviezť pred ubytovňu bývalý traktor, ktorý parkuje v neďalekom lese a trikrát na ňom zatrúbiť — sa zdala byť v prvom momente nesplniteľná. Aké však je prekvapenie organizačného výboru, ktorý čiastočne oddychuje po úmornej práci spojenej s prípravou GP a čiastočne dokončuje túto prípravu, keď ho z tejto činnosti vyrušil prichádzajúci a trúbiaci traktor, v ktorom sedia jej členovia. S ujom traktoristom sa zoznámili v miestnom pohostinstve, popri prevádzaní sociologického prieskumu medzi miestnym obyvateľstvom. Prieskum pozostáva zo získania maximálneho počtu odpovedí miestnych občanov na otázky organizačného výboru typu: „Ako podľa vás vyzerá živý matematik", „Čo ste urobili preto, aby ste zbavili svet množín", „Čo si myslíte o nás", a tak ďalej. Spočiatku nie je pre družinu jednoduché len tak z ničoho nič zastaviť miestneho občana, zistiť jeho vek, povolanie a získať od neho odpovede; najmä poniektorí jej členovia dovtedy s cudzími ľuďmi nezvykli takmer vôbec komunikovať. Splnenie úlohy si však od nich vyžiada získanie aj tejto schopnosti, čo, hoci to ešte teraz nevedia, v budúcnosti párkrát ocenia.

Cestou späť na ubytovňu družina plní ďalšiu úlohu — komponuje svoju hymnu. A zatiaľ čo sa organizačný výbor dohaduje, či loviť alebo neloviť medveďa na konci GP, družina sa zaň nevedomky rozhodne v poslednej slohe svojej hymny: „Čo je nás po medveďovi / a po jeho veľkej hre, / nie je hlavné, či vyhráme, / hlavne, že sa bavíme".

Večer ešte prednesie spracované výsledky sociologického prieskumu, a potom sa už teší z velikánskej sladkej odmeny. Maturantom sa zdá, že je koniec, svoj smútok i vďaku vyjadrujú zápisom na nástenku prianí a sťažností. V tom čase ešte nevedia, že budúcnosť pre nich pripraví ešte nejedno podobné stretnutie.

Témy KMS v školskom roku 1986/87

1. Stereometrické úlohy
2. Funkcie a zobrazenia
3. Pravdepodobnosť
4. Komplexné čísla
5. Postupnosti a matematická indukcia
6. Planimetria
7. Teória čísiel
8. Aplikácie matematiky

Úlohy

1. Nech a, b sú prirodzené čísla také, že a^2+b^2 je deliteľné číslom 21. Potom a^2+b^2 je deliteľné aj číslom 441. Dokážte.

2. Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je číslo $2^k + 1\,472$ druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

3. Dokážte: ak n je zložené číslo, tak súčin všetkých jeho prirodzených deliteľov nie je menší ako $n^{\frac{3}{2}}$.

4. Dokážte, že číslo $3^{341} - 3$ nie je deliteľné číslom 341.

5. Dokážte, že každé prirodzené číslo a možno jediným spôsobom zapísať vo tvare $a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_n \cdot n!$, kde $0 \leqq a_k \leqq k$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Zapíšte v tomto tvare číslo 1 984.

6. Súčet piatich nezáporných čísiel je 1. Dokážte, že ich možno rozostaviť po obvode kruhu tak, aby súčet všetkých piatich súčinov dvoch susedných čísel nebol väčší ako $\frac{1}{5}$.

7. Prirodzené číslo nazveme absolútnym prvočíslom, ak je prvočíslom a ak pri ľubovoľnej permutácii jeho cifier opäť dostaneme prvočíslo. Dokážte, že v zápise absolútneho prvočísla nemôžu byť viac než tri rôzne cifry.

8. Riešte v obore celých čísel rovnicu

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 35.$$

9. Dopravný podnik sa rozhodol zrušiť päť zastávok na autobusovej trati. Pôvodne mala trať 18 zastávok vrátane východzej a konečnej. Koľkými spôsobmi možno zrušenie uskutočniť, ak nesmú byť zrušené žiadne dve susedné zastávky, ani východzia a konečná zastávka?

10. Postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je tvorená nasledovne: $a_0 = 3$, $a_1 = 13$, pre ďalšie jej členy platí $a_{k+2} = 8a_{k+1} - 15a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dokážte, že táto postupnosť je rastúca a udajte jej prvý člen prevyšujúci 5^{100}.

11. Dokážte identitu

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

12. Je daných 12 červených, 9 modrých a 5 bielych gúľ. Gule rovnakej farby sú nerozlíšiteľné. Koľkými spôsobmi môžeme tieto gule rozdeliť dvom osobám, ak každá má dostať práve 13 gúľ?

13. Šachovnica 6×6 je pokrytá kockami domina. Dokážte, že jedna z horizontálnych alebo vertikálnych čiar pretínajúcich šachovnicu nepretína žiadne domino.

14. a) Koľkými spôsobmi môže otec rozdeliť svojim štyrom synom 100 Kčs?
b) O koľko sa počet možností zmenší, ak každý zo synov dostane aspoň 10 Kčs?

15. 15 chlapcov a 15 dievčat tancuje v kruhu tak, že sa striedajú. Koľkými spôsobmi sa takto môžu zoskupiť?

16. Koľkými spôsobmi je možné na *biele* polia šachovnice 8×8 postaviť 8 (rovnakých) veží, aby sa žiadne dve neohrozovali?

17. Dokážte, že ak sa turnaj 23 hráčov odohrá za dva dni, potom existujú štyria hráči, ktorí všetky svoje vzájomné zápasy odohrajú v ten istý deň.

18. Koľkými spôsobmi možno vybrať tri z vrcholov pravidelného n-uholníka ($n \geqq 3$) tak, aby tvorili vrcholy
a) rovnoramenného
b) pravouhlého
c) tupouhlého trojuholníka?

19. Dané sú reálne čísla a, b. Koľko existuje rôznych 100-členných aritmetických postupností, ktorých členmi sú a, b?

20. Ráno boli všetky izby v hoteli obsadené. V priebehu dňa prišlo jednotlivo 15 nových hostí a 20 hostí izby uvoľnilo. Koľkými spôsobmi mohli prichádzať na recepciu hostia tak, aby nikto nemusel čakať, kým sa niektorá izba uvoľní? (Uvažujeme jednoposteľové izby.)

21. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

22. Určte, pre aké hodnoty parametra a má rovnica

$$x^3 - ax + 2a + 32 = 0$$

tri reálne korene.

23. Riešte nerovnicu

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$$

24. Riešte nerovnicu

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3).$$

25. Riešte nerovnicu

$$\log_{x^3} \frac{|x - 5|}{6x} + \frac{1}{3} \geqq 0.$$

26. Nájdite všetky reálne čísla x spĺňajúce rovnicu

$$|x| - |x-8| = |a+4| + |4-a|,$$

kde a je dané reálne číslo.

27. Pre ktoré hodnoty parametra a platia pre korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice

$$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$$

podmienky $x_1 < 1$, $x_2 > 1$?

28. Nájdite všetky reálne riešenia x, y sústavy rovníc

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0,$$
$$ax - y - 3 = 0,$$

kde a je dané reálne číslo.

29. Riešte rovnicu

$$\frac{a\sin x + b}{b\cos x + a} = \frac{a\cos x + b}{b\sin x + a},$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$.

30. Určte hodnoty $\sin x$, $\cos x$ v závislosti od parametra a, keď viete, že $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = a$.

31. V rovine $\mathbb{R}^2$ je daný konvexný štvoruholník $ABCD$ taký, že vzdialenosť každého vrcholu od každej strany, na ktorej neleží, je aspoň $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Dokážte, že obsahuje aspoň tri mrežové body.

32. Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra λ, pre ktoré ležia všetky body konvexného obalu množiny $\{(0,0)\} \cup \mathsf{M}_\lambda$ na jednej priamke, kde M_λ je množina riešení sústavy

$$-x^2 + y \geqq 0, \quad x^2 + (y-\lambda)^2 \leqq 1, \quad x = \lambda.$$

33. Súčet množín je definovaný vzťahom $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \{a + b\colon a \in \mathsf{A}, b \in \mathsf{B}\}$. Ak A je neprázdna množina reálnych čísel s vlastnosťou $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$, tak v A existuje nulová postupnosť (tj. postupnosť, ktorej limita je 0). Dokážte a zistite, či množina A musí obsahovať 0, ak obsahuje kladné aj záporné čísla.

34. Ak A je neprázdna konvexná množina bodov v rovine s vlastnosťou $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$, tak v A existuje postupnosť $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že postupnosť $\{x_n^2 + y_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová. Dokážte a zistite, či je pravdivé tvrdenie, že ak $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$ a v A existuje nulová postupnosť, tak A je konvexná množina.

35. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, potom existuje trojuholník, ktorého strany majú dĺžku $\dfrac{a}{a+1}, \dfrac{b}{b+1}, \dfrac{c}{c+1}$. Dokážte.

36. Určte aký môže byť obsah trojuholníka so stranami $a \geqq b \geqq c$ v nasledujúcich prípadoch: 1) $a \leqq 1$; 2) $b \leqq 1$; 3) $c \leqq 1$. Pre ktoré trojuholníky dosiahne obsah nájdenú hodnotu?

37. Dokážte, že ak štvorec S je vpísaný do trojuholníka T tak, že jedna strana štvorca S leží na obvode T, potom obsah S je najviac polovica obsahu T. Určte všetky prípady, kedy nastane rovnosť.

38. Medzi všetkými trojuholníkmi s daným obsahom nájdite trojuholník s najmenším obvodom a trojuholník s najväčším obvodom.

39. Pre dĺžky strán a, b, c a pre obsah P ľubovoľného trojuholníka platí $a^2+b^2+c^2 \geqq \geqq 4P\sqrt{3}$. Dokážte a určte, kedy nastáva rovnosť.

40. Nech bod E je vnútorným bodom strany AC trojuholníka ABC. Rovnobežka s priamkou AB cez bod E pretne stranu BC v bode F, rovnobežka s priamkou AC cez bod F pretne stranu AB v bode G. Nájdite všetky body E také, že priamka EG je rovnobežná s priamkou BC.

41. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ak sú dané súčty $b+c=p$, $c+a=q$ jeho strán a, b, c. Urobte diskusiu vzhľadom na p, q.

42. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom priesečník V jeho výšok delí výšku prechádzajúcu vrcholom A na polovicu, ak je daná veľkosť strany $|AB|=c$ a uhol $\alpha=|\sphericalangle CAB|$. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom k veľkosti uhla α.

43. Nech kružnice k_1, k_2, k_3 majú stredy vo vrcholoch ostroúhleho trojuholníka ABC a prechádzajú priesečníkom V jeho výšok. Dokážte, že po dvojiciach sa k_1, k_2, k_3 pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Riešenia

1. Využime pomocné tvrdenia: ak $3\mid a^2+b^2$ ($7\mid a^2+b^2$), potom $9\mid a^2+b^2$ ($49\mid a^2+b^2$). Dôkaz sa najčastejšie robí úvahou o zvyškoch pri delení a, b číslami 3 a 7; tak dospejeme k tomu, že $3\mid a$, $3\mid b$, $7\mid a$, $7\mid b$. Zaujímavý je dôkaz pomocou malej Fermatovej vety (ak p je prvočíslo a p nedelí c, potom $p\mid c^{p-1}-1$). Pre $p=7$ platí: ak 7 nedelí a ani b, potom $7\mid a^6-b^6-2=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)-2$, čo je spor s $7\mid a^2+b^2$. Ak $7\mid a$, $7\mid b$, tvrdenie platí triviálne.

Analogicky pre $p=3$.

2. Mnohí riešitelia dosadzovaním $k=1,2,\dots$, prišli na to, že spomedzi týchto čísel vyhovuje iba $k=7$ ($2^7+1\,472=40^2$). Bolo však potrebné dokázať, že je to riešenie jediné (tj., že pre $k\geqq 8$ číslo $2^k+1\,472=2^k+2^6\cdot 23=2^6(2^{k-6}+23)$ už nemôže byť štvorcom žiadneho prirodzeného čísla). Keby $2^6(2^{k-6}+23)$ bolo štvorcom, muselo by byť štvorcom aj číslo 2^n+23, $n\geqq 2$, čo znamená, že by existovalo také prirodzené číslo m, pre ktoré $2^n+23=(5+m)^2$.

Úpravou dostávame: $2^n+23=25+10m+m^2$, odkiaľ vyplýva, že m je párne číslo, $m=2p$, a teda $2^n-4p^2-20p=2$. Ale pretože $n\geqq 2$, je číslo na ľavej strane deliteľné štyrmi, čo je hľadaný spor (pravá strana štyrmi deliteľná nie je). Vyhovuje teda jediné prirodzené číslo $k=7$.

3. Nech $d_1, \ldots, d_k$ sú všetky navzájom rôzne delitele čísla n. Ku každému z týchto deliteľov d_i priraďme združený deliteľ $\frac{n}{d_i}$. Dá sa ľahko dokázať, že $\{d_1, \ldots, d_k\} = \left\{\frac{n}{d_1}, \ldots, \frac{n}{d_k}\right\}$, čo znamená, že

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = \frac{n}{d_1} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k},$$

odkiaľ

$$d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot \ldots \cdot d_k^2 = n^k.$$

Pre súčin všetkých prirodzených deliteľov čísla n teda platí

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = n^{\frac{k}{2}},$$

a ak je n zložené, tak $k \geqq 3$, a teda

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = n^{\frac{k}{2}} \geqq n^{\frac{3}{2}}.$$

4. Je potrebné si uvedomiť, že číslo $3^{341} - 3$ má príliš veľa cifier na to, aby bolo vhodné riešiť úlohu tak, že ho budeme číslom 341 deliť! Najvtipnejší je asi nasledovný postup: upravme $341 = 11 \cdot 31$ a $3^{341} - 3 = (3^{341} - 3^{331}) + (3^{331} - 3)$. Keďže

$$3^{331} - 3 = 3 \cdot (3^{330} - 1) = (3^{11} - 3)(3^{320} + 3^{310} + \ldots + 1),$$
$$3^{331} - 3 = 3 \cdot (3^{330} - 1) = (3^{31} - 3)(3^{300} + 3^{270} + \ldots + 1),$$

podľa známej malej Fermatovej vety (ak p je prvočíslo, tak $a^p - a$ je deliteľné číslom p) je $3^{331} - 3$ deliteľné 11-timi aj číslom 31, teda i číslom 341. Keby bolo číslo $3^{341} - 3$ deliteľné číslom 341, muselo by aj číslo $3^{341} - 3^{331}$ byť deliteľné 11-timi a 31-kou. Ale číslo $3^{341} - 3^{331} = 3^{330}(3^{11} - 3)$ je deliteľné iba 11-timi, ale nie číslom 31, čo bolo potrebné dokázať.

5. Najskôr ukážeme jednoznačnosť takéhoto zápisu. Nech

$$a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_n \cdot n! = a = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \ldots + b_n \cdot n!,$$

kde $0 \leqq a_i, b_i \leqq i$, a nech existuje taký index j, že $a_j \neq b_j$. Označme $k = \min\{i : a_i \neq \neq b_i\}$, tj. pre všetky $i < k$ je $a_i = b_i$. Potom

$$\begin{aligned} &a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1)! + a_{k+2} \cdot (k+2)! + \ldots + a_n \cdot n! = \\ &= b_k \cdot k! + b_{k+1} \cdot (k+1)! + b_{k+2} \cdot (k+2)! + \ldots + b_n \cdot n! \end{aligned} \tag{1}$$

Môžeme predpokladať $a_k > b_k$. Keďže $0 < a_k \leqq k$, platí $a_k \cdot k! \mid m!$ pre $k+1 \leqq m \leqq n$. Potom z (1) máme, že

$$a_k \cdot k! \cdot A = b_k \cdot k! + a_k \cdot k! \cdot B,$$

kde A, B sú celé. Z toho vyplýva, že $a_k \cdot k! \mid b_k \cdot k!$, ale $a_k \cdot k! > b_k \cdot k!$, čo je spor. Tým je jednoznačnosť ukázaná. Ďalej ukážeme existenciu takéhoto zápisu. Nech $a \geqq 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo. Nájdime také n, pre ktoré je $n! \leqq a < (n+1)!$. Potom a vieme napísať vo tvare $a = a_n n! + p_n$, kde $0 \leqq a_n \leqq n$, $0 \leqq p_n \leqq n!$, a_n, p_n sú celé čísla.

Ďalej

$$\begin{aligned}
p_n &= a_{n-1}(n-1)! + p_{n-1}, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_{n-1} \leqq n-1, \quad 0 \leqq p_{n-1} < (n-1)!,\\
p_{n-1} &= a_{n-2}(n-2)! + p_{n-2}, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_{n-2} \leqq n-2, \quad 0 \leqq p_{n-2} < (n-2)!,\\
&\ \vdots\\
p_3 &= a_2 \cdot 2!, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_2 \leqq 2, \quad 0 \leqq p_2,\\
p_2 &= a_1 \cdot 1!, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_1 \leqq 2,
\end{aligned}$$

a teda

$$a = a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \ldots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!,$$

pričom $0 \leqq a_k \leqq k$, pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Pomocou uvedeného postupu máme

$$1\,984 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1!.$$

6. Nech a, b, c, d, e sú nezáporné čísla, také že $a+b+c+d+e = 1$. Vychádzame z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom nezáporných čísel

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}} \geqq \frac{a+b+c+d+e}{5} = \frac{1}{5}.$$

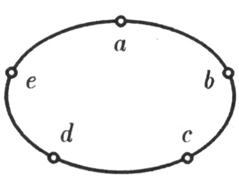
Po umocnení (obidve strany sú nezáporné) a úprave máme $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqq \frac{1}{5}$, teda

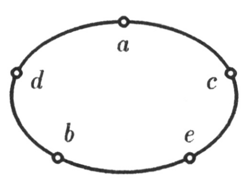
$$(a+b+c+d+e)^2 - 2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de) \geqq \frac{1}{5}.$$

Odtiaľ využitím rovnosti $a+b+c+d+e = 1$ dostaneme

$$(ab+bc+cd+de+ea) + (ac+ce+eb+bd+da) \leqq \frac{2}{5}.$$

Teda aspoň jeden z výrazov v zátvorkách nie je väčší než $\frac{1}{5}$. Hľadaným úsporiadaním je jedno z týchto usporiadaní.





7. Zrejme absolútne prvočíslo nemôže obsahovať číslice 0, 2, 4, 6, 8 kvôli deliteľnosti dvoma a číslicu 5 kvôli deliteľnosti piatimi. Ukážeme, že ak číslo obsahuje každú z číslic 1, 3, 7, 9, tak nie je absolútnym prvočíslom. Všimnime si, že čísla 1 379, 1 793, 9 137, 1 739, 1 397, 1 973 dávajú pri delení siedmimi zvyšky postupne 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nech číslo A obsahuje každú z číslic 1, 3, 7, 9 a číslicu $b \geqq 0$. Pomocou permutácie jeho cifier môžeme utvoriť číslo $B = 10\,000 \cdot b + 1\,379$. Ak teraz $10\,000 \cdot b$ dáva pri delení siedmimi zvyšok z, vyberme takú permutáciu p čísla 1 379, ktorá pri delení siedmimi dáva zvyšok $7 - z$, potom číslo $C = 10\,000 \cdot b + p$ vzniklo z A permutáciou jeho cifier a je deliteľné siedmimi. Teda A nie je absolútne prvočíslo, z čoho vyplýva, že každé absolútne prvočíslo obsahuje najviac tri rôzne cifry.

8. Rovnicu upravíme na tvar $(2x + y)(x + y) = 35$. Keďže rovnicu riešime v obore celých čísel, sú aj $2x + y$, $x + y$ celé. Pre rozklad čísla 35 na súčin dvoch celých čísel máme 8 možností: $35 = 1 \cdot 35 = 35 \cdot 1 = (-1)(-35) = (-35)(-1) = 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7 = (-5)(-7) = (-7)(-5)$, ktorým zodpovedá 8 riešení rovnice. Tieto získame riešením sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Sú to riešenia $(-34, 69)$, $(34, -69)$, $(34, -33)$, $(-34, 33)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(-2, 9)$, $(2, -9)$.

9. Po zrušení 5 zastávok ostalo na trati 13 zastávok, medzi nimi 12 medzier. Keďže nebola zrušená ani prvá ani posledná zastávka, tak zrušené zastávky pochádzajú z týchto 12 medzier, pričom z každej najviac jedna (lebo neboli zrušené žiadne dve susedné). Stačí teda určiť, koľkými spôsobmi možno vybrať 5 medzier z 12 (v nich sú zrušené zastávky), a to je $\binom{12}{5} = 792$.

10. Časť riešiteľov nenašla explicitný vzorec, preto pracovali s rekurentným zadaním postupnosti. Indukciou, väčšinou však veľmi ťažkopádne, dokazovali, že postupnosť je rastúca. Jedine M. Foltin si všimol, že $3a_k < a_{k+1}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$, a dokázal to triviálnou indukciou: je $3a_0 < a_1$ a z predpokladu $3a_k < a_{k+1}$ vyplýva, že

$$a_{k+2} - 3a_{k+1} = 8a_{k+1} - 15a_k - 3a_{k+1} = 5(a_{k+1} - 3a_k) > 0,$$

teda $a_{k+2} > 3a_{k+1}$.

Druhú časť úlohy nevyriešil v tejto skupine riešiteľov nikto, najsilnejší výsledok dosiahol opäť M. Foltin: dokázal, že pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $a_{k+1} < 5a_k$, potom zrejme $a_k < 3 \cdot 5^k$, teda prvý člen ktorý by mohol prevýšiť 5^{100} je a_{100}, lebo $a_{99} < 3 \cdot 5^{99} < 5^{100}$.

Väčšina riešiteľov dokázala explicitný vzorec $a_k = 3^k + 2 \cdot 5^k$, z ktorého ľahko vyplýva monotónnosť aj to, že hľadaný člen je a_{100}. Niektorí vzorec odpozorovali z prvých niekoľkých členov, iní uviedli aj spôsob určenia takéhoto explicitného predpisu z rekurentného zadania postupnosti.[1])

11. Riešitelia využili rovnosť

$$2^{n-3} = (1 + 1)^{n-3} = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-3}{k-3}$$

[1]) Explicitný vzorec nájdeme tak, že hľadáme geometrické postupnosti, ktoré spĺňajú daný rekurentný vzťah. Dosadením takej postupnosti $c\lambda^k$ do rekurencie dostaneme kvadratickú rovnicu $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$, ktorá má korene $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Potom platí, že všeobecné riešenie danej rekurentnej rovnice má tvar $a_k = A \cdot 3^k + B \cdot 5^k$. Z počiatočnej podmienky $a_0 = 3$, $a_1 = 13$ dostaneme $A = 1$, $B = 2$.

a fakt, že pre $n = 0, 1, 2$ sú obe strany uvažovanej identity nulové. Potom úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}k(k-1)(k-2) =$$
$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{(n-3)!n(n-1)(n-2)}{(k-3)!(n-k)!} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\sum_{k=3}^{n}\binom{n-3}{k-3} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}.$$

Iné riešenie poslal M. Engliš. Ten využil rovnosť

$$(z+2)^n = (z+1+1)^n.$$

Koeficienty pri z^m na oboch stranách rovnosti sa musia rovnať; z binomickej a trinomickej vety dostávame

$$\binom{n}{m}\cdot 2^{n-m} = \frac{n!}{i!j!m!},$$

kde $i + j + m = n$. Položme $n - i = k$, potom po úpravách pre $k = 0, 1, \ldots, n$ vyjde

$$\binom{n}{m}2^{n-m} = \sum_{m\leqq k\leqq n}\binom{n}{k}\binom{k}{m},$$

odkiaľ pre $m = 3$ dostaneme

$$\binom{n}{3}2^{n-3} = \sum_{m=3}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$$

a po vynásobení oboch strán číslom 6 máme dokazovanú identitu.

I. Tereščák použil 3. deriváciu polynómu

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

a dostal

$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}x^{k-3},$$

čo pre $x = 1$ dáva požadovanú rovnosť.

12. Najčastejším typom riešenia bolo hľadanie všetkých možností pomocou rôznych systémov. Najekonomickejšie bolo rozdeliť si prípady podľa toho, koľko bielych gúľ dostane prvá osoba. V šiestich možnostiach (0, 1, 2, 3, 4, 5 bielych gúľ) vyšlo postupne $9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9 = 58$ možností.

Iné riešenia využíva vytvárajúcu polynomickú funkciu: počet rozdelení je rovný koeficientu pri x^{13} v polynóme $(1+x+\ldots+x^5)(1+x+x^2+\ldots+x^9)(1+x+x^2+\ldots+x^{13})$. Je možné odvolať sa tiež na výsledky zo ŠMM č. 29 a 45.

P. Krtouš riešil úlohu takto: Je $6 \cdot 10 = 60$ možností, ako môže jedna z osôb dostať biele a modré gule. Vo všetkých prípadoch okrem 0+0 a 5+9 možno kombináciu doplniť červenými guľami do 13. Výsledok je teda $60 - 2 = 58$.

13. Nech je šachovnica ľubovoľne pokrytá 18 kockami domina. Každá z desiatich priamok (5 horizontálnych, 5 vertikálnych), ktorá pretína šachovnicu, ale nepretína žiadne pole tejto šachovnice, rozdelí šachovnicu na dve časti tak, že v každej z týchto častí je *párny* počet polí. Preto, ak čiara pretína domino, musí preťať vždy *párny* počet domín (aspoň dve). Keďže čiar je desať a domín iba 18, podľa Dirichletovho princípu musí existovať čiara, ktorá nepretína žiadne domino.

14. a) Uložme 100 jednokorunových mincí do radu. Troma paličkami ich rozdeľme na 4 podmnožiny, ktoré predstavujú peniaze pripadajúce jednotlivým synom. (Uvážte, aká pozícia paličiek určuje sumu 0 Kčs pre niektorého syna.) Teda ide o to vybrať zo 101 medzier (99 medzier medzi mincami a pozícia pred a za mincami) tri miesta pre paličky, pričom vybrané miesta sa môžu opakovať. To je možné urobiť $\binom{3+101-1}{3} = 176\,851$ spôsobmi.

b) Úlohu prevedieme na predchádzajúci prípad: Otec dá vopred každému synovi po 10 Kčs a rovnakým spôsobom ako v a) rozdeľuje zvyšných 60 Kčs. Tým sa počet možností zmenší o 137 140.

15. 15 chlapcov môžeme do radu postaviť 15! spôsobmi. Pri postavení do kruhu, ak rozostavenia vzniknuté pootočením kruhu považujeme za rovnaké, je zrejme 15-krát menej možností, teda 14!. Ak sa chlapci majú v rozostavení s dievčatami striedať, môžeme teraz do medzier medzi chlapcami (je ich 15) rozostaviť dievčatá 15! spôsobmi. Celkový počet spôsobov je teda $14! \cdot 15!$.

16. Predpokladali sme, že dve veže sa podľa šachových pravidiel ohrozujú, ak stoja v tom istom riadku alebo stĺpci šachovnice. (Samozrejme inak je počet spôsobov rozostavenia 8 veží $\binom{32}{8}$). Úloha je veľmi ľahká. Stačí si totiž uvedomiť, že ak označíme riadky a stĺpce šachovnice zaužívaným spôsobom, navzájom sa ohrozujú iba veže z riadkov 1, 3, 5, 7 (respektíve 2, 4, 6, 8) a stĺpcov a, c, e, g (respektíve b, d, f, h). Keďže máme 8 veží, v každom riadku i stĺpci bude stáť práve jedna veža. Ak postavíme vežu ľubovoľne do 1. riadku na biele pole, máme 4 možnosti, ale potom do 3. riadku ju môžeme postaviť iba 3 spôsobmi, do piateho riadku dvoma spôsobmi a v 7. riadku je už postavenie veže vynútené (1 spôsob). Využijúc pravidlo súčinu dostávame 4! možností. Analogicky to platí pre veže umiestnené v riadkoch 2, 4, 6, 8. Celkovo teda môžeme rozmiestniť veže $(4!)^2 = 576$ spôsobmi.

17. Pri riešení tejto úlohy je výhodné použiť Dirichletov princíp (pozri ŠMM č. 25). Priraďme hráčom vrcholy a zápasom hrany úplného grafu s 23 vrcholmi, pričom hranu zafarbíme bielou (resp. čiernou) farbou, ak príslušní hráči odohrali vzájomný zápas prvý (resp. druhý) deň. Zvoľme ľubovoľný vrchol A; podľa Dirichletovho princípu existuje aspoň jedenásť vrcholov , ktoré sú s ním spojené hranou tej istej farby. Ľahko sa dokáže, že nemôže nastať taká situácia, aby sa v každom vrchole schádzalo práve 11 bielych a práve 11 čiernych hrán (zdôvodnite!), a preto musí existovať taký vrchol A_0, ktorý je spojený s aspoň 12 vrcholmi tej istej farby. Ďalej sa už pokračuje tak, ako v príklade 34 (ŠMM 25, str. 48). Niektorí dokázali, že už pri turnaji 20 hráčov musí uvedená situácia nastať. Dá sa dokázať, že štvorica hráčov danej vlastnosti musí existovať aj pri turnaji 18 hráčov, pričom je možné turnaj 17 hráčov vyžrebovať tak, že žiadna štvorica hráčov neodohrá vzájomné zápasy v ten istý deň. Nájdenie takého rozlosovania je však veľmi náročné.

18. Pri diskusii je treba uvážiť vždy niekoľko možností. Keďže postup riešenia je v podstate jednoduchý, uvedieme iba výsledky:

a) Z vrcholov pravidelného n-uholníka možno vybrať tri vrcholy tak, aby tvorili rovnoramenný trojuholník r_n spôsobmi, kde

(i) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2)$, ak n je párne a nie je deliteľné tromi,
(ii) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2) - \frac{2}{3}n$, ak n je párne a je deliteľné tromi,
(iii) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2)$, ak n je nepárne a nie je deliteľné tromi,
(iv) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2) - \frac{2}{3}n$, ak n je nepárne a je deliteľné tromi.

b) Ak je n párne, je možné utvoriť $\frac{1}{2}n(n-2)$ pravouhlých trojuholníkov; ak n je nepárne, žiaden z trojuholníkov, ktoré tvoria vrcholy, nie je pravouhlý.

c) Ak je n párne, možno vybrať $\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n-1\right)\left(\frac{1}{2}n-2\right)$ rôznych tupouhlých trojuholníkov; ak je n nepárne, je hľadaný počet $\frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}(n-1)\left(\frac{1}{2}(n-1)-2\right)$.

19. n-člennou aritmetickou postupnosťou rozumieme takú usporiadanú n-ticu reálnych čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pre ktorú platí $a_{i+1} - a_i = d$ (diferencia), pre každé $i = 1$, $2, \ldots, n-1$. Z definície ľahko vyplýva, že ak sú dané dva členy $a_i = a$, $a_j = b$, $i \neq j$, tejto postupnosti, všetky ostatné členy sú už jednoznačne určené. Stačí teda dokázať, že ak $a \neq b$, tak existuje práve toľko rôznych postupností, koľkými spôsobmi môžeme vybrať spomedzi čísel $1, 2, \ldots, n$ indexy i, j tak, že $a_i = a$ a $a_j = b$. (Odôvodnite pomocou diferencie d.) Potom je už zrejmé, že v prípade $a \neq b$ existuje práve $100 \cdot 99$ rôznych 100 členných postupností, ktorých členmi sú a, b.

Ak $a = b$, tak jedine konštantná postupnosť $d = 0$ vyhovuje zadaniu úlohy, pretože vtedy musí postupnosť obsahovať to isté číslo na dvoch rôznych miestach.

20. Za jeden spôsob príchodu pokladáme usporiadanú 35-ticu, v ktorej udalosť, že hosť prišiel, označíme 1, a že odišiel 0 (čiže nám nezáleží na konkrétnom hosťovi). Celkový počet príchodov je $\binom{35}{20}$, od ktorého však musíme odčítať počet tých 35-tíc, v ktorých pred nejakým miestom je väčší počet 1 ako 0.

Vezmime jednu nevyhovujúcu 35-ticu. Nech i je prvé z miest, kde hosť musí čakať, teda pred ním je rovnaký počet 0 a 1. Vytvorme 36-ticu, ktorá na prvom mieste bude mať 0 a ďalej bude mať našu 35-ticu. Vymeňme navzájom 0 a 1 v 36-tici až po pôvodné i-te miesto (včítane). Počet núl a jednotiek sa nezmenil (prečo?). Z tejto 36-tice dokážeme získať každú 36-ticu, ktorá má na 1. mieste jednotku takto: v 36-tici je 15 jednotiek a 21 núl — tj. musí na j-tom mieste nastať prípad, že pred ním bude rovnaký počet 1 a 0 a na j-tom mieste bude 0. Opäť vymeníme navzájom 0 a 1 až po j-te miesto včítane. Vynechajme prvú nulu — dostaneme nevyhovujúcu 35-ticu. Takže počet nevyhovujúcich 35-tíc sa rovná počtu všetkých usporiadaných 36-tíc (15 jedničiek, 21 núl), ktoré majú na prvom mieste 1 a tých je $\binom{35}{21}$. Počet príchodov hostí je teda $\binom{35}{20} - \binom{35}{21} = 927\,983\,760$.

21. Z počiatočných podmienok

$$x \geqq 0, \quad a + x \geqq 0, \quad a = \sqrt{a + x}$$

plynie $a = 0$ alebo $a \geqq 1$. Ak označíme $\sqrt{a+x} = y$, dostaneme rovnice

$$a + x = y^2,$$
$$a - y = x^2.$$

Ak ich od seba odčítame a upravíme, vyjde

$$(y - x - 1)(y + x) = 0.$$

Do rovnice $y - x - 1 = 0$ dosadíme za y a vypočítame

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}.$$

Keďže $x_2 = \frac{1}{2}-1 - \sqrt{4a-3}$ nespĺňa podmienku $x \geqq 0$, je riešením danej rovnice iba

$$x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}.$$

Často riešitelia robia tú chybu, že do rovnice $x = -y$ dosadia za y. To je však nekorektné, lebo $x \geqq 0$, $-y \leqq 0$. Rovnosť platí len v prípade, že $x = -y = 0$, $\sqrt{a+x} = 0$, takže $a = 0$.

Elegantnejšie riešenie dostaneme, ak rovnicu umocníme (tým dostaneme podmienku $a \geqq x^2$) a opäť umocníme, takže $a^2 - a(2x^2+1) + x^4 - x = 0$. Riešime ju ako kvadratickú rovnicu v a, ktorej korene sú

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4(x^4-1)}}{2} = \begin{cases} x^2 + x + 1, \\ x^2 - x. \end{cases}$$

Vzhľadom na podmienku $a \geqq x^2$ dostaneme pre $a = a_1$ rovnicu $x^2 + x + 1 - a = 0$, ktorú sme riešili v predchádzajúcom odstavci, pre $a = a_2$ potom vychádza $a = x = 0$.

22. Z tvaru krivky kubickej paraboly vyplýva, že rovnica má tri korene, ak o funkcii $f(x) = x^3 - ax + 2a + 32 = 0$ platí: existujú $x_1 < x_2$ také, že

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0, \quad f(x_1) > 0, \quad f(x_2) < 0.$$

Ak položíme prvú deriváciu rovnú nule, dostaneme kvadratickú rovnicu $3x^2 - a = 0$, čiže

$$x_1 = -\sqrt{\frac{a}{3}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{a}{3}}, \qquad a > 0.$$

Je $f(x_1) > 0$ pre všetky a (o tom sa presvedčíme dosadením do funkcie). Aby bolo $f(x_2) < 0$, musí byť (opäť po dosadení za x do f)

$$3a + 48 < a\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

a) Ak $a > 48$, potom $\sqrt{\frac{a}{3}} > 4$, teda $a\sqrt{\frac{a}{3}} > 4a > 3a + 48$.

b) Ak $a \leqq 48$, potom $\sqrt{\frac{a}{3}} \leqq 4$, teda $a\sqrt{\frac{a}{3}} \leqq 4a \leqq 3a + 48$.

Odtiaľ vyplýva. že rovnica má tri rôzne korene pre $a > 48$.

23. Ak x je riešením danej nerovnice, tak

$$x \neq 0; \quad \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \geqq 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0.$$

Z týchto podmienok vyplýva, že

$$x \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\rangle \tag{1}$$

Po umocnení a úprave (ktorá je pri podmienke (1) ekvivalentná) máme $x \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\rangle \cap$ $\cap (1, \infty)$. Takže nerovnici vyhovujú všetky $x \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\rangle$.

24. Ak x je riešením tejto nerovnice, potom vzhľadom na to, že v nej vystupuje $\log_2 x$, musí byť $x > 0$. Pri tejto podmienke je[2])

$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2\log_{\frac{1}{2}} x = 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -2\log_2 x$$

a podobne $\log_4 x^2 = \log_2 x$. Potom pôvodnú nerovnicu môžeme písať vo tvare

$$\sqrt{5\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3).$$

Vzhľadom na odmocninu musí byť

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 \geqq 0, \qquad \text{tj.} \qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle \cup (8, \infty).$$

Ak je $\sqrt{5}(\log_2 x - 3) < 0$, tj. ak $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$, nerovnosť platí. Inak môžeme obe strany nerovnice umocniť; potom

$$(\log_2 x - 4)(\log_2 x - 3) < 0, \qquad \text{tj.} \qquad x \in (8, 16).$$

Nerovnici teda vyhovujú všetky $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle \cup (8, 16)$.

25. Ak x je riešením nerovnice, tak

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad x \neq 5. \tag{1}$$

Nerovnicu upravíme na tvar

$$\log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} \geqq \log_{x^3} \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Ďalej sa úloha rozpadá na dve časti: pre $x > 1$ sa odlogaritmovaním znamienko nerovnosti v (2) nemení a dostávame $x \geqq 11$, v druhom prípade pre $0 < x < 1$ sa nerovnosť obráti a dostávame $x \in (0, 1)$. Nerovnici teda vyhovujú všetky $x \in (0, 1) \cup \langle 11, \infty)$.

---

[2]) logaritmovaním rovnosti $x = a^{\log_a x}$ dostávame $\log_b x = \log_a x \log_b a$ (uvedený vzťah dostaneme pre $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$)

26. Keďže pre každé reálne čísla a, b platia nerovnosti

$$|a-b| \geqq |a|-|b| \qquad \text{a} \qquad |a+b| \leqq |a|+|b|,$$

dostávame odhad

$$8=|x-(x-8)| \geqq |x|-|x-8| = |a+4|+|4-a| \geqq |(a+4)+(4-a)| = 8,$$

a teda rovnici môžu vyhovovať len tie hodnoty parametra a a neznámej x, pre ktoré nastáva rovnosť, teda musí platiť

$$|a+4|+|4-a|=8 \qquad \text{a tiež} \qquad |x|-|x-8|=8.$$

Odtiaľ hneď vyplýva riešenie. Riešením rovnice pre každé $a \in \langle -4,4\rangle$ je každé $x \in \in \langle 8,\infty)$. Pre iné hodnoty parametra a nemá rovnica žiadne riešenie.

27. Pre $a=0$ má rovnica len jeden koreň, ktorý nemôže byť súčasne väčší aj menší ako 1.

Nech $a \neq 0$. Parabola $f(x)=2ax^2-2x-3a-2$ rozdelí rovinu na tri množiny

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\},\\ \mathsf{M}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},\\ \mathsf{M}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > (x)\}. \end{aligned}$$

Podmienky úlohy hovoria, že ak $x_1 < x_2$ sú korene danej rovnice, tak $1 \in \langle x_1, x_2\rangle$. Teda pre $a>0$ musí byť $(1,0) \subset \mathsf{M}_3$ a pre $a<0$ zas $(1,0) \subset \mathsf{M}_1$. Vyšetrením týchto podmienok získame nutnú a postačujúcu podmienku požadovanú v zadaní.

Ak $a>0$, potom platí $0 > 2a-2-3a-2 = -4-a$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $a>-4$, čiže vyhovuje interval $(0,\infty)$.

Ak $a<0$, potom $0 < 2a-2-3a-2 = -4-a$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $a<-4$, čiže vyhovuje interval $(-\infty,-4)$.

Podmienky zo zadania platia práve vtedy, ak $a \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$.

28. Dosadením výrazu $y=3-ax$ do prvej rovnice dostávame

$$x^2+(3-ax)^2-2x-3(3-ax)=0.$$

Ekvivalentnými úpravami dostaneme rovnicu

$$(a^2+1)x^2-(3a+2)x=0$$

s koreňmi

$$x_1=0 \qquad \text{a} \qquad x_2=\frac{3a+2}{a^2+1},$$

pričom $x_1 \neq x_2$ pre $a \neq -\dfrac{2}{3}$. Po dosadení x_1 do 2. rovnice dostaneme riešenie $(0,3)$, po dosadení x_2 dostaneme riešenie $\left(\dfrac{3a+2}{a^2+1}, \dfrac{3-2a}{a^2+1}\right)$.

Riešením sústavy rovníc pre $a \neq -\frac{2}{3}$ sú usporiadané dvojice

$$(0,3), \qquad \left(\frac{3a+2}{a^2+1}, \frac{3-2a}{a^2+1}\right).$$

Riešením sústavy rovníc pre $a = -\frac{2}{3}$ je usporiadaná dvojica $(0,3)$. Keďže úpravy boli ekvivalentné, skúška nie je potrebná.

29. Ide o rovnicu s parametrami a, b. Upravme ju na tvar

$$(\sin x - \cos x)\bigl(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)\bigr) = 0,$$

odkiaľ dostávame

$$\sin x = \cos x \tag{1}$$

alebo

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0. \tag{2}$$

Musí však platiť $(b\cos x + a)(b\sin x + a) \neq 0$ (inak daná rovnica nemá zmysel). Rovnica (1) má riešenie $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, kým rovnica (2) riešenie nemá, pretože $\frac{a^2+b^2}{|ab|} \geqq 2$, zatiaľ čo $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right| \leqq \sqrt{2}$. Dostávame teda, že ak $(b\cos x + {}$ ${}+ a)(b\sin x + a) \neq 0$, potom má rovnica riešenie $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

30. Je $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = a$ práve vtedy, keď

$$\frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = a. \tag{1}$$

Keďže $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, po umocnení (1) jednoduchou úpravou dostaneme pre $a \neq 0$ rovnicu

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Po substitúcii $\sin^2 x = y$ riešime kvadratickú rovnicu

$$y^2 - y + \frac{1}{a^2} = 0. \tag{2}$$

Jej riešenia pre $|a| \geqq 2$ sú

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{a^2-4}}{|a|}\right),$$

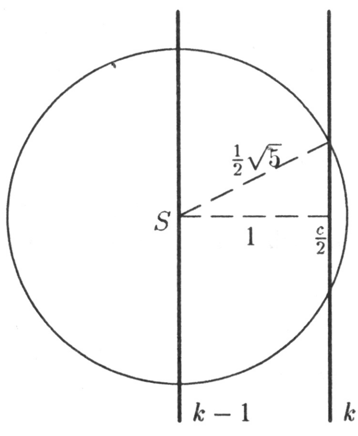
pre $|a| < 2$ rovnica (2) nemá reálne riešenie. Keďže pre $|a| \geqq 2$ je $0 \leqq y_1 \leqq 1$ a $0 \leqq y_2 \leqq$ $\leqq 1$, dostávame $\sin x = \pm\sqrt{y_1}$, $\sin x = \pm\sqrt{y_2}$. Podobne môžeme vyjadriť hodnoty $\cos x$.

Keďže úpravy neboli ekvivalentné, je potrebné urobiť skúšku správnosti. Dostaneme riešenia:

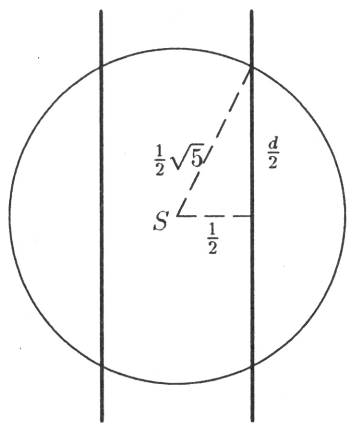
pre $a \geqq 2$	$\sin x = \sqrt{y_1}$;	$\cos x = \sqrt{y_2}$;
	$\sin x = -\sqrt{y_1}$;	$\cos x = -\sqrt{y_2}$;
	$\sin x = \sqrt{y_2}$;	$\cos x = \sqrt{y_1}$;
	$\sin x = -\sqrt{y_2}$;	$\cos x = -\sqrt{y_1}$;
pre $a \leqq -2$	$\sin x = \sqrt{y_1}$;	$\cos x = -\sqrt{y_2}$;
	$\sin x = -\sqrt{y_1}$;	$\cos x = \sqrt{y_2}$;
	$\sin x = \sqrt{y_2}$;	$\cos x = -\sqrt{y_1}$;
	$\sin x = -\sqrt{y_2}$;	$\cos x = \sqrt{y_1}$.

31. Zo zadania štvoruholníka vyplýva, že pre jeho šírku s platí $s \geqq \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Podľa Blaschkeovej vety doň môžeme vpísať kruh o polomere $r = \frac{1}{3}s$, čiže $r \geqq \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Dokážeme, že kruh o polomere $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ obsahuje vždy aspoň tri celočíselné body.

Stred kruhu leží medzi rovnobežnými priamkami $x = k$, $x = k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Hraničná kružnica vytne na nich dve úsečky a my dokážeme, že na kratšej leží aspoň jeden a na dlhšej aspoň dva celočíselné body. Hraničná kružnica vytne na hraničnej priamke $x = k$ najmenšiu kratšiu úsečku vtedy, keď stred leží na priamke $x = k - 1$. Z Pythagorovej vety (obr. 10) plynie, že kratšia úsečka má dĺžku 1, a teda obsahuje vždy aspoň jeden celočíselný bod.



Obr. 10



Obr. 11

Hraničná kružnica vytne na hraničnej priamke najmenšiu dlhšiu úsečku, ak jej stred leží na osi uvedeného pásu (obr. 11). Z Pythagorovej vety potom vychádza, že v tomto prípade majú obe úsečky dĺžku 2, dlhšia úsečka tedy obsahuje vždy aspoň dva celočíselné body.

Polomer kruhu vpísaného do $ABCD$ je $r \geqq \frac{1}{2}\sqrt{5}$ a o ňom sme dokázali, že obsahuje aspoň tri celočíselné body.

32. Množina bodov, ktoré vyhovujú nerovnosti $y \geqq x^2$, je parabola so svojím vnútrom; množina $x^2 + (y - \lambda)^2 \leqq 1$ je kruh so stredom $(0, \lambda)$ a polomerom 1, $x = \lambda$ je priamka rovnobežná s osou y vo vzdialenosti λ; M_λ je podmnožinou priamky $x = \lambda$. Konvexný obal množiny $\{(0,0)\} \cup \mathsf{M}_\lambda$ leží na priamke, iba ak $\lambda = 0$ alebo M_λ je prázdna alebo jednobodová množina. (Ak je M_λ viacbodová, tak jej body ležia na priamke $x = \lambda$, ktorá neprechádza bodom $(0,0)$).

Ak $\lambda \notin \langle -1, 1 \rangle$, prienik priamky a kruhu je prázdny, takže $\mathsf{M}_\lambda = \emptyset$. Ak $\lambda \in \langle -1, 1 \rangle$, je y-ová súradnica prieniku paraboly s priamkou rovná λ^2 a y-ová súradnice prieniku kruhu s priamkou sú rovné $\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$. Množina M_λ je prázdna alebo jednoprvková množina, iba ak $\lambda^2 \geqq \lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$ (prečo?). To môže nastať iba pre $\lambda = 1$ alebo pre $\lambda < 0$. Po umocnení dostaneme nerovnicu $(\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1) \geqq 0$ a príslušná kubická rovnica má jediný reálny koreň $\lambda_0 < 0$. Úlohe potom vyhovujú všetky $\lambda \in \in (-\infty, \lambda_0) \cup \langle 1, \infty)$. Ak využijeme napríklad Cardanov vzorec, dostaneme, že $\lambda \in \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{17 - \sqrt{297}} - 1\right)\right) \cup \langle 1, \infty)$.

33. Zaoberajme sa len takými množinami A, ktoré neobsahujú 0 (inak v nich nulová postupnosť existuje evidentne).

a) Nech všetky čísla v A majú rovnaké znamienko (nech je to +, v prípade − je dôkaz rovnaký). Definujme postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ takto: ak máme prvok $x_k \in \mathsf{A}$, existujú prvky (keďže $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$) y, $z \in \mathsf{A}$ také, že $y + z = x_k$. Všetky tri čísla sú kladné, takže aspoň jedno z čísel y, z je menšie alebo rovné $\frac{x_k}{2}$. Položme $x_{k+1} = \min\{y, z\}$. Pre takú postupnosť, v ktorej pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $x_{k+1} \leqq \frac{x_k}{2}$, ľahko dokážeme indukciou, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \leqq \frac{x_0}{2^n}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$.

b) Nech existujú v A čísla kladné i záporné (tj. existujú $a, b \in \mathsf{A}$ také, že $a < 0 < b$). Definujme postupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, a $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré o ich ľubovoľných členoch ($n \geqq 0$) platí $x_n < 0 < y_n$, $x_n + y_n \in \mathsf{A}$, $x_n + y_n \neq 0$ (prečo?).

Ak $x_n + y_n > 0$, položme $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$. Ak $x_n + y_n < 0$, položme $y_{n+1} = x_n$, $x_{n+1} = x_n + y_n$. Zrejme pre všetky prirodzené n je $x_n \leqq x_{n+1} < 0 < < y_{n+1} \leqq y_n$. Dokážeme, že aspoň jedna z postupností $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nulová. Nech to neplatí, teda nech existuje $L > 0$ tak, že pre všetky prirodzené n je x_n, $y_n \notin (-L, L)$. Zoberme teraz najväčšie k prirodzené také, že pre všetky prirodzené n je x_n, $y_n \notin (-kL, kL)$. Existuje $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $x_n \in (-2kL, 0)$ alebo $y_n \in (0, 2kL)$. Nech existuje napríklad také $n = n_0$, že $y_{n_0} \in (0, 2kL)$, a nech p je najväčšie prirodzené číslo s vlastnosťou $x_{n_0} + py_{n_0} < 0$ (môže sa stať, že $p = 0$). Vidno, že

$$x_{n_0} + py_{n_0} = x_{n_0+p}, \quad y_{n_0} = y_{n_0+p} \quad \text{a} \quad x_{n_0+p} \in (-y_{n_0}, 0).$$

Potom ale platí

$$0 < x_{n_0+p} + y_{n_0+p} = y_{n_0+p+1} < kL,$$

lebo $x_{n_0+p} + y_{n_0} < y_{n_0} - kL < 2kL - kL = kL$. To je spor. Takže aspoň jedna postupnosť je nulová (možno dokázať, že i druhá). Ak by platilo, že A obsahujúca kladné i záporné čísla musí obsahovať nulu, tak predchádzajúce úvahy by boli zbytočné. Ale odpoveď znie nie: stačí vziať $\mathsf{A} = \{a\sqrt{2} - b\colon a, b \in \mathbb{Q}_+\}$. Platí, že $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$, ale $0 \notin \mathsf{A} \neq \emptyset$.

34. Najprv dokážeme, že A s každým svojím bodom $B = (x, y)$ obsahuje aj bod $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Keďže $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$, existujú body C, $D \in \mathsf{A}$, že $C + D = B = (x, y)$. Ak $B = 0$, $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = (0,0) \in \mathsf{A}$. Ak $(x, y) \neq (0,0)$, označme $S = \frac{0 + B}{2}$. Buď $C = S = D$ a potom $S = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in \mathsf{A}$, alebo $C \neq D$ a vtedy S je stred úsečky CD (v prípade, že B, C, D ležia na priamke), lebo $S = \frac{0 + B}{2} = \frac{C + D}{2}$. Ale A je konvexná, takže $S = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in \mathsf{A}$. Keďže $\mathsf{A} \neq \emptyset$, vezmime ľubovoľný prvok $(a, b) \in \mathsf{A}$. Položme $(x_1, y_1) = (a, b)$ a pre všetky prirodzené n nech $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Ľahko sa overí, že platí $(x_n, y_n) = \left(\frac{a}{2^{n-1}}, \frac{b}{2^{n-1}}\right)$ a celá postupnosť pozostáva z prvkov množiny A, pričom

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^2 + y_n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n-2}}(a^2 + b^2) = 0.$$

Druhé tvrdenie neplatí. Jedným z protipríkladov je $\mathsf{A} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

35. Strany trojuholníka musia spĺňať trojúholníkové nerovnosti a platí pre ne a, b, $c > 0$. Ak čísla $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$ majú byť dĺžky strán trojuholníka, musia byť kladné a spĺňať trojúholníkové nerovnosti

$$\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}, \tag{1}$$

$$\frac{b}{b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{c}{c+1}, \tag{2}$$

$$\frac{c}{c+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}. \tag{3}$$

Stačí dokázať ľubovoľnú z nerovností (ostatné dostávame cyklickou zámenou označenia strán).

Ak a, b, c sú kladné čísla, potom aj $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$ sú kladné. Ekvivalentnými úpravami vzťahu (1) dostávame

$$a < abc + 2bc + b + c. \tag{4}$$

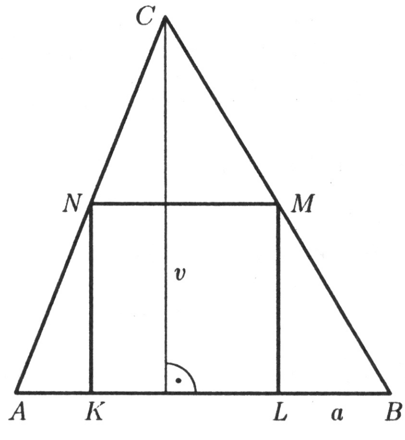
Keďže $a < b + c$ (podľa predpokladu), $abc > 0$ a $bc > 0$, potom je nerovnosť (4) pravdivá. Keďže je ekvivalentná s nerovnosťou (1), čísla $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$ sú dĺžky strán trojuholníka.

36. Vyriešime prípad 3) $c \leqq 1$. Veľkosť druhých dvoch strán nie je obmedzená. Ľahko zistíte, že vieme nájsť trojuholník s ľubovoľne veľkým obsahom; neexistuje teda horná hranica pre veľkosť trojuholníka v ktorom je $c \leqq 1$.

Pri riešení prvých dvoch prípadov použijeme poznatok, že obsah trojuholníka závisí priamo úmerne od dvoch nezávislých veličín: od veľkosti strany a veľkosti výšky na túto stranu.

1) $a \leqq 1$. Nech má strana $a = BC$ najväčšiu možnú dĺžku, tj. 1. Bod A musí ležať vo vnútri prieniku kruhov s obvodovými kružnicami $k_1(B, 1)$ a $k_2(C, 1)$ (lebo veľkosti strán b, c sú najviac 1). (Nakreslite si obrázok!) Z obrázku je vidieť, že maximálnu výšku a teda aj maximálny obsah bude mať trojuholník s tretím vrcholom totožným s priesečníkom kružníc k_1, k_2. Bude rovnostranný so stranou 1 a obsahom $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) $b \leqq 1$. Nech má strana $b = AC$ najväčšiu možnú dĺžku, tj. 1. Bod B musí ležať zároveň vnútri kruhu s obvodovou kružnicou $k_1 = (A, 1)$ (lebo $b \geqq c$). Najväčšia výška na stranu b bude mať dĺžku 1, teda maximálny možný obsah $\frac{1}{2}$ má pravouhlý trojuholník s odvesnami b, c veľkosti 1.



Obr. 12

37. Zo zadania úlohy plynie (obr. 12), že trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom NMC. Z podobnosti ďalej vyplýva, že $\frac{v-x}{v} = \frac{x}{a}$, takže $x = \frac{av}{a+v}$. Obsah trojuholníka ABC je $P_1 = \frac{1}{2}av$. Obsah štvorca $KLMN$ je $P_2 = \left(\frac{av}{a+v}\right)^2$. Úloha vyžaduje dokázať platnosť nerovnosti

$$\frac{(av)^2}{(a+v)^2} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}av\right).$$

Tá je ekvivalentná s nerovnosťou $av \leqq \frac{(a+v)^2}{4}$ (keďže a, $v > 0$), tj. s nerovnosťou medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Rovnosť nastáva v prípade $a = v$.

38. Obsah P trojuholníka so stranami a, b, c je podľa Herónovho vzorca

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)}\left(\sqrt[3]{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Z nerovnosti medzi geometrickým a aritmetickým priemerom vyplýva

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \leqq \frac{a+b-c+a-b+c-a+b+c}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$P \leqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a+b+c}}{4} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a+b-c = a-b+c = -a+b+c$, čo je ekvivalentné s tým, že $a = b = c$. Najmenší obvod pri danom obsahu P má rovnostranný trojuholník.

Trojuholník s maximálnym obvodom pri danom obsahu neexistuje. To dokážeme sporom: Nech trojuholník s daným obsahom P a najväčším obvodom má strany a, b, c. Potom ale ľubovoľný trojuholník so základňou $a+b+c$ a výškou $\dfrac{2P}{a+b+c}$ má obsah $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\dfrac{2P}{a+b+c} = P$ a obvod $o > a+b+c$, a ten je väčší než obvod trojuholníka so stranami a, b, c. To je spor.

39. Z Herónovho vzorca pre obsah trojuholníka dostávame

$$4P\sqrt{3} = \sqrt{3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Z trojúholníkovej nerovnosti pre strany a, b, c vyplýva $-a+b+c > 0$, $a-b+c > 0$, $a+b-c > 0$, a teda môžeme použiť nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom týchto troch čísel, z ktorej dostaneme

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \tag{2}$$

s rovnosťou pre $a = b = c$. Ľahko sa presvedčíme, že platí

$$(a+b+c)^2 \leqq 3(a^2+b^2+c^2) \tag{3}$$

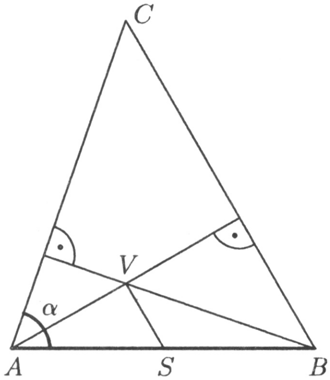
s rovnosťou pre $a = b = c$. Z (1) použitím (2) a (3) dostávame

$$4P\sqrt{3} \leqq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqq a^2+b^2+c^2,$$

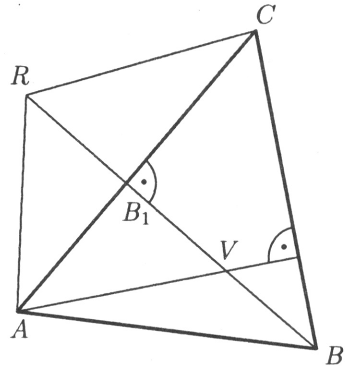
tým je daná nerovnosť dokázaná. Rovnosť v poslednom vzťahu nastane, ak nastane rovnosť v (2) a (3), teda práve vtedy, ak je trojuholník rovnostranný.

40. Ak bod E je taký, ako požaduje úloha, tak EF je rovnobežné s AG, EA s FG, EG s CF a EC s FG, z čoho plynie, že štvoruholníky $AGFE$ a $EGFC$ sú rovnobežníky, teda ich protiľahlé strany sa musia rovnať. Potom platí $|AE| = |FG| = |CE|$, takže bod E musí ležať v strede strany AC.

41. Keďže a, b, c majú byť strany pravouhlého trojuholníka, musí pre ne platiť $a^2 + b^2 = c^2$, čo spolu s rovnosťami $b + c = p$ a $c + a = q$ dáva kvadratickú rovnicu pre c s parametrami p a q. Z jej dvoch riešení vyhovuje úlohe len $c = p + q - \sqrt{2pq}$, strany a, b vyjadríme podobne, je $a = \sqrt{2pq} - p$, $b = \sqrt{2pq} - q$. Teraz už nie je problém zostrojiť žiadaný trojuholník, úsečku dĺžky $\sqrt{2pq}$ zostrojíme podľa niektorej z Euklidových viet a z podmienok $a > 0$, $b > 0$ vyčítame nutné a postačujúce podmienky riešiteľnosti $p < 2q$ a $q < 2p$.



Obr. 13



Obr. 14

42. Nutnou podmienkou existencie riešenia je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (prečo?).

Predpokladajme, že trojuholník ABC je už zostrojený (obr. 13). Potom V leží na Thalesovej kružnici k nad AS, kde S je stred strany AB (prečo?), navyše leží na v_B. Z toho je už konštrukcia zrejmá. Počet riešení závisí od počtu priesečníkov v_B a k. Ľahko sa zistí, že vzdialenosť výšky v_B od bodu S', stredu kružnice k, je $|S'B| \cos\alpha = \frac{3}{4} c \cos\alpha$, a pretože polomer kružnice k je $\frac{1}{4} c$, dostávame, že pre $0 < \cos\alpha < \frac{1}{3}$ má úloha práve dve rôzne riešenia, pre $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ jediné a pre $\cos\alpha > \frac{1}{3}$ žiadne riešenie.

43. Nech R je priesečník kružníc k_1 a k_3, rôzny od bodu V, kružnica k_1 (resp. k_3) má stred A a polomer $|AV|$ (resp. C a $|CV|$) a označme B_1 priesečník priamok BV a AC, A_1 priesečník priamok AV a BC (obr. 14). Potom trojuholník ARB_1 je zhodný s trojuholníkom AVB_1, ďalej trojuholník AVB_1 je podobný trojuholníku ACA_1 (sú to pravouhlé trojuholníky a majú spoločný uhol pri vrchole A), teda trojuholník ARB_1 je podobný trojuholníku ACA_1, odtiaľ $|\sphericalangle ARB| = |\sphericalangle ACB|$, takže body C, R ležia na tom istom oblúku nad AB, pre ostatné body využijeme cyklickú zámenu.