Andrzej Makowski

Poznámky o Kahanoffových nerovnostiach

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. Sborník. (Slovak). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 162–164.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405350

POZNÁMKY O KAHANOFFOVÝCH NEROVNOSTIACH

ANDRZEJ MĄKOWSKI

B. Kahanoff v článku [1] dokázal nasledujúce nerovnosti:

$$n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2} > \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{2n-2}, \tag{2}$$

$$\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n-2} > \left(\frac{2n-2}{2n-3}\right)^{2n-2}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}, \tag{5}$$

ktoré platia pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Kahanoff v dôkaze používa diferenciálny počet, napríklad v dôkaze nerovnosti (1) ukazuje, že funkcia

$$f(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2(n-1)}}$$

(n je prirodzené číslo > 2) nadobúda v $[0, +\infty)$ jediné maximum pre $x_0 = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2(n-1)}$.

Pretože $f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, máme $f(x_0) > f(1)$.
Posledná nerovnosť po úprave dáva nerovnosť (1).

Analogicky dokazuje Kahanoff nerovnosti (2) — (5).
Druhý dôkaz nerovnosti (1) dostávame užitím nerovnosti pre geometrický a aritmetický priemer (pozri [2], str. 12—13):
Pre kladné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ platí nerovnosť

$$\sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k} \leqq \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k), \tag{*}$$

v ktorej nastáva rovnosť iba pre $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.
Pre $k = 2n - 2$, $n \geqq 3$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $x_{n+1} = \ldots = x_{2n-2} = \dfrac{n-1}{n-2}$ z tejto nerovnosti dostaneme

$$\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-2}\right]^{1/(2n-2)} < \frac{1}{2n-2}(n-1+n-1) = 1,$$

odkiaľ ľahko vyplýva (1).

Nech $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, potom nerovnosti (2) — (5) môžeme napísať v tvare

$$a_{n-2} < a_{2n-2}, \tag{2'}$$

$$b_{n-2} < b_{2n-2}, \tag{3'}$$

$$b_n < b_{n+1}, \tag{4'}$$

$$a_n < a_{n+1}. \tag{5'}$$

V knížke [2] (str. 15) je daný jednoduchý dôkaz nerovnosti (4′) i (5′). Do nerovnosti (*) dosadíme $k = n + 1$, $x_1 = \ldots = x_n = 1 \pm \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = 1$. Vidíme, že nerovnosti (2′) a (3′) vyplývajú z nerovnosti (5′) a (4′).

Literatúra:

[1] *Boris Kahanoff:* Certaines inégalités des nombres, Bull. Inst. Égypte *29* (1948) 323—327.

[2] *P. P. Korovkin:* Něravenstva (Populjarnyje lekcii po matěmatike, vyp. 5, izd. 2, GITTL, Moskva 1956.