

# [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

---

Andrzej Makowski

Poznámky o Kahanoffových nerovnostiach

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu.

~~Terms of use~~. Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 162–164.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405350>

provides access to digitized documents strictly for personal use.

Each copy of any part of this document must contain these

*Terms of use.*



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project DML-CZ: *The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

---

**POZNÁMKY**  
**O KAHANOFFOVÝCH NEROVNOSTIACH**

ANDRZEJ MAKOWSKI

B. Kahanoff v článku [1] dokázal nasledujúce nerovnosti:

$$n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2} > \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{2n-2}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n-2} > \left(\frac{2n-2}{2n-3}\right)^{2n-2}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}, \quad (5)$$

ktoré platia pre každé prirodzené číslo  $n > 2$ .

Kahanoff v dôkaze používa diferenciálny počet, napríklad v dôkaze nerovnosti (1) ukazuje, že funkcia

$$f(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2(n-1)}}$$

( $n$  je prirodzené číslo  $> 2$ ) nadobúda v  $[0, +\infty)$  jediné maximum pre  $x_0 = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2(n-1)}$ .

Pretože  $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , máme  $f(x_0) > f(1)$ .

Posledná nerovnosť po úprave dáva nerovnosť (1).

Analogicky dokazuje Kahanoff nerovnosti (2) — (5).

Druhý dôkaz nerovnosti (1) dostávame užitím nerovnosti pre geometrický a aritmetický priemer (pozri [2], str. 12—13):

Pre kladné čísla  $x_1, x_2, \dots, x_k$  platí nerovnosť

$$\sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \leq \frac{1}{k} (x_1 + x_2 + \dots + x_k), \quad (*)$$

v ktorej nastáva rovnosť iba pre  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$ .

Pre  $k = 2n - 2$ ,  $n \geq 3$ ,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n-1}{n}$ ,

$x_{n+1} = \dots = x_{2n-2} = \frac{n-1}{n-2}$  z tejto nerovnosti dostaneme

$$\left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n-2} \right)^{n-2} \right]^{1/(2n-2)} < \frac{1}{2n-2} (n-1 + n-1) = 1,$$

odkiaľ ľahko vyplýva (1).

Nech  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ , potom nerovnosti (2) — (5) môžeme napísať v tvare

$$a_{n-2} < a_{2n-2}, \quad (2')$$

$$b_{n-2} < b_{2n-2}, \quad (3')$$

$$b_n < b_{n+1}, \quad (4')$$

$$a_n < a_{n+1}. \quad (5')$$

V knížce [2] (str. 15) je daný jednoduchý dôkaz nerovnosti (4') i (5'). Do nerovnosti (\*) dosadíme  $k = n + 1$ ,  $x_1 = \dots = x_n = 1 \pm \frac{1}{n}$ ,  $x_{n+1} = 1$ . Vidíme, že nerovnosti (2') a (3') vyplývajú z nerovnosti (5') a (4').

*Literatúra :*

- [1] *Boris Kahanoff*: Certaines inégalités des nombres, Bull. Inst. Égypte 29 (1948) 323—327.
- [2] *P. P. Korovkin*: Nėravenstva (Populjarnyje lekciij po matematike, vyp. 5, izd. 2, GITTL, Moskva 1956.