Jan Vyšín
Vyprávění o úlohách MO

In: Jozef Moravčík (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-09] Matematická olympiáda 1951-1981. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1981. pp. 143–148.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405370

Vyprávění o úlohách MO

Jan V y š í n

Materiál úloh uchovaný v téměř třiceti ročníkových brožurách má dokumentární hodnotu. Pochopitelně různou: najdeme tu úlohy velmi náročné a originální, úlohy rutinní i školské; přispívali sem praktičtí pedagogové i vědečtí pracovníci, což se odráží v charakteru úloh. Kritika úloh je - jak je přirozené - příznivá i odmítavá, ne-li zdrcující. Za kladný posudek můžeme pokládat např. počin pracovníků maďarské olympiády, kteří přeložili a vydali řešení úloh několika ročníků olympiády sovětské a československé. Velmi ostrá odmítavá kritika zaznívá občas z řad učitelů a studentů, že se k řešení dávají bůhví odkud sehnané úlohy; tito kritikové asi napadají "odřezky" vědecké práce, které byly někdy bez motivací zařazovány jako soutěžní úlohy. Olympiáda měla a má však poslání nejen soutěžní, ale i studijní. Na soubor soutěžních úloh se tedy nesmíme dívat jen jako na muzeální exponáty, ale spíše jako na sbírku modelů na módní přehlídce. Projděme zběžně touto neinstalovanou výstavkou a všimněme si nejzajímavějších exponátů. O soutěžních úlohách můžeme říci jako o knížkách: habent sua fata libelli; a opravdu některé úlohy mají už svou malou historii.

V prvním kole 1. ročníku MO se objevila úloha, jejímž autorem byl - jak zde prozrazujeme - profesor Knichal. Ta se stala svým způsobem legendární. Text úlohy zněl:

Soustava čtverců má tuto vlastnost:

- Jeden vrchol každého čtverce leží na přímce p, druhý na přímce q, třetí na přímce r.
- Dokažte, že čtvrté vrcholy čtverců soustavy leží také na přímce.
- Užitím předchozího výsledku sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol A leží na dané přímce a, vrchol B na dané přímce b, vrchol C na dané přímce c a vrchol D na přímce d.
- Diskuse.

Úloha byla zadána, aniž se předem vypracovalo její podrobné řešení. Když na to došlo, zjistilo se, že úplné řešení není tak jednoduché, jak se zdálo na první pohled. Profesor Knichal znal sice řešení, ale to nebylo přístupné středoškolákům; a tak několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV /tehdejšího Ústředního ústavu matematického/ sestavilo školské řešení, které najdete na šesti stranách ročníkové brožury; obsahuje dvě pomocné věty a dvě pomocné úlohy, z nichž jedna je značně členitá a složitá.

Z této pseudokomické situace vytěžil ÚVMO mravní naučení, že nelze zadat žádnou úlohu do soutěže, pokud autor nevypracoval její podrobné řešení; tato zásada se od těch dob přísně dodržuje.

Ale tato úloha A-I-8 měla ještě pozdější dozvuky. Časopis pro pěstování matematiky otiskl ve svém 84. ročníku /1959/ článek známého slovenského pracovníka dr. Pavla Bartoše o lineárních soustavách přímých podobností v rovině; autor tu studuje pomocí aparátu komplexních čísel /souřadnic/ jisté lineární soustavy přímých podobností v rovině. Jde o podobnosti, které převádějí n daných bodů $B_1, \ldots, B_n$ v body ležící na n daných přímkách $p_1, \ldots, p_n$. Vypracovává se jakási "miniteorie" těchto soustav a z ní vyplývá řešení úlohy A-I-8 jako evidentní důsledek /příklad 5 v citovaném článku/.

Také tato skutečnost v sobě skrývá mravní naučení: příliš komplikované řešení některé úlohy nás upozorňuje, že pravděpodobně děláme "skok": v našem případě jsme přeskočili celou zmíněnou "miniteorii". Takové úlohy se ovšem pro soutěž MO nehodí.

Chceme-li hovořit frazeologií módní přehlídky, objevují se v prvním desítiletí olympiády většinou velmi solidní, umírněné a osvědčené modely tradičního vkusu, které se líbily a splnily své poslání. Posuďte sami:

- Určete všecka reálná řešení rovnice
$$x + \sqrt{2p - x^2} = 8$$
o neznámé x s parametrem p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p /roč. 1957/58/.

- Je dána funkce
$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}} - \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}}\,.$$
Určete její maximální definiční obor a nakreslete její graf /roč. 1959/60/.

- Vypočtěte tisící člen posloupnosti
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...
/roč. 1960/61 - úloha A-III-1/.

Pěstovala se střízlivá funkční teorie /vyskytovaly se tu i funkce s odmocninami a absolutními hodnotami/, rovnice a nerovnice s parametry a vydatné diskuse. Od samého začátku MO se vyskytovala geometrická zobrazení a jejich skládání. Později jsme od tématiky geometrických zobrazení značně upustili - asi ke škodě věci.

Zvláštní postavení v naší olympiádě měla stereometrie - úlohy byly zpravidla metrické, ale nikoli výpočty objemů a povrchů. Když se zrodila z podnětu prof. Tiberiu Romana v r. 1959 první mezinárodní matematická olympiáda v Rumunsku /zprávu o ní najdeme v osmé ročníkové brožuře/, stalo se Československo takřka monopolním dodavatelem stereometrických úloh; bylo to hlavně zásluhou profesora M. Fiedlera. Zde jsou dvě ukázky stereometrických úloh, které Československo navrhlo na mezinárodních olympiádách a které byly přijaty:

- Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1 pak je jeho objem roven nejvýše $\frac{1}{8}$; dokažte. /1967/
- Bod O leží na přímce ℓ , $OP_1, \dots, OP_n$ jsou takové jednotkové vektory, že body P_i leží ve vnitřku téže poloroviny s hranicí ℓ. Dokažte, že pro každé liché číslo n platí
$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geqq 1 \ ;$$
přitom $|\overrightarrow{AB}|$ značí velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$. /1973/

Zůstaňme ještě na chvíli u mezinárodních olympiád. V roce 1970 se konala XII. MMO v Maďarsku. Mezinárodní jury přijala československou úlohu, její text zní:

- Určete všechna přirozená čísla n, která mají tuto vlastnost: množinu $M = \{n, n+1, \dots, n+5\}$ lze rozložit ve dvě disjunktní neprázdné podmnožiny tak, že součiny všech prvků obou těchto množin jsou si rovny.

Úloha nemá řešení /žádné takové n neexistuje/. Zvedla pak na olympiádě i doma mezi pracovníky ve školské matematice "vlnu tvořivosti" v sestavování různých variant i analogií.

Jak už jsme se však zmínili, má MO /s malým přerušením/ čtyři kategorie A, B, C, Z /dříve A, B, C, D/. Úlohy kategorie Z a částečně i C představují na naší přehlídce "dětské šatečky". Matematické prostředky účastníků těchto kategorií jsou velmi skrovné a tak soutěžní úlohy jsou často matematické úlohy "bez matematiky". Připouští se - dokonce se vyžaduje - experimentování, použití takových pomůcek, jako je strom všech logických možností, jako jsou Vennovy diagramy, které postupně vytlačují dřívější náměty úloh na procenta, zlomky apod..

Dosti atraktivní byly úlohy s "opravováním chyb". Jedna úloha tohoto typu je C-II-3, roč. 1962/63:

. Žák měl vypočítat aritmetický průměr čtyř daných čísel a, b, c, d. Počítal jej takto: určil nejdříve aritmetický průměr p čísel a, b, pak aritmetický průměr q čísel c, p a konečně aritmetický průměr r čísel d, q. Číslo r pokládal za výsledek.
a/ Ukažte, že postup, který žák použil, není správný.
b/ Jestliže však číslo r bylo přesto správným výsledkem, splňovala čísla a, b, c, d nutně určitý vztah; najděte jej.

V historii tvorby a využití soutěžních úloh pro MO jsou dvě důležité události: předně založení konkursu JČSMF /nyní též JSMF/ na olympiádní úlohy r. 1966. Byl to konkurs, kterým dosud prošlo více než 1500 úloh a jehož význam se ještě zvýší, podaří-li se s pomocí JČSMF realizovat dokumentaci soutěžních i cvičných úloh.

Druhou událostí je zavedení metodických komentářů pro učitele; tyto komentáře, které jsou snad přece jen něčím více než pouhým řešením úlohy a které dostávají učitelé prakticky současně se zadáním přípravných i soutěžních úloh I. kola, se původně /v roce 1970/ vypracovávaly jen pro kategorii Z, nyní jsou k dispozici pro všecky čtyři kategorie. Snaží se pro jednotlivé úlohy konkrétně zodpovědět věčnou polyaovskou otázku: "Jak na to?", tj., jak pomoci žákům při řešení, aniž jim vlastní řešení prozradíme.

Ale vraťme se znovu k naší přehlídce. Postupné modernizování výuky matematice na gymnáziích si vynucuje, aby se modernizovala i tematika soutěžních úloh MO v duchu těchto zásad:

Modernizace vyučování není jen zavedení množinově logického jazyka.

Tradiční a modernizovaná matematika nejsou v rozporu, ale tvoří jediný organický celek.

Proto se zpestřuje tematika úloh prvky kombinatorické geometrie, strukturami, grafy /schéma "strom"/, schodovými funkcemi, funkcí sgn a jinými nespojitými funkcemi, náměty topologického rázu, analytickou geometrií s komplexní souřadnicí a ovšem i množinovými operacemi v potenční množině se znázorněním Vennovými diagramy. Tak se dostala do MO v posledních ročnících např. i Jaccardova vzdálenost konečných množin /tj. vlastně model metrického prostoru/, ale i jednoduché úlohy o sjednocení a průniku několika množin s tematikou "dopravní síť" nebo "nákupy v obchodním domě". Nedostatek místa nám nedovoluje ani vzorově uvádět texty takových úloh; ostatně tkví asi ještě dost v paměti našich čtenářů - učitelů, neboť probíhaly olympiádou nedávno.

Jak už jsme se zmínili, byli a jsou uváděni řešitelé do klauzurních úloh jednak semináři na témata předem stanovená a zpracovaná nebo - a to trvá dodnes - sestavenými cykly úloh pro jednotlivé kategorie počínaje studijními koly. Je to slabá náhrada za postup, který doporučuje probrat /třeba v kroužcích/ jistá ne rozsáhlá témata a z probrané tematiky čerpat náměty soutěžních úloh. V každém případě se dostáváme k požadavku nezadávat jednotlivé úlohy izolované, ale zařaďovat do určitého ročníku soutěže skupiny na sebe navazujících úloh. Zejména mladší řešitelé /kategorie C a Z/ to vyžadují. Uvedeme některé příklady návaznosti.

- Na kružnici k leží 8 různých bodů, z nichž jsou čtyři červené a čtyři modré. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takovou přímku p, že uvnitř opačných polorovin s hranicí p leží po dvou červených a po dvou modrých bodech.

- Osmiúhelník vepsaný dané kružnici má čtyři vrcholy červené a čtyři modré; přitom žádné tři sousední vrcholy nejsou téže barvy. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takové dvě různoběžné přímky, aby uvnitř každého jimi sevřeného úhlu ležel jeden červený a jeden modrý bod. /Roč. 1977/78, Z-I-3, Z-II-1./

- V rovině jsou dány dva trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ této vlastnosti: Ke každému rovnoramennému trojúhelníku T_1, který obsahuje $\triangle_1$ resp. $\triangle_2$ existuje trojúhelník T_2 shodný s T_1, který obsahuje $\triangle_2$, resp. $\triangle_1$. Dokažte, že trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ jsou shodné.

- Jsou dány trojúhelníky T_1, T_2 s obsahy P_1, P_2 a poloměry vepsaných kružnic ρ_1, ρ_2. Je-li trojúhelník T_1 obsažen v trojúhelníku T_2, pak platí
$$\rho_1 \geqq \frac{P_1}{P_2}\,\rho_2 .$$
Dokažte.

- Je-li vypuklý mnohoúhelník s obvodem o_1 obsažen ve vypuklém mnohoúhelníku s obvodem o_2, pak platí $o_1 = o_2$. Dokažte. /Roč. 1974/75, A-I-6, A-II-2a, A-III-5./

Žákovská řešení byla někdy tak originální, nápaditá, že daleko překračovala řešení autorská; taková řešení hlavně z II. a III. kola kategorií A, B se otiskovala v ročníkových brožurách a byla odměňována finančními cenami MÚ ČSAV. Ukázkou je řešení úlohy A-III-6 ročníku 1975/76, které podal J. Turek z Hradce Králové - najdete je v této brožuře.

Mnohá fakta uvedená v tomto "Vyprávění" jsou blíž osvětlena v článku "O třetím kole", který se týká jen kategorie A a je jakýmsi pohledem "pod mikroskopem" na vystavené úlohy třetího kola. I když se článek "O třetím kole" týká jen jedné kategorie a jednoho kola, ukazuje vývoj soutěžních úloh, hlavně jejich tematiky.

Je vidět a jsme si toho plně vědomi - bude třeba ledacos změnit a zlepšit. Chybějí nám v soutěži úlohy s praktickou náplní, úlohy s aplikacemi školské matematiky. Pravděpodobně by se tu měly vyskytovat, hlavně v studijním kole, kde účastník není tak vázán časem, i tzv. problémové situace, které lépe odpovídají tomu, jak nám svět a život problémy předkládá; nikoli izolované, ale v komplexech, z nichž musíme matematické úlohy teprve vypreparovat. Olympiáda by se měla více opírat o studijní literaturu, měla by více podněcovat k experimentování, k vyslovování hypotéz, k jejich dokazování a vyvracení, měla by si více všímat moderní tematiky /např. pravděpodobnosti/.

Je zřejmé, že na příští tvůrce soutěžních i cvičných úloh čeká práce dost. Přejeme autorům úloh a jejich hlavním patronům MÚ ČSAV a oběma Jednotám, aby se jim tato práce dobře dařila a byla ku prospěchu naší společnosti.