Jozef Moravčík; Jan Vyšín

O třetím kole

In: Jozef Moravčík (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-09] Matematická olympiáda 1951-1981. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1981. pp. 85–106.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405368

O třetím kole

Jozef M o r a v č í k , Jan V y š í n

Účastníci třetího celostátního kola kategorie A měli každý rok reprezentovat matematickou špičku středoškoláků. Jejich úroveň, zejména jejich zběhlost a nápaditost při řešení úloh, snad nejpřesvědčivěji ukazovaly soutěžní úlohy třetího kola i když je vybírali podle svého odhadu pracovníci ÚVMO. Odráží se v nich však tématika, která byla v jednotlivých ročnících preferována , rostoucí odborná náročnost soutěže a výrazný teoretický charakter.

První ročník měl skutečně komorní ladění: ze 76 účastníků druhého kola kategorie A /tehdy byly jen dvě kategorie, A a B/ bylo 47 úspěšných řešitelů, a ti postoupili do třetího kola; z nich bylo 22 vítězů. Soutěžní úlohy v prvních letech olympiády byly většinou solidní složitější úlohy, které mohli řešitelé rozřešit pomocí znalostí, kterým se naučili ve škole; trikových úloh bylo mezi nimi málo. To platilo i o úlohách třetího kola kategorie A. Ačkoli v těch letech byli účastníci kategorie A žáci jen jedenáctileté školy, objevovaly se mezi úlohami třetích kol ne právě nejjednodušší "ryze geometrické" úlohy stereometrické i úlohy z aritmetiky komplexních čísel, lépe řečeno z analytické geometrie v rovině s jednou komplexní souřadnicí. Od X. ročníku pronikají mezi tradiční geometrické i negeometrické úlohy poctivé řemeslné práce i některé úlohy méně tradiční. Nové úlohy vyžadují nové přístupy k řešení, popř. i nový aparát. V posledních ročnících MO přichází dosti úloh o maximech a minimech, a to nejen úloh řešených postupy funkční teorie /derivací/, ale i úloh geometrických, které se řeší syntetickými úvahami. Na první pohled je patrné, že tématika úloh v posledních ročnících olympiády je pestřejší a méně školská než v ročnících počátečních. Téměř všechny úlohy jsou zajímavé jak svým obsahem tak způsobem řešení.

Uvádíme znění všech úloh třetího kola kategorie A z 1. - 29. ročníku MO. K úlohám označeným * jsou na konci článku připojena stručná řešení.

I. ročník 1951/52

1. Jsou-li a, b kladná racionální čísla, dokažte, že ze vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c ,$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ jsou rovněž racionální čísla.

2.* Tabulka čísel

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla; každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem. Schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

3. Budiž $ABCD$ vypuklý různoběžník, v němž je $AB = CD$ a buďtež R, S středy stran AD, BC. Sestrojte polopřímky AU, DV souhlasně rovnoběžné s polopřímkou RS. Dokažte, že platí vztah

$$\measuredangle BAU = \measuredangle CDV .$$

4. Rozměry obdélníka jsou přirozená čísla p, q; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC, a to v případě, že čísla p, q jsou a/ nesoudělná, b/ soudělná.

II. ročník 1952/53

1.* V rovině komplexních čísel určete útvar, který vyplní obrazy čísel Z vyhovujících vztahu

$$Z + \bar{Z} = a\,|Z| ,$$

kde $\bar{Z}$ je komplexní číslo sdružené s číslem Z a kde a je dané reálné číslo. Proveďte diskusi pro všechny hodnoty čísla a.

2. α, β, γ sú uhly trojuholníka. Dva z nich sú vyjadrené pomocným uhlom φ, takže

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{4} , \quad \beta = \pi - 3\varphi .$$

Dokážte, že potom platí $\alpha > \gamma$.

3.* Jsou-li čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ kladná, platí

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Dokažte. Kdy nastane rovnost?

4. Sú dané mimobežky a, b, z ktorých je každá rôznobežná s danou rovinou ρ. Zvolme bod X na priamke a, bod Y na priamke b tak, aby bolo $XY \parallel \rho$. Aký geometrický útvar vyplní stred S úsečky XY, ak X prebieha priamku a?

III. ročník 1953/54

1. Nech a je reálné číslo. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$ax^2 + 2(a - 1)x + a - 5 = 0 .$$

Urobte diskusiu vzhľadom na číslo a.

2* Nechť a, b jsou komplexní čísla. Jestliže obrazy kořenů rovnice $Z^2 + aZ + B = 0$ v rovině tvoří spolu s obrazem čísla 0 pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při počátku, potom platí $a^2 = 2b \neq 0$.

Dokažte a zjistěte, zda lze větu obrátit.

3. Bez upotrebenia logaritmických tabuliek dokážte správnosť vzťahu

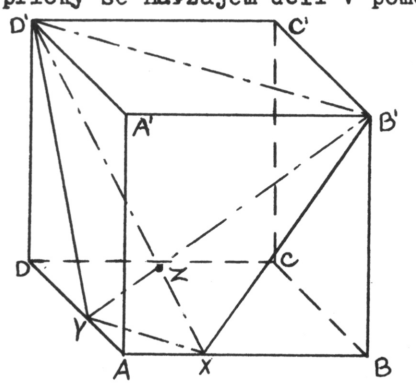
$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2} .$$

/Pritom $\log_A B$ značí logaritmus čísla B při základe logaritmov A./

4* Je dána krychle ABCDA'B'C'D' /AA'∥BB'∥CC'∥DD'/. Nechť bod X leží uvnitř úsečky AB, průsečík hrany AD s rovinou B'D'X označme Y /obr. 6 /.

a/ Jaký útvar vyplní průsečík úhlopříček čtyřúhelníka B'D'YX, probíhá-li bod X vnitřek hrany AB?

b/ Určete mezi těmito čtyřúhelníky B'D'YX takový, že jeho úhlopříčky se navzájem dělí v poměru 1 : 2 .



Obr. 6

IV. ročník 1954/55

1. Buď dán lichoběžník ABCD, o jehož základnách platí $AB > CD$. Označme E průsečík přímek AC, BD a F průsečík přímek AD, BC. Dále označme GH přímku procházející bodem E a rovnoběžnou se základnami, přičemž G leží na přímce AD a H na přímce BC. Označme po řadě K, L středy základen AB, CD. Dokažte, že

a/ přímka EF prochází body K, L;

b/ existuje průsečík M přímek AC, KH a průsečík N přímek BD, KG;

c/ body F, M, N leží v jedné přímce.

2. Buďte dány dvě soustředné kulové plochy K_1 s poloměrem a a K_2 s poloměrem b; přitom je $a < b$. Označme $ABCDA'B'C'D'$ kolmý hranol se čtvercovou podstavou ABCD /přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$/, jehož vrcholy A, B, C, D leží na ploše K_2 a přitom rovina $A'B'C'D'$ se dotýká plochy K_1. Nechť dále platí, že

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{a}{b} .$$

Vypočtěte rozměry tohoto hranolu. Kolik takových hranolů /až na shodnost/ existuje?

3.* V rovině komplexních čísel je vepsán jednotkové kružnici se středem $[0; 0]$ pravidelný sedmnáctiúhelník s jedním vrcholem v bodě $[1; 0]$. Určete počet jeho vrcholů, které leží uvnitř kružnice se středem v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a s poloměrem $r = 1$.

4.* Buďte a, b, c daná reálná čísla vesměs navzájem různá. Potom rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

má vždy reálné řešení. Dokažte.

V. ročník 1955/56

1. Určte všetky dvojice ostrých uhlov x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2 \cos^2 y ,$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2 \sin^2 y .$$

2. V dané rovině ρ buď dán vypuklý čtyřúhelník ABCD, jehož úhlopříčky se protínají v bodě E. Mimo rovinu ρ buď dán bod V. Uvnitř polopřímek VA, VB, VC, VD sestrojte po řadě body A', B', C', D' tak, aby ležely s bodem E v téže rovině σ a aby čtyřúhel-

ník $A'B'C'D'$ byl rovnoběžník. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy. Náčrt konstrukce proveďte ve volném rovnoběžném promítání.

3. Určete všecka reálná řešení soustavy rovnic

$$x - |y + 1| = 1$$
$$x^2 + y = 10 .$$

4.* Je dána polokružnice $\overset{\frown}{AB}$. Označme X vnitřní bod této polokružnice. Na polopřímce XA sestrojme bod Y tak, aby platilo $XY = XB$. Jaký útvar vyplní bod Y , jestliže bod X probíhá všechny vnitřní body dané polokružnice $\overset{\frown}{AB}$?

VI. ročník 1956/57

1.* Určte všetky reálne čísla p tak, aby rovnica

$$\sqrt{x^2 - 5p^2} = px - 1$$

mala koreň $x = 3$. Potom pre tieto čísla p danú rovnicu riešte.

2. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan o hlavním vrcholu V a o podstavě $ABCD$; označme $d = \frac{1}{2} AB$. Označme dále φ odchylku rovin VAD, ABC, takže je $0 < \varphi < 90^\circ$.

a/ Načrtněte konstrukci nejkratší příčky XY mimoběžek VA, BC, přičemž X je bodem přímky VA a Y bodem přímky BC. Vypočtěte velikost příčky XY pomocí daných čísel d, φ .

b/ Vypočtěte vzdálenost v bodů V, X pomocí čísel d, φ /všimněte si, pro která φ padne bod X dovnitř úsečky VA a pro která padne na její prodloužení za bod V/.

3.* Určete všechny úhly α , pro něž jak $\cot g\alpha$ tak $\cot g 2\alpha$ jsou čísla celá.

4. Je daný dutý uhol $\sphericalangle POQ$ a vnútri tohto uhla bod M; ďalej nech je dané kladné číslo m. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ktorý má tieto vlastnosti:

/1/ Vrcholy A, D ležia na polpriamke OP a vrcholy B, C ležia na polpriamke OQ .

/2/ Bod M je priesečníkom uhlopriečok AC, BD .

/3/ Platí $AB = m$.

Dokážte správnosť urobenej konštrukcie a urobte diskusiu riešiteľnosti úlohy.

VII. ročník 1957/58

1.* Určete všechna reálná řešení rovnice

$$x + \sqrt{2p - x^2} = 8$$

o neznámé x, přičemž p je dané reálné číslo. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p.

2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost výšky v_c, velikost těžnice t_c a velikost úhlu γ.

3.* Určete všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\sqrt{2 + \frac{5}{2}\cos x} \leqq \sin x \, .$$

4. Nech sú dané kladné čísla d, v, o ktorých platí $d > v$. Ďalej nech sú dané dve kolmé mimobežky p, q, ktorých najkratšia priečka má veľkosť v. Uvažujme o všetkých úsečkách veľkosti d takých, že jeden z krajných bodov leží na priamke p a druhý na priamke q.
a/ Čo vyplnia krajné body týchto úsečiek na priamke p?
b/ Čo vyplnia stredy týchto úsečiek?

VIII. ročník 1958/59

1.* Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC /kde $\sphericalangle ACB = 90^\circ$/, jsou-li dány délky těžnic t_a, t_b. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům t_a, t_b.

2.* Ak o reálnych číslach a, b, c platia tri nerovnosti

/x/ $\quad a + b + c > 0$

/xx/ $\quad ab + bc + ca > 0$

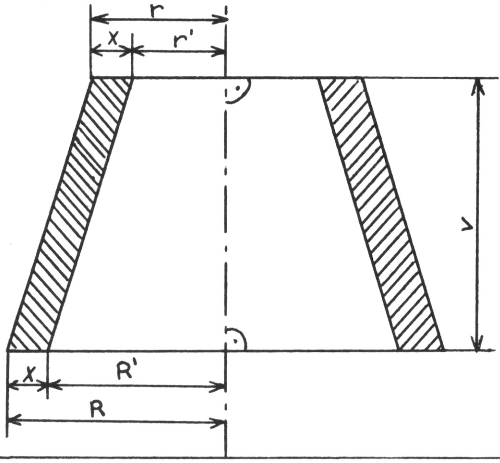
/xxx/ $\quad abc > 0$,

potom sú a, b, c kladné čísla. Dokážte to.

3. Z polotovaru tvaru komolého rotačního kužele, jehož podstavy mají poloměry R, r, byla zhotovena součástka tak, že do něho byla vyvrtána dutina tvaru souosého komolého kužele, jak je vidět z nákresu osového řezu; tím se hmota kusu zmenšila na polovinu. Vypočítejte poloměry otvorů vzniklých v podstavách součástky. Rozhodněte, pro který poměr $\frac{R}{r}$ má úloha řešení. /Obr. 7/

4. Najděte všecky dvojice čísel x, y /ve stupních/, které vyhovují soustavě rovnic

$$\sin(x + 150^\circ) = \cos(y - 75^\circ)$$
$$\cos x + \sin(y - 225^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \, .$$



Obr. 7

IX. ročník 1959/60

1. Najděte všechna reálná čísla x, pro něž platí nerovnost

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3}.$$

2. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, kde $ABCD$ je čtverec a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Na přímce AA' leží bod P. Sestrojte střed S kulové plochy, která je souměrná podle roviny ABB', prochází bodem P a dotýká se přímek $p = AB$, $q = A'D'$.
Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy pro různé polohy bodu P na přímce AA'.

3.* V rovině jsou dány dva různé body A, M o vzdálenosti d. Dále je dáno kladné číslo v. V této rovině sestrojte kosočtverec $ABCD$ o výšce v tak, aby bod M byl středem jeho strany BC. Najděte podmínku řešitelnosti a zjistěte počet řešení. Může být řešením místo kosočtverce čtverec?

4.* Zistite, pre ktoré reálne čísla x je definovaná funkcia

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}} - \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}}.$$

X. ročník 1960/61

1.* Je dána posloupnost

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...

Vypočítejte její tisící člen.

2. Daný je pravouhlý rovnoramenný trojuholník APQ s preponou AP. Zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby priamky BC, CD prechádzali po

radė bodmi P, Q. Vyjadrite dĺžku strany štvorca ABCD pomocou dĺžky $\underline{a}$ odvesny daného trojuholníka.

3.* Dva cyklisté vyjedou současně z téhož místa kruhové dráhy a jezdí po této dráze v opačných smyslech, první stálou rychlostí c_1 m/sek, druhý stálou rychlostí c_2 m/sek. Kolikrát se potkají v době, v které první cyklista objede kruhovou dráhu n-krát? Proveďte výpočet pro $c_1 = 10$, $c_2 = 7$, $n = 11$.

4. Je dán čtverec ABCD, jehož strana má délku 1. Vrchol X proměnného rovnostranného trojúhelníka XYZ leží na polopřímce AB, vrchol Y na úsečce AD, vrchol Z na polopřímce DC. Zjistěte, jak závisí délka strany trojúhelníka XYZ na vzdálenosti AX. Odtud vypočtěte, který z trojúhelníků XYZ má nejmenší a který má největší obsah.

XI. ročník 1961/62

1.* Je daný trojčlen

$$2x^2 - x - 36 .$$

Určte všetky celé čísla x, pre ktoré sa hodnota tohto trojčlena rovná druhej mocnine prvočísla.

2. V rovine je daná sústava pravouhlých súradníc x, y. Vyšetrite množinu všetkých bodov, ktorých súradnice x, y vyhovujú sústave nerovníc

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi ,$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leqq y \leqq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x} .$$

Načrtnite obraz tejto množiny.

3. Sú dané dve navzájom kolmé mimobežky PM, QN, kde priamka PQ je kolmá ku každej z oboch mimobežiek. V rovine σ kolmej k úsečke PQ a prechádzajúcej jej stredom S je daná kružnica $k \equiv (S, r)$. Dokážte, že každá úsečka XY, ktorej krajné body X, Y ležia v uvedenom poradí na mimobežkách PM, QN a ktorá obsahuje bod kružnice k, má tú istú dĺžku. Vyjadrite túto dĺžku pomocou polomeru r a dĺžky $v = |PQ|$.
Aký útvar vyplnia krajné body X všetkých takých úsečiek XY ?

4.* V rovine je daná kružnica $k \equiv (S, r)$. Okrem toho je daný bod $A \not\equiv S$, ktorý leží vo vnútri kružnice k. Svetelný lúč vychádzajúci z daného bodu A sa odráža od kružnice k v určitom bode B, potom sa odráža od kružnice k v určitom bode C a stadiaľ sa vracia naspäť do bodu A.

Vypočítajte hodnotu funkcie sinus pre dutý uhol $\measuredangle$ SAB pomocou čísel r, $d = |SA|$ a rozhodnite o riešiteľnosti úlohy.

XII. ročník 1962/63

1. V kvádri $ABCDA'B'C'D'$ /kde $ABCD$ je obdĺžnik a platí $AA' \| BB' \| \| CC' \| DD'$ je $|AA'| = d$, $\measuredangle ABD' = \alpha$, $\measuredangle A'D'B = \beta$.
Vypočítajte zostávajúce dva rozmery kvádra, ak je dané číslo d a oba ostré uhly α, β. Určte podmienky riešiteľnosti.

2.* Dané párne prirodzené číslo $2k$ rozložte na súčet dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel x, y tak, aby súčin xy bol najväčší možný.

3. V rovine je daná priamka MN. Uvažujme o dvojici kružníc k_1, k_2, ktoré sa priamky MN dotýkajú v uvedenom poradí v bodoch M, N a pritom majú vzájomný vonkajší dotyk. Označme X stred úsečky PQ, kde P, Q sú dotykové body druhej spoločnej vonkajšej dotyčnice kružníc k_1, k_2.
Nájdite množinu takých bodov X pre všetky dvojice kružníc uvedených vlastností.

4. Sú dané dve kvadratické rovnice
$$x^2 + ax + b = 0 , \qquad x^2 + cx + d = 0$$
s reálnymi koeficientami. Nájdite nutné a postačujúce podmienky, ktorým majú vyhovovať koeficienty daných rovníc, aby obe rovnice mali jeden spoločný kladný koreň a aby zostávajúci koreň prvej rovnice bol väčší než zostávajúci koreň druhej rovnice.

XIII. ročník 1963/64

1.* Dekadický zápis čísla $11^{100} - 1$ končí štvorčíslom 6000 a dané číslo je tiež deliteľné číslom 6000. Dokážte.

2. Sú dané dve mimobežky $p = PP'$, $q = QQ'$. Bod X so začiatočnou polohou P sa pohybuje po polpriamke PP' konštantnou rýchlosťou c_1 a bod Y so začiatočnou polohou Q sa pohybuje po polpriamke QQ' konštantnou rýchlosťou c_2. Oba body X, Y sa dajú do pohybu súčasne.
Dokážte, že stred Z úsečky XY leží stále na istej polpriamke RR', kde R je stred úsečky PQ.

3.* Určte všetky hodnoty parametra α z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, pre ktoré má rovnica

$$(2 \cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4 \cos\alpha + 2 = 0$$

kladný koreň x_1, zatiaľ čo druhý koreň x_2, pokiaľ existuje a je rôzny od x_1, nie je kladný.

4. V rovine sú dané body A, S tak, že $a = |AS| > 0$. Ďalej sú dané kladné čísla b, c, pre ktoré platí $b < a < c$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby jeho vrcholy B, C mali od bodu S v uvedenom poradí vzdialenosti b, c. Udajte podmienky riešiteľnosti pomocou čísel a, b, c.

XIV. ročník 1964/65

1.* Ak je n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$5^{2n+1} . 2^{n+2} + 3^{n+2} . 2^{2n+1}$$

je deliteľné devätnástimi. Dokážte.

2. V rovine je daná úsečka AM dĺžky d. Ďalej je dané kladné číslo v. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ktorého výška kolmá k prepone má dĺžku v a ktorého odvesnu BC rozdeľuje bod M v pomere $|MB| : |MC| = 2 : 3$. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na čísla d, v.

3.* V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p ,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na číslo p.

4. Nádoba tvaru dutej kocky je umiestnená tak, že jej telesová uhlopriečka AP je v zvislej polohe, pričom platí $|AP| = 1$. V nádobe je voda. Časť telesovej uhlopriečky AP, ktorá je ponorená vo vode, má dĺžku x. Vyjadrite objem y vody v nádobe pomocou čísla x pre tieto dva prípady:

a/ $0 < x \leqq \frac{1}{3}$; b/ $\frac{1}{3} < x \leqq \frac{1}{2}$.

XV. ročník 1965/66

1. Je daná sústava nerovníc

$$y - x \geqq |x + 1| - |x - 1| ,$$

$$|y - x| - y + x \geqq 2 .$$

Znázornite riešenie každej z daných nerovníc v rovine a určte všetky riešenia úlohy.

2.* V rovine je daných n kružníc, z ktorých každé dve sa pretínajú práve v dvoch bodoch a žiadnym bodom neprechádzajú tri z týchto kružníc. Určte celkový počet častí, na ktoré delí daná sústava kružníc rovinu. /Napr. 3 kružnice uvedených vlastností delia rovinu na 8 častí./

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stredom S a stranou $s = |AB| = 1$. Ďalej sú dané body E, F ležiace v uvedenom poradí na priamkach BC, AD vo vnútri polroviny opačnej k CDA. Určte na základe výpočtu všetky také trojuholníky XYZ, ktorých vrcholy X, Y, Z ležia v uvedenom poradí na úsečkách CD, AD, BC a priamky XY, YZ, ZX prechádzajú v uvedenom poradí bodmi E, S, F.

4. V priestore sú umiestnené dva trojuholníky ABC a ABD so spoločnou stranou dĺžky c. Trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AB, trojuholník ABD je rovnostranný, roviny ABC, ABD majú odchýlku φ.

a/ Vyjadrite vzdialenosť bodov C, D pomocou dĺžok strán oboch trojuholníkov a čísla φ. Určte túto vzdialenosť konštrukciou.

b/ Nájdite takú odchýlku φ, pre ktorú štvorsten $ABCD$ má štyri zhodné hrany.

XVI. ročník 1966/67

1. Určte všetky také trojice komplexných čísel a, b, c, aby rovnica

$$x^4 - ax^3 - bx + c = 0$$

mala korene a, b, c.

2.* Ak pre dĺžky hrán štvorstena $ABCD$ platia vzťahy

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 ,$$

potom aspoň jedna z jeho stien je ostroúhlý trojuholník. Dokážte.

3. V tabuľke cyklických permutácií

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & \ldots, & n-1, & n \\ 2, & 3, & \ldots, & n, & 1 \\ \ldots & & & & \\ n, & 1, & \ldots, & n-2, & n-1 \end{array}$$

/$n \geq 2$/ vynásobíme každé číslo prvého riadku tým číslom k-teho riadku, ktoré je v rovnakom stĺpci. Všetky takto získané súčiny sčítame a hodnotu súčtu označíme s_k /napr. $s_2 = 1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1).n + n.1$/.

a/ Odvoďte vzťah, ktorý platí medzi s_{k-1} a s_k a z neho vzorec pre s_k.

b/ Zistite, pre ktoré k je pri danom n súčet s_k nejmenší, a vypočítajte tento súčet.

4. Do kružnice k je vpísaný ostrouhlý trojuholník ABC. Priamka m je vonkajšou priamkou kružnice k, je rovnobežná s BC a pretína polpriamku AB v bodě D.

a/ Ak bod X kružnice k leží vo vnútri toho oblúka BC, ktorý neobsahuje bod A a Y je priesečník priamok CX, m, potom body A, D, X, Y ležia na nejakej kružnici $\varkappa$. Dokážte.

b/ Vyšetrite vzájomnú polohu kružnice $\varkappa$ a priamky m v prípade, keď body C, D, X ležia v priamke.

XVII. ročník 1967/68

1. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $/n > 2/$ sú reálne čísla, z ktorých najviac jedno sa rovná nule. Riešte v obore reálnych čísel sústavu

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= a_1, \\ x_2x_3 &= a_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1}x_n &= a_{n-1}, \\ x_nx_1 &= a_n . \end{aligned}$$

2* Ak je n celé číslo, potom číslo

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

je celé. Dokážte a vyšetrite, pre ktoré n je a_n deliteľné troma.

3. V rovine sú dané dve zhodné úsečky AB, CD; priamky AB, CD sú rôznobežné. Vyšetrite množinu všetkých bodov S tejto vlastnosti: súmernosť podľa stredu S prevedie úsečku AB na úsečku súmerne združenú s úsečkou CD podľa vhodnej osi o.

4* V priestore sú dané štyri rôzne body A, B, C, D také, že $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$. Potom existuje guľová plocha, ktorá prechádza stredmi všetkých úsečiek AB, AC, AD, BD, BC, CD, Dokážte.

XVIII. ročník 1969/70

1* Určte všetky dvojice racionálnych čísel x, y, pre ktoré platí

$$(x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5} .$$

2. V rovine leží päť bodov O, A, B, C, D, pre vzdialenosti ktorých

platí $|OA| \leqq |OB| \leqq |OC| \leqq |OD|$. Dokážte, že pre obsah P konvexného štvoruholníka, ktorého vrcholmi sú body A, B, C, D, vždy platí

$$P \leqq \frac{1}{2}\left(|OA| + |OD|\right)\left(|OB| + |OC|\right)$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

3. Nech p je prvočíslo. Koľko existuje rôznych postupností prirodzených čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

takých, že pre každé přirodzené číslo $n = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1\ ?$$

4.* Určte všetky komplexné čísla z, ktoré vyhovujú nerovnici

$$\bigl|z - |z + |z||\bigr| - |z|\sqrt{3} \geqq 0$$

a zobrazte ich v rovine komplexných čísel.

5. V rovine sú dané priamky p, q na seba kolmé a bod A, ktorý neleží na žiadnej z nich. Označme vzdialenosti bodu X danej roviny od priamok p, q a bodu A v uvedenom poradí u, v, t. Určte množinu všetkých takých bodov X, pre ktoré platí $t = \sqrt{uv}$. /Návod: zvoľte osi daných dvoch rôznobežiek za osi súradníc./

6. Je daná guľová plocha s polomerom dĺžky 1. Na tejto guľovej ploche sú umiestnené zhodné kružnice $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ /$n \geqq 3$/ s polomerom r. Kružnica k_0 sa dotýka každej z kružníc k_i, $i = 1, 2, \dots, n$ a vzájomne sa dotýkajú taktiež každé dve kružnice k_i, k_{i+1}, pričom kružnice k_{n+1} a k_1 sú totožné. /Pod dotykom dvoch kružníc, ktoré neležia v rovine rozumieme prípad, keď obe kružnice majú jediný spoločný bod a v ňom spoločnú dotyčnicu./

a/ Nájdite vzťah, ktorý platí medzi číslami r, n.

b/ Zistite, pre ktoré n môže nastať popísaná situácia a vypočítajte príslušný polomer r.

XIX. ročník 1970/71.

1.* Nech pre prirodzené čísla a, b platí

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

kde p je prvočíslo väčšie než 2. Potom p je deliteľom čísla a. Dokážte.

2. Steny štvorstena $ABCD$ sú štyri navzájom podobné pravouhlé troj-

uholníky s pravými uhlami pri vrcholoch B, C. Najdlhšia hrana štvorstena má dĺžku 1.

a/ Zistite, či taký štvorsten existuje.

b/ Určte, ktorá jeho hrana je najdlhšia, ktorá hrana je najkratšia a akú má dĺžku.

3. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí

$$\frac{1}{x + \sqrt{p - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{p - x^2}} \geqq \frac{1}{p},$$

kde p je dané kladné číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti.

4. Po mori /jeho hladinu považujeme za rovinu/ plávali dve lode konštantnými rýchlosťami pri stálych kurzoch. Ich vzájomná vzdialenosť bola o 09,00 hod. 20 námorných míľ, o 09,35 hod. 15 míľ a o 09,55 hod. 13 míľ.

a/ Zistite, akou funkciou času je druhá mocnina vzdialenosti oboch lodí.

b/ Zistite, kedy boli obe lode k sebe najbližšie a aká bola v tom čase ich vzdialenosť.

5. V rovine sú dané dva rôzne body S, A tak, že $|SA| = 1$ a je dané reálne číslo k. Bod A otočíme okolo stredu S o orientovaný uhol veľkosti φ do polohy A', k bodu A' zostrojíme jeho obraz A'' v rovnoľahlosti so stredom S a s koeficientom rovnoľahlosti $\dfrac{1}{\cos\varphi - k\sin\varphi}$. Keď nadobúda φ všetky hodnoty, pre ktoré $\cos\varphi - k\sin\varphi \neq 0$, vyplnia body A'' priamku prechádzajúcu bodom A. Dokážte.

6.* Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\left[\log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4\cos^2 x) - 2\right] \geqq 0 .$$

XX. ročník 1971/72

1. Nech a, b, c sú dané reálne čísla. Dokážte, že existujú nezáporné čísla x, y, z nie všetky rovné nule, ktoré vyhovujú nerovniciam

$$cy - bz \geqq 0 ,$$

$$az - cx \geqq 0 ,$$

$$bx - ay \geqq 0 .$$

2.* K trojuholníku ABC sú na priamke AB zostrojené body $D \neq B$ a $E \neq A$ tak, že $|DA| = |BE| = |AB|$. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre dĺžky úsečiek $a = |BC|$, $b = |AC|$, aby existoval taký trojuholník ABC, že uhol DCE je pravý.

3. Sú dané prirodzené čísla $2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n$, kde $n \geq 96$. Ak ich ľubovoľným spôsobom rozdelíme na dve skupiny, potom vždy aspoň v jednej z nich možno nájsť dve /rôzne/ čísla a súčasne ich súčin. Dokážte. Nájdite príklad, ktorý ukazuje, že tvrdenie úlohy neplatí pre $n = 95$.

4. Dokážte, že existujú reálne čísla A, B tak, že rovnosť

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = A \operatorname{tg} n + Bn$$

platí pre každé prirodzené číslo n.

5. Je daný trojuholník ABC. Zvolíme bod X úsečky AB a bod $Y \neq X$ polpriamky AC a zostrojíme v rovine ABC rovnostranný trojuholník XYZ. Vyšetrite množinu M vrcholov Z všetkých takto zostrojených trojuholníkov XYZ, keď bod X prebieha úsečku AB a bod Y polpriamku AC. Vyšetrite tiež prípad, keď $\sphericalangle BAC = 60°$.

6. Je daný štvorsten $ABCD$ a ľubovoľný jeho vnútorný bod O. Bodom O vedieme priečky rovnobežné s hranami štvorstena, ktorých krajné body ležia v stenách štvorstena. Potom platí, že súčet pomerov dĺžok týchto priečok a dĺžok s nimi rovnobežných hrán štvorstena sa rovná 3. Dokážte.

XXI. ročník 1972/73

1. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{27}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

2.* Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Budiž X obraz bodu C v některém otočení kolem osy, které převede vrchol A ve vrchol B. Určete množinu všech takových bodů X, které leží na povrchu dané krychle.

3. Nechť pro posloupnost mnohočlenů

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

platí

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = x$$

a pro všechna $n \geq 1$ vztah

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = x\, P_n(x).$$

a/ Najděte mnohočlen

$$Q_n(x) = P_n^2(x) - x\,P_n(x)\,P_{n-1}(x) + P_{n-1}^2(x).$$

pro $n = 1971$.

b/ Vyjádřete mnohočlen $\left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]^2$ pomocí mnohočlenů $P_n(x)$ a $Q_n(x)$.

4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel a , která mají tuto vlastnost: Pro každé přirozené číslo n je $n^4 + a$ číslo složené. Udejte pět čísel a, která mají uvedenou vlastnost.

5.* Kolik dvojic navzájem disjunktních podmnožin má množina o n prvcích?

6. V rovině ρ jsou dány dva různé body A, S. Dále jsou dána kladná čísla d, ω; $\omega < 180°$. Sestrojte všechny body X roviny ρ , které mají tuto vlastnost: Při otočení v rovině ρ okolo středu S v kladném smyslu o úhel velikosti $\omega°$ přejde bod X do takového bodu X', že $XX' = d$ a bod A leží na úsečce XX'. Jakou podmínku musí splňovat čísla d, ω , aby takový bod X existoval?

XXII. ročník 1972/73

1. Platí-li pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 ,$$

je tento trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

2. Je dán čtyřstěn. Označme v_i /$i = 1, 2, 3, 4$/ jeho výšky a ρ_i /$i = 1, 2, 3, 4$/ poloměry kulových ploch vně vepsaných tomuto čtyřstěnu. Pak platí

$$2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right) = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} ;$$

dokažte.

3. Je dána posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ taková, že pro každé $k > 1$ platí $a_{k-1} + a_{k+1} \geqq 2a_k$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ označme

$$A_n = \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) .$$

Potom pro každé $n > 1$ platí také

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geqq 2\,A_n ;$$

dokažte.

4.* Je-li $n \geqq 2$ přirozené číslo, určete

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k}\right] .$$

5.* Je dána rovina ρ . Jsou-li P, Q dva body z ρ , označme P + Q střed dvojice P, Q a P.Q bod roviny ρ , který dostaneme otočením bodu Q okolo bodu P o 90^o v kladném smyslu.

a/ Jsou tyto operace komutativní?

b/ Jsou dány dva pevné body A, B roviny ρ . Rovnice

$$Y . X = (A . X) + B$$

určuje zobrazení $X \mapsto Y$. Určete, o jaké zobrazení jde.

c/ Sestrojte všecky samodružné body tohoto zobrazení.

6.* Ve čtverci, jehož strana má délku 50, je dána lomená čára L tak, že každý bod čtverce má od některého bodu lomené čáry L vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že délka čáry L je větší než 1248.

XXIII. ročník 1973/74

1. Je dána posloupnost kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ s touto vlastností: Pro každé $n \geqq 2$ platí

$$a_{n+1} \cdot a_{n-1} \geqq a_n^2 .$$

Označme

$$b_n = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} .$$

Potom platí pro každé $n \geqq 2$

$$b_{n+1} \cdot b_{n-1} \geqq b_n^2 ;$$

dokažte.

2.* Je daný trojúhelník ABC. Pro každý bod X trojúhelníka ABC označme m(X) nejmenší ze vzdáleností XA, XB, XC. Sestrojte všecky body X trojúhelníka ABC, pro které je m(X) maximální.

3. Nechť pro každé přirozené číslo m, které je v dekadickém zápise aspoň dvojciferné a má číslice navzájem různé, znamená f(m) součet všech přirozených čísel různých od m, které z čísla m dostaneme změnou pořadí jeho číslic /např. f(302) = 320 + 023 + 032 + 230 + + 203 = 808/. Najděte všechna přirozená čísla x, pro která platí

$$f(x) = 138012 .$$

4. Nechť M je množina všech polynomických funkcí f stupně nejvýše třetího

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

pro které platí

$$\forall x \in \langle -1, 1\rangle \; ; \; |f(x)| \leqq 1 .$$

Dokažte, že existuje kladné číslo k tak, že

$$\forall f \in M \; ; \qquad |a| \leqq k .$$

Určete nejmenší kladné číslo k této vlastnosti.

5. Je dána kružnice a do ní je vepsán šestiúhelník ABCDEF takový, že

$$AB = BC\,, \qquad CD = DE\,, \qquad EF = FA\,.$$

Dokažte, že obsah trojúhelníka ACE není větší než obsah trojúhelníka BDF. Kdy platí rovnost?

6. V rovině ρ je dán jednotkový čtverec Q. Označme Q_X čtverec, který vznikne otočením čtverce Q kolem bodu X roviny ρ o pravý úhel v kladném smyslu. Určete množinu všech takových bodů X roviny ρ, pro které je obsah sjednocení $Q \cup Q_X$ roven nejvýše 1,5 .

XXIV. ročník 1974/75

1. Je-li T ostroúhlý trojúhelník o obsahu 1, pak existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož obsah nepřevyšuje $\sqrt{3}$ a který trojúhelník T obsahuje. Dokažte.

2.* Dokažte, že soustava rovnic

$$[x]^2 + [y] = 0 \qquad 3x + y = 2$$

má nekonečně mnoho řešení a že pro všechna její řešení platí

$$0 < x < 4\,, \qquad -9 \leqq y \leqq 1\,.$$

Přitom $[\alpha]$ /celá část z α/ značí celé číslo, pro které platí

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leqq \alpha\,.$$

3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
x_1(x_6 + x_2) &= x_3 + x_5\,,\\
x_2(x_1 + x_3) &= x_4 + x_6\,,\\
x_3(x_2 + x_4) &= x_5 + x_1\,,\\
x_4(x_3 + x_5) &= x_6 + x_2\,,\\
x_5(x_4 + x_6) &= x_1 + x_3\,,\\
x_6(x_5 + x_1) &= x_2 + x_4
\end{aligned}$$

s neznámými $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

4.* Najděte všecky takové hodnoty parametru p, aby rovnice

$$|x - 2| + |y - 3| + y = p$$

byla rovnicí nějaké polopřímky v rovině x, y.

5. Najděte množinu vrcholů A všech rovnoramenných trojúhelníků ABC s hlavním vrcholem B, jejichž strana BC je obsažena v daném čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

6.* Nechť M je množina uspořádaných dvojic (x, y) reálných čísel těchto vlastností:

1. Existuje dvojice (a, b) taková, že $ab(a - b) \neq 0$.

2. Jestliže $(x_1, y_1) \in M$, $(x_2, y_2) \in M$ a c je reálné číslo, potom také $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in M$, $(cx_1, cy_1) \in M$, $(x_1x_2, y_1y_2) \in M$. Dokažte, že M obsahuje všecky uspořádané dvojice reálných čísel.

XXV. ročník 1975/76

1.* Určete všecky trojice celých čísel x, y, z, pro které platí

$$x^2 + y^2 = 3z^2 .$$

2. Dokažte, že pro každé reálné číslo x z intervalu $0 \leq x \leq 1$ platí

$$\frac{(1 - x)x^2}{(1 + x)^3} < \frac{1}{25} .$$

3. V dané polorovině s hranicí p jsou dány dva body M, N v různých vzdálenostech od přímky p. Sestrojte lichoběžník $MNPQ$, jehož vrcholy P, Q leží na přímce p a jehož obsah je roven obsahu čtverce o straně MN.

4. Najděte řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n &= 2a \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 - \dots - x_n &= 4a \\
-x_1 - x_2 + 7x_3 - \dots - x_n &= 8a \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (2^n - 1)x_n &= 2^n a
\end{aligned}$$

s neznámými $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a reálným parametrem a.

5. Je-li konvexní mnohoúhelník s obvodem o_1 obsažen v konvexním mnohoúhelníku s obvodem o_2, pak platí $o_1 \leq o_2$. Dokažte.

6.* V prostoru jsou dány poloroviny π a π' se společnou hraniční přímkou p tak, že neleží v jedné rovině. V polorovině π jsou umístěny body A, B, C, D a v polorovině π' body A', B', C', D' tak, že žádný z nich neleží na přímce p, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, a přitom body A, B, C a D' jsou vrcholy čtyřstěnu. Dokažte, že také A', B', C' a D jsou vrcholy čtyřstěnu a že oba tyto čtyřstěny mají stejný objem.

XXVI. ročník 1976/77

1.* V kocke s hranou veľkosti 1 je daných 2050 bodov. Dokážte, že medzi nimi existuje päť takých, ktoré ležia vo vnútri gule s polomerom $\frac{1}{9}$.

2. Sú dané kladné čísla p a q. Zostrojte pravouhlý rovnobežník $ABCD$ tak, aby platilo $|AE| = p$, $|AF| = q$, kde E a F sú v uvedenom poradí stredy strán BC a CD. Udajte podmienky riešiteľnosti.

3. Vyšetrite a v Gaussovej rovine komplexných čísel graficky znázornite množinu hodnôt, ktoré môže nadobúdať súčet $S = Z + W$ dvoch komplexných jednotiek Z a W, pre ktoré zároveň platí:

$$\operatorname{Im} Z \geqq 0, \qquad \operatorname{Re} W \geqq 0.$$

/Pozn.: $\operatorname{Im} Z$ znamená imaginárnu časť čísla Z, $\operatorname{Re} W$ vyjadruje reálnu časť čísla W./

4* Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$x + y + z = 3,$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12},$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 45.$$

5* Na priamke sú dané navzájom rôzne body $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Každý z nich označíme práve jednou zo štyroch farieb tak, aby sme každú farbu použili. Dokážte, že potom v danej priamke existuje úsečka, ktorá obsahuje práve po jednom bode niektorých dvoch z uvedených farieb a aspoň po jednom bode oboch zostávajúcich farieb.

6. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Stred steny $ABCD$ označme S. Určte všetky body X, ktoré majú súčasne tieto dve vlastnosti:

1. X patrí niektorej hrane danej kocky;
2. štvorsteny $ABDX$ a $CB'SX$ majú objemy rovnako veľké.

XXVII. ročník 1977/78

1. Nech n je prirodzené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)} \geqq$$
$$\geqq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}.$$

Ďalej dokážte, že rovnosť nastane práve vtedy, keď

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

2. Nájdite /aspoň jednu/ dvojicu čísel k a q tak, aby pre všetky $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platilo

$$\left|\sqrt{1-x^2} - kx - q\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) .$$

3. Nech α, β, γ sú vnútorné uhly trojuholníka. Vyšetrujme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x \cos\beta &+ \frac{1}{z}\cos\alpha &= 1 , \\ y \cos\gamma &+ \frac{1}{x}\cos\beta &= 1 , \\ z \cos\alpha &+ \frac{1}{y}\cos\gamma &= 1 . \end{aligned}$$

a/ Ukážte, že danej sústave vyhovujú čísla $x = \sin\alpha/\sin\gamma$, $y = \sin\beta/\sin\alpha$, $z = \sin\gamma/\sin\beta$;

b/ nájdite všetky riešenia tejto sústavy.

4.* Existuje štvorsten ABCD, v ktorom súčet dĺžok hrán AB, BC, CD a AD je 12 cm a ktorého objem je väčší alebo rovný $2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$?

5.* Je daný rovnoramenný lichobežník ABCD. Nech A', B', C', D' sú v uvedenom poradí stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, CAD, ABD, ABC. Potom body A', B', C', D' sú vrcholmi pravouhlého rovnobežníka. Dokážte.

6. Dokážte, že číslo

$$p_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$$

je prirodzené pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ďalej dokážte, že pre každé nepárne n je $p_n = r^2$ a pre každé párne n je $p_n = 5\,s^2$, kde r, s sú vhodné prirodzené čísla.

XXVIII. ročník 1978/79

1. Nech n je dané prirodzené číslo. Určte počet usporiadaných trojíc x, y, z nezáporných celých čísel, ktoré vyhovujú rovnici

$$x + 2y + 5z = 10\,n .$$

2. Je daný kváder Q s rozmermi a, b, c, $a < b < c$. Nájdite veľkosť hrany kocky K, ktorá má s daným kvádrom rovnobežné steny a spoločný stred tak, aby objem rozdielu množín $Q \cup K$ a $Q \cap K$ bol minimálny.

3.* Ak v štvoruholníku ABCD, ktorého vrcholy ležia na kružnici s polomerom 1 platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geq 4$, potom ABCD je štvorec. Dokážte. /Môžete použiť Ptolemaiov vzorec $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$./

4.* Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo. Nájdite všetky n-tice reálnych čísel $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, pre ktoré platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{n-i+1} .$$

5. Je daný trojuholník ABC s veľkosťami strán $a \geqq b \geqq c$. Medzi všetkými dvojicami bodov X, Y na hranici trojuholníka ABC, ktoré delia túto hranicu na dve časti rovnakej dĺžky, nájdite všetky také, pre ktoré je vzdialenosť $|XY|$ maximálna.

6*. Nájdite všetky prirodzené čísla n, $n \leqq 10^7$, pre ktoré platí: ak prirodzené číslo m, $1 < m < n$, je nesúdeliteľné s číslom n, potom m je prvočíslo.

XXIX. ročník 1979/80

1. Dokážte, že pre každé celé nezáporné číslo k je súčin
$$(k + 1)(k + 2) \dots (k + 1980)$$
deliteľný číslom 1980^{197}.

2*. Nájdite veľkosti strán rovnoramenného lichobežníka, ktorého najdlhšia strana meria 13 cm, obvod 28 cm a obsah 27 cm^2. Existuje taký lichobežník, ak predpíšeme obsah 27,001 cm^2?

3*. Množina M vznikla z roviny vybratím troch bodov A, B, C, ktoré sú vrcholmi trojuholníka. Aký je najmenší počet konvexných množín, ktorých zjednotením je množina M?

4. Nech $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sú reálne čísla,
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| ,$$
x ľubovoľné reálne číslo, n číslo párne. Nájdite minimum funkcie f.

5. Riešte v obore celých čísel sústavu nerovníc
$$3x^2 + 2yz \leqq 1 + y^2 ,$$
$$3y^2 + 2zx \leqq 1 + z^2 ,$$
$$3z^2 + 2xy \leqq 1 + x^2 .$$

6*. Nech M je množina piatich bodov v priestore, z ktorých žiadne štyri neležia v rovine. Nech je ďalej R množina siedmich rovín s vlastnosťami:

a/ Každá rovina z množiny R obsahuje aspoň jeden bod množiny M.

b/ Žiadny z bodov množiny M neleží v piatich rovinách množiny R.

Potom existujú také dva rôzne body P, Q, $P \in M$, $Q \in M$, že priamka PQ nie je priesečnicou žiadnych dvoch rovín z množiny R. Dokážte.