Matematické korespondenční semináře na severní Moravě

Josef Molnár, Jaroslav Švrček

(Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci)

Každý jsme jiný a ne každý umí předvést své znalosti a dovednosti v danou chvíli. Snad proto mnoha mladým matematikům vyhovuje právě forma matematického korespondenčního semináře (MKS). Jeho smysl — vyhledávání a výchova matematických talentů — je stejný jako v případě matematické olympiády, využívá přitom jiných forem a metod práce.

Nejinak je tomu také v případě olomouckého MKS, který navázal na tradici korespondenčního semináře organizovaného učiteli a studenty gymnázia M. Koperníka v Bílovci. Po vzniku tříd gymnázií se zaměřením na matematiku ve školním roce 1974/75 se hledaly různé formy mimoškolní činnosti. V Bílovci tak vznikl například sborník článků, jejichž autory byli žáci matematických tříd, s názvem Matematika a po vzoru slovenských kolegů inicioval profesor gymnázia M. Koperníka Dr. Jiří Váňa v roce 1980 korespondenční seminář, který fungoval pět let. Jeho úlohy řešilo vždy přibližně 60 studentů středních škol z celé republiky. Pro 30 nejlepších řešitelů se konalo v období jarních prázdnin soustředění finančně kryté z prostředků MŠ ČSR a JČSMF. Při soustředěních s přednáškami pomáhali učitelé moravských vysokých škol, chod semináře přitom zajišťovali studenti bíloveckého gymnázia sami pod vedením prof. Váni.

Seminář organizovaný na přírodovědecké fakultě UP v Olomouci vznikl z iniciativy posluchačů oboru matematická analýza a učitelů kateder matematiky na PřF UP. Začal pracovat ve školním roce 1986/87. Za pět let své existence proplul mnoha úskalími ekonomických, administrativních i personálních problémů. Svou činností však přispěl k vyhledávání a rozvoji matematických talentů, a to nejen na Moravě. Vždyť v jednotlivých ročnících se ho zúčastnilo vždy 150 – 200 řešitelů z celé naší republiky.

U jeho zrodu stáli Jarmila Ranošová a Petr Adámek, v té době studenti PřF UP, a učitelé PřF UP Dr. Jaroslav Švrček a Dr. Josef Molnár, který byl vedoucím všech pěti ročníků MKS. Spolupořadateli byli mj. Sm KV MO, olomoucká pobočka JČSMF, ODDM Olomouc, UP Olomouc a její mládežnické organizace.

Korespondenční část obsahovala v jednotlivých ročnících 4 – 5 zpravidla monotematických sérií po šesti úlohách různé obtížnosti. Každý řešitel si mohl vybrat úlohy podle svých shopností, navíc prémiové body částečně vyrovnávaly handicap mladších řešitelů a studentů „nematematických“ tříd.

Již pravidlem se stalo konání závěrečného soustředění pro 30 nejlepších řešitelů v turistické základně ODDM Olomouc, která se nachází v malé obci Ochoz u Konice na Hané. Podle anket účastníků jsou ochozská soustředění velkou motivací pro řešitele zejména svou neopakovatelnou atmosférou, která je dána kontinuálním propojením matematického i nematematického programu, kolektivem vedoucích a charakteristickým rázem jednotlivých soustředění, která se nesla například v duchu antiky, výletu do budoucnosti, „Černých baronů“ a podobně. Od třetího ročníku se daří zajišťovat ještě další soustředění pozvaných řešitelů — zpravidla v Jeseníkách, a to v průběhu korespondenční části.

Organizátorům soustředění se osvědčil standardní program: dopoledne je věnováno přednáškám, část odpoledne tráví účastníci v přírodě nebo sportováním a pak do večeře pracují v seminářích. Je potěšitelné, že i večer dávají účastníci přednost činnostem spojeným s rozvojem logického myšlení a prostorové představivosti. Jeden celý den v rámci soustředění je vždy vyhrazen pro GRAND PRIX — matematickou hru, kterou si oblíbili účastníci i organizátoři soustředění obou našich republik.

Přednášky na soustředění probíhají zpravidla dvě souběžně, takže účastníci mají možnost volby podle zájmu a individuální úrovně. Osvědčenými lektory a organizátory závěrečných soustředění jsou: RNDr. J. Molnár, CSc., RNDr. J. Srovnal, CSc., RNDr. J. Švrček, CSc., z řad studentů vysokých škol pak bývalí úspěšní olympionici a příznivci olomouckého MKS J. Ranošová, P. Adámek, A. Zach, P. Šleich, P. Calábek, V. Skopal, J. Ježková, J. Sedláčková, M. Zmeškalová a další, z nichž mnozí se podílejí také na přípravě textů a oprav úloh korespondenční části semináře.

Závěrem předkládáme čtenářům ukázku čtyř úloh různé obtížnosti, které byly zadány řešitelům olomouckého MKS ve školním roce 1989/90.

Zároveň nám dovolte vyslovit naše upřímné poděkování všem jmenovaným i nejmenovaným nadšencům, kteří se dosud podíleli na úspěšném chodu MKS na severní Moravě a přispěli tak k rozvoji mladých matematických talentů v ČSFR.

Úlohy

1. Rozhodněte, zda existuje trojúhelník, jehož všechny výšky jsou menší než 1 cm a jehož plocha je větší než $1\,\mathrm{m}^2$.

2. Jedenáctičlenná komise má uloženy materiály v trezoru. Jakým nejmenším počtem zámků je nutno opatřit trezor a kolika klíči je třeba vybavit každého člena komise, aby libovolných 6 členů komise trezor otevřelo a přitom aby pro 5 členů komise byl trezor nedostupný?

3. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla taková, že $ad - bc = 1$. Dokažte, že platí $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geqq \sqrt{3}$.

4. Najděte všechny spojité funkce f takové, že pro všechna reálná x platí $f(2x + 1) = f(x)$.

Řešení

1. Takový trojúhelník existuje, což dokážeme například takto: Uvažujme obdélník $ABCD$, jehož strana AB má délku 1 cm a strana BC délku d cm, kde $d > 40\,000$.

Nechť S je průsečík obou úhlopříček AC a BD. Snadno nahlédneme, že trojúhelník BCS má plochu větší než $10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 1\,\mathrm{m}^2$, přitom všechny jeho výšky mají délku menší než $1\,\mathrm{cm}$.

2. Členy komise je nutno vybavit klíči následujícím způsobem: Každým šesti členům komise přidělíme stejný klíč od téhož zámku. Zbývajících pět členů tento klíč nevlastní, tudíž trezor otevřít nemůže. Musí tedy existovat $\binom{11}{6}$ různých typů klíčů a stejný počet zámků u trezoru. Je-li tedy trezor opatřen $\binom{11}{6} = 462$ zámky, musí být od každého k dispozici 6 klíčů, to jest celkem $6 \cdot \binom{11}{6}$ klíčů. Má-li nyní každý člen komise z tohoto celkového počtu stejný počet $\frac{6}{11} \cdot \binom{11}{6}$ různých klíčů, máme zajištěno, že každých šest členů komise trezor otevře, přitom pět členů komise k tomu nestačí. Kdyby totiž existovala šestice členů komise, z nichž každý má $\frac{6}{11} \cdot \binom{11}{6} = \binom{10}{5} = 252$ různých klíčů od $\binom{11}{6} = 462$ zámků, která by neotevřela trezor, znamenalo by to, že pouze zbývajících pět členů vlastní klíč od některého zámku, který nemá k dispozici uvažovaná šestice členů. To je však v rozporu s přidělením klíčů od jednotlivých zámků. Trezor musí být opatřen minimálně 462 zámky, přitom každý člen komise musí být vybaven 252 různými klíči.

3. Podle předpokladu zřejmě platí

$$bc\sqrt{3} - ad\sqrt{3} = -\sqrt{3}.$$

Přičtením tohoto vztahu k nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geqq \sqrt{3}$ dostáváme nerovnost s ní ekvivalentní

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd + bc\sqrt{3} - ad\sqrt{3} \geqq 0. \tag{1}$$

Uvažujeme-li levou stranu nerovnosti (1) jako kvadratickou funkci f proměnné a, máme

$$f(a) = a^2 + (c - d\sqrt{3})a + b^2 + c^2 + d^2 + bd + bc\sqrt{3}.$$

Funkce f nabývá jen nezáporných hodnot, právě když její diskriminant D_f je nekladný. Tudíž nerovnost (1) je ekvivalentní s nerovností

$$D_f = (c - d\sqrt{3})^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + bd + bc\sqrt{3}) \leqq 0. \tag{2}$$

Uvažujeme-li nyní levou stranu nerovnosti (2) jako kvadratickou funkci g proměnné b, tj.

$$g(b) = -4b^2 - 4(d + c\sqrt{3})b - 3c^2 - 2cd\sqrt{3} - d^2,$$

nabývá g jen nekladných hodnot, právě když je diskriminant D_g rovněž nekladný. Snadným výpočtem však zjistíme, že $D_g = 0$. S ohledem na ekvivalenci uvažovaných vztahů je tím ověřena platnost dokazované nerovnosti.

2. řešení. Uveďme nejprve dvě pomocná tvrzení.

Lemma 1. Pro libovolná reálná čísla a, b, c, d platí identita

$$(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Lemma 2. Pro libovolné reálné x platí

$$2\sqrt{x^2+1}+x \geqq \sqrt{3}.$$

Důkaz prvního lemmatu je triviální, důkaz druhého lemmatu využívá postupné úpravy:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x^2+1}+x)^2 &= 4x^2+4+4x\sqrt{x^2+1}+x^2 = \\ &= (2x+\sqrt{x^2+1})^2+3 \geqq 3.\end{aligned}$$

Užijeme-li dále nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem na dvojici a^2+b^2, c^2+d^2 nezáporných čísel, dostáváme postupně s využitím lemmat 1 a 2

$$\begin{aligned}S &= a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd \geqq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+(ac+bd) = \\ &= 2\sqrt{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}+(ac+bd) = \\ &= 2\sqrt{(ac+bd)^2+1}+(ac+bd) \geqq \sqrt{3},\end{aligned}$$

což bylo dokázat.

4. Ukážeme nejprve, že pro všechna reálná x platí $f(x)=f(-1)$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje reálné x, pro něž $f(x)\neq f(-1)$. Pro všechna celá nezáporná čísla n položme $a_n = \dfrac{x+1}{2^n}-1$. Odtud bezprostředně plyne, že $a_n = 2a_{n+1}+1$. Pro každé celé nezáporné n dle zadání platí $f(a_n)=f(a_0)=f(x)$, tudíž $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(x)\neq f(-1)$, zatímco $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2^n}-1\right)=-1$. To je však spor se spojitostí funkce v bodě $x=-1$. Proto musí být $f(x)=f(-1)$ pro každé reálné x. Funkce f je tedy konstantní. Naopak každá konstantní funkce zřejmě zadání úlohy vyhovuje.