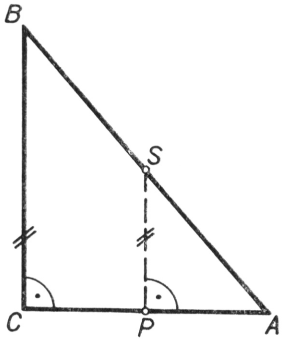
64. Je dána úsečka SP délky 31 mm; bod S má být středem přepony AB a bod P středem odvěsny AC pravoúhlého trojúhelníka ABC.

a) Sestrojte tento trojúhelník, je-li $d(AB) = 98$ mm.

b) Zjistěte podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 102

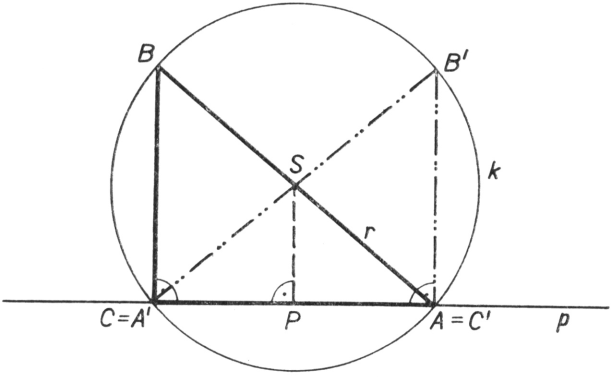
Řešení. a) **Rozbor.** Úsečka SP je zřejmě střední příčkou trojúhelníka ABC s pravým úhlem $\sphericalangle ACB$ (obr. 102). Platí tedy

$$d(BC) = 2 \, . \, d(SP), \; BC \parallel SP.$$

Proto i úhel $\sphericalangle SPA$ je pravý; protože bod S je středem strany AB, je $d(SA) = \dfrac{1}{2}\, d(AB)$ a pomocný trojúhelník APS je sestrojitelný podle věty *Ssu*.

Protože z textu úlohy vyplývá, že jde o úlohu polohovou (»Je dána úsečka SP ...«), postupujeme při **konstrukci** takto (obr. 103):

1. Sestrojíme danou úsečku SP délky 31 mm.
2. Bodem P vedeme kolmici p k přímce SP.
3. Kolem bodu S opíšeme kružnici k s poloměrem $r = d(SA) = \frac{1}{2}d(AB) = 49$ mm.
4. Průsečík kružnice k s přímkou p je hledaný vrchol A.
5. Bod B sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce SA tak, že $SB \cong SA$.
6. Bod C sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce PA tak, že $PC \cong PA$.



Obr. 103

Zkouška. Dokážeme, že trojúhelník ABC je hledaným trojúhelníkem. Z bodů 5 a 6 konstrukce plyne, že body S, P jsou po řadě středy stran AB, AC. Úhel $\sphericalangle BCA$ je pravý, neboť podle vlastností střední příčky trojúhelníka je $BC \parallel SP \perp p$.

Protože poloměr $d(SA) = 49$ mm je větší než vzdálenost středu S kružnice k od přímky p, tj. než $d(SP) = 31$ mm, dostaneme právě dva body A, A', z nichž každý vede k jednomu řešení úlohy. Úloha má tedy v případě a), tj. pro $d(AB) = 98$ mm, právě dvě řešení.

b) Z konstrukce je zřejmé, že úloha má právě dvě řešení v případě, že SA je větší než SP, čili

$$AB > 2 \,.\, SP.$$

Jinak úloha nemá řešení.

65. Je dán trojúhelník ABC.

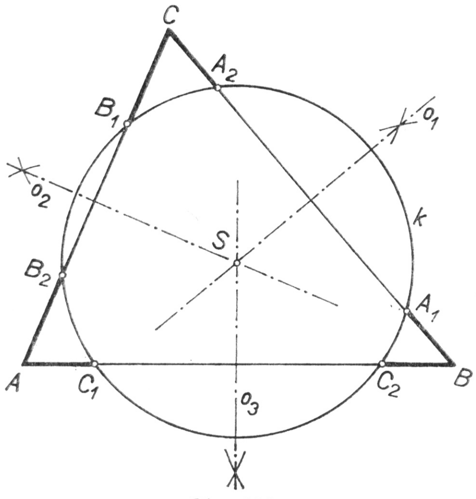
Sestrojte střed S kružnice k, která protíná strany trojúhelníka AB, BC, CA po řadě ve dvojicích bodů (různých nebo splývajících)

$$C_1, C_2;\ A_1, A_2;\ B_1, B_2$$

tak, že platí

$$AC_1 \cong BC_2,\ BA_1 \cong CA_2,\ CB_1 \cong AB_2.$$

Stanovte podmínky pro poloměr kružnice k.



Obr. 104

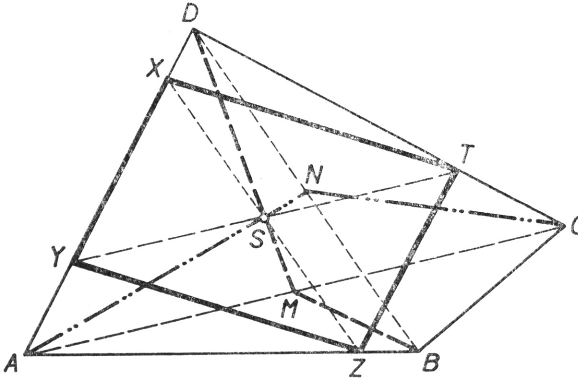
Řešení. Rozbor. Předpokládáme, že kružnice $k = (S; r)$ na obr. 104 má požadované vlastnosti. Jsou-li C_1, C_2 dva různé body, pak bod S leží na ose o_3 této úsečky; protože však $AC_1 \cong$ $\cong BC_2$, je o_3 osou i úsečky AB. Platí-li $C_1 = C_2$, pak AB je tečnou kružnice k a rovněž platí, že bod S leží na ose úsečky AB. Obdobně dostaneme, že bod S leží na ose o_1 úsečky BC a na ose o_2 úsečky CA. Z toho plyne velmi jednoduchá **konstrukce:**

1. Bod S sestrojíme jako střed kružnice trojúhelníku ABC opsané.

2. Poloměr r hledané kružnice musí být větší nebo roven největší ze vzdáleností bodu S od stran trojúhelníka a musí být menší nebo roven poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Zkoušku vlastností kružnice k požadovaných textem úlohy provedeme obrácením úvahy z rozboru.

66. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany mají délky $d(AB) = 70$ mm, $d(BC) = 35$ mm, $d(CD) = 75$ mm, $d(DA) = 65$ mm a úhlopříčka má délku $d(BD) = 70$ mm. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ a pak sestrojte rovnoběžník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na obvodu čtyřúhelníka $ABCD$ a jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s úhlopříčkami daného čtyřúhelníka. Sestrojte nejprve střed hledaného rovnoběžníka.



Obr. 105

Řešení. Sestrojíme nejprve trojúhelník ABD, a pak v polorovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD (obr. 105), a tak získáme daný čtyřúhelník $ABCD$.

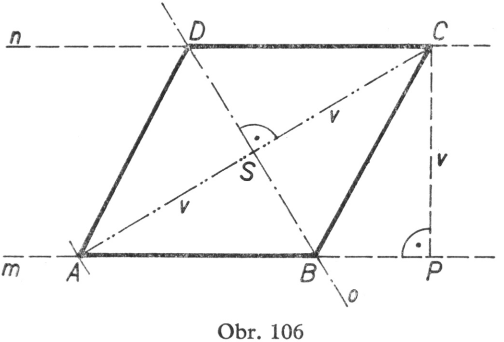
Rozbor vlastní úlohy. Střed S hledaného rovnoběžníka náleží dvěma množinám bodů: množině Γ_1 středů všech příček čtyřúhelníka $ABCD$ rovnoběžných s přímkou AC, a množině Γ_2 středů všech příček čtyřúhelníka $ABCD$ rovnoběžných s přímkou BD. Množina Γ_1 je sjednocení těžnic BM, DM trojúhelníků ACB, ACD (bez bodů B, D), množina Γ_2 je sjednocení těžnic AN, CN trojúhelníků BDA, BDC (bez bodů A, C). Body M, N jsou tedy po řadě středy úhlopříček AC, BD.

Z toho už vyplývá jednoduchá **konstrukce:** Množiny Γ_1, Γ_2 mají jediný společný bod; je to průsečík S těžnic AN, DM. Bodem S vedeme rovnoběžky s přímkami AC, BD; ty protnou obvod čtyřúhelníka $ABCD$ v bodech X, Y, Z, T, které jsou vrcholy hledaného rovnoběžníka.

Rozbor i zkouška konstrukce vyplývá z věty: Konvexní čtyřúhelník je rovnoběžníkem právě tehdy, když se jeho úhlopříčky navzájem půlí. (Takto je možno i rovnoběžník definovat.)

Z vrcholů X, Y, Z, T výsledného rovnoběžníka leží X, Y na straně AD, Z na straně AB a T na straně CD.

67. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána délka jeho výšky $v = 3$ cm a jestliže úhlopříčka AC má délku $2v$.



Obr. 106

Řešení. Rozbor. Na obr. 106 je znázorněn hledaný kosočtverec. Vzdálenost rovnoběžek AB a CD je v, vzdálenost $d(AC) = 2v$. Úsečka BD je kolmá na úsečku AC a půlí ji.

Z toho plyne **konstrukce:**

1. Sestrojíme dvě rovnoběžné přímky m, n ve vzdálenosti $v = 3$ cm.
2. Na přímce m zvolíme bod A a opíšeme kružnici $k = (A; 2v)$.
3. Průsečík n a k je bod C.
4. Osa o úsečky AC protne přímky m, n po řadě v bodech B, D.

Zkouška. Sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, protože se jeho úhlopříčky půlí, a protože jsou na sebe kolmé, je to kosočtverec nebo čtverec. Čtverec to nemůže být, neboť v tomto případě (obr. 107) by pravoúhlý trojúhelník BSC musel být rovnostranný, tj. platilo by

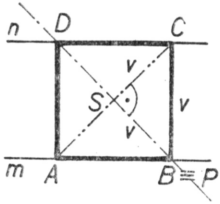
$$d(BS) = d(SC) = d(CB) = v. \tag{1}$$

Pro úhlopříčku čtverce však platí $d(AC) = 2 . d(SC) = v\sqrt{2}$ čili

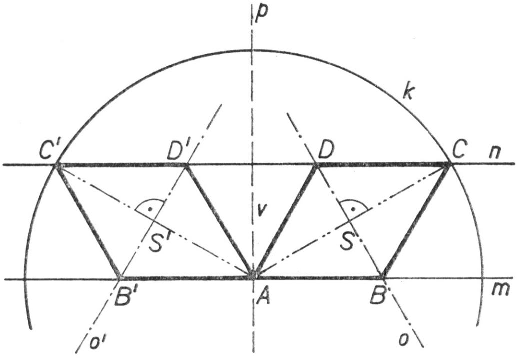
$$d(BS) = d(SC) = v\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

Protože vztahy (1) a (2) si neodpovídají, nemůže čtverec konstrukcí vzniknout. Sestrojený čtyřúhelník je tedy kosočtverec. Jeho výška je $v = 3$ cm podle 1. bodu konstrukce a úhlopříčka AC má délku $2v$ podle 2. a 3. bodu konstrukce.

Protože vzdálenost středu A kružnice k od přímky n je $v = 3$ cm a je menší než poloměr $2v = 6$ cm kružnice, dostaneme v konstrukci (viz obr. 108) dva různé body C a C', které vedou k dvěma shodným výsledkům úlohy (souměrně sdruženým podle přímky p procházející bodem A kolmo k oběma rovnoběžkám m, n). Dostáváme tedy jediné řešení úlohy.

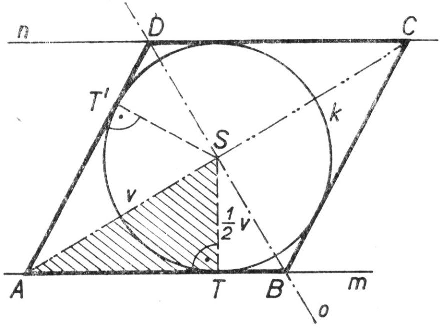


Obr. 107



Obr. 108

Jiné řešení. Rozbor (obr. 109). Průměr kružnice *k* vepsané kosočtverci *ABCD* je v našem případě roven výšce $v = 3$ cm kosočtverce. Označme dotykový bod kružnice *k* na straně *AB* písmenem *T*, na straně *AD* písmenem *T'*. Ve vyšrafovaném pravoúhlém trojúhelníku *ATS* je známa přepona *AS* délky v a odvěsna *ST* délky $\frac{1}{2}v$; je tedy tento trojúhelník podle věty *Ssu* sestrojitelný.



Obr. 109

Konstrukce: 1. Sestrojíme trojúhelník ATS podle *Ssu*.

2. Na prodloužení úsečky AS za bod S sestrojíme bod C tak, že $d(SC) = d(AS) = v$.

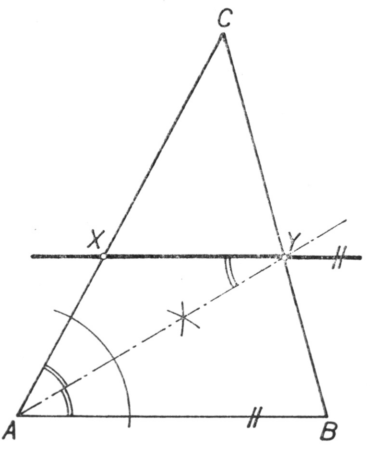
3. Bodem C vedeme přímku $n \parallel AT$.

4. Osa o úsečky AC protne přímky AT, n po řadě v bodech B, D.

Zkouška tohoto řešení úlohy odpovídá prvnímu odstavci zkoušky prvního řešení. Protože jsme v druhé konstrukci vyšli přímo z trojúhelníka určeného podle věty *Ssu*, odpadla úvaha o dalších výsledcích konstrukce. V druhém případě má každý krok konstrukce jediný výsledek, a úloha má tedy jediné řešení - kosočtverec. Případ čtverce nastat nemůže, neboť pomocný trojúhelník ATS by musel být rovnoramenný. To však zde není splněno.

68. Narýsujte trojúhelník ABC. Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo

$$XY \parallel AB, AX \cong XY.$$



Obr. 110

Řešení. V **rozboru** předpokládáme (viz obr. 110), že body X, Y splňují podmínky úlohy, tj.

$$XY \parallel AB,\ AX \cong XY.$$

Proto je trojúhelník AYX rovnoramenný; platí

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA. \tag{1}$$

Protože přímka AY protíná rovnoběžky AB, XY, platí pro střídavé úhly

$$\sphericalangle XYA \cong \sphericalangle YAB. \tag{2}$$

Ze vztahů (1) a (2) vyplývá

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle YAB, \tag{3}$$

takže polopřímka AY je osou úhlu $\sphericalangle XAB \cong \sphericalangle CAB$.

Na základě tohoto výsledku dostaneme již **konstrukci** bodů X, Y:

1. Osa úhlu CAB protne stranu BC v hledaném bodě Y.
2. Rovnoběžka bodem Y s přímkou AB protne úsečku AC v bodě X.

Zkouška. Z 2. bodu konstrukce je zřejmé, že $XY \parallel AB$. Dokážeme, že $AX \cong XY$.

Podle 1. bodu konstrukce je polopřímka AY osou úhlu CAB, a platí tedy (3). Z 2. kroku konstrukce vyplývá platnost vztahu (2) a platí tedy celkem

$$\sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA.$$

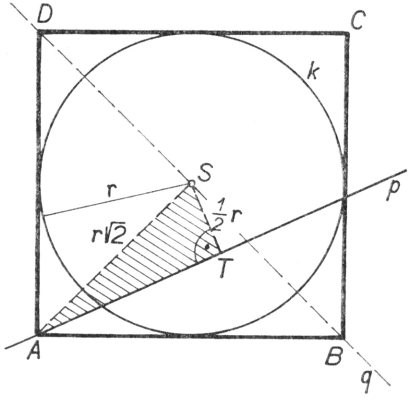
Trojúhelník AXY je tedy rovnoramenný se základnou AY a s ramenem $AX \cong XY$, což jsme měli dokázat.

Každý z kroků konstrukce vede k jedinému částečnému výsledku, takže úloha má jediné řešení.

Poznámka. Tvar trojúhelníka ABC má sice vliv např. na vzájemný poměr úseček AX a CX apod. v dané úloze (říkáme též, že *tvar* trojúhelníka je »*parametrem úlohy*«), ale protože pro kterýkoli trojúhelník jsou kroky konstrukce proveditelné týmž způsobem, neovlivňuje tvar trojúhelníka existenci a počet řešení, a proto diskusi neprovádíme. Platí tedy řešení pro libovolný trojúhelník ABC.

69. Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2} r$ od bodu S.

Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k, jehož vrchol A leží na přímce p. Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.

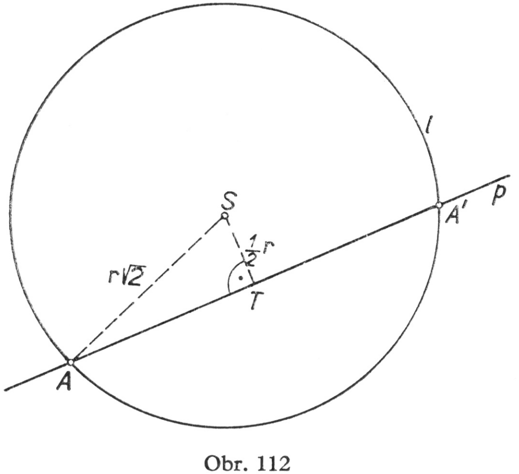


Obr. 111

Řešení. Rozbor (obr. 111). Poloměr r kružnice vepsané čtverci je roven polovině jeho strany, tj. $d(AB) = a = \mathbf{2r}$. Vzdálenost AS je $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ čili $d(AS) = r\sqrt{2}$ je délka sestrojitelné úsečky. Vrchol A má tedy ležet na přímce p a současně na kružnici $l = (S;\ r\sqrt{2})$. Existuje-li společný bod přímky p a kružnice l, je to bod A; pak je známa polovina AS úhlopříčky AC. Protože úhlopříčky čtverce jsou shodné a na sebe kolmé, můžeme už přikročit ke **konstrukci**:

1. Sestrojíme danou kružnici k a přímku p.

2. Pomocně sestrojíme úsečku délky $r\sqrt{2}$ (je to úhlopříčka pomocného čtverce o straně r).
3. Opíšeme kružnici $l = (S; r\sqrt{2})$.
4. Průsečík přímky p a kružnice l je bod A.
5. Na prodloužení úsečky AS za bod S sestrojíme bod C tak, že $SC \cong SA$.
6. Sestrojíme přímku $q \perp AC$ bodem S a na ní body $B \neq D$ tak, že $SB \cong SD \cong SA$.



Obr. 112

Zkouška je jednoduchá; z 5. a 6. bodu konstrukce ihned plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. Bod A leží na přímce p (viz bod 4). Protože úhlopříčka sestrojeného čtverce má délku $2r\sqrt{2}$, je jeho strana $2r$. Jemu vepsaná kružnice má týž střed S a týž poloměr r jako kružnice daná.

Zbývá určit počet řešení. Kružnice l protne přímku p vždy ve dvou různých bodech A, A', protože $AS > ST$, tj. $r\sqrt{2} > \frac{1}{2}r$ (obr. 112). Každý z bodů A, A' vede podle naší konstrukce k jednomu čtverci; každý z čtverců má za svůj střed bod S. Je tedy otázka, zda tyto čtverce splynou, nebo jsou různé. Jde totiž o polohovou úlohu, v níž každý z výsledků konstrukce, který splňuje podmínky úlohy, je řešením úlohy. Oba čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ by splynuly, kdyby bod A' byl některým z vrcholů čtverce $ABCD$. Avšak $A' \neq A$, neboť přímka p je sečnou kružnice l a také $A' \neq C$, neboť p neprochází bodem S. Možnosti $A' = B$ nebo $A' = D$ jsou také vyloučeny, neboť úhel $\sphericalangle ASA'$ není pravý, což vyplývá z délek stran trojúhelníků ATS a $A'TS$. Je totiž

$$d(AT) = d(A'T) = \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}r\sqrt{7} \neq \frac{r}{2}.$$

Proto $AT \neq ST$ a $\sphericalangle AST \neq 45°$.

Úloha má tedy vždy dvě různá řešení.

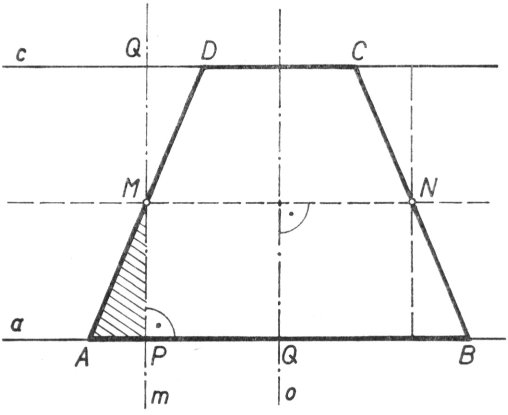
70. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho střední příčky $d(MN) = 6$ cm, výšky $v = 5$ cm a ramena $d(AD) = 6$ cm.

Řešení. Rozbor. Na obr. 113 je znázorněno předpokládané řešení: rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s osou souměrnosti o. Bod M je středem ramena AD, bod N středem ramena BC. Kolmice vedená bodem M k přímkám pásu $AB \parallel CD$ spoluvytvoří se stranami lichoběžníka dva shodné pravoúhlé trojúhelníky APM a DQM. Tyto trojúhelníky jsou z podmínek úlohy sestrojitelné podle věty Ssu (např. $d(PM) = \frac{1}{2} v, d(AM) = \frac{1}{2} d(AD)$). Odtud již plyne **konstrukce** (obr. 114).

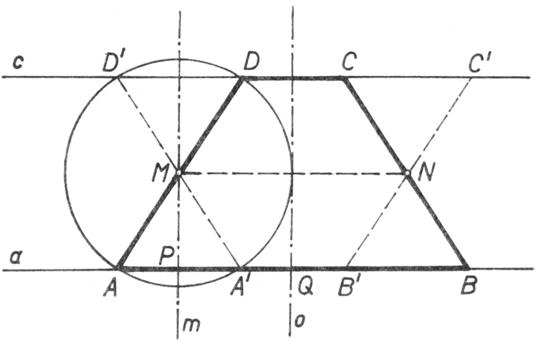
1. Sestrojíme střední příčku MN délky 6 cm.
2. Bodem M vedeme přímku $m \perp MN$.
3. Sestrojíme rovnoběžky a, c s přímkou MN ve vzdálenosti $\frac{1}{2} v = 2{,}5$ cm.
4. Průsečík přímek m, a je bod P.
5. Kolem bodu M opíšeme kružnici k s poloměrem $d(AM) = \frac{1}{2} d(AD) = 3$ cm.
6. Protože $AM > MP$, protne kružnice k každou z přímek a, c ve dvou bodech; z nich vybereme dvojice bodů A, D, popř. A', D' tak, aby tvořily průměr kružnice k a zároveň rameno lichoběžníka.
7. Pomocí osové souměrnosti podle osy o úsečky MN doplníme vrcholy B, C, popř. B', C'.

Zkouška. Za podmínky $AM > MP$, tj. $AD > v$, vzniknou dva lichoběžníky $ABCD$, $A'B'C'D'$. Každý z nich splňuje podmínky úlohy. Např. lichoběžník $ABCD$ má střední příčku MN délky 6 cm, jak plyne z 1. a 6. bodu konstrukce. Výška lichoběžníka má velikost $v = 5$ cm podle 3. bodu. Délka ramen AD a BC je 6 cm podle 5. a 6. bodu konstrukce.

Lichoběžník $A'B'C'D'$ má obdobně požadované vlastnosti až na to, že jsou prohozeny velikosti obou základen ($AB \cong C'D'$, $CD \cong A'B'$). Úloha má tedy dvě různá řešení.



Obr. 113



Obr. 114

Poznámka. Úloha byla řešena pro rozměry dané v úloze. Připustíme-li však, že rozměry jsou libovolné (tj. jsou zadány parametricky), vznikne zajímavá diskuse:

Za podmínky $AM > MP$, tj.

$$d(AD) > v, \tag{1}$$

vzniknou dva lichoběžníky $ABCD$, $A'B'C'D'$ pouze tehdy, je-li splněna ještě další podmínka

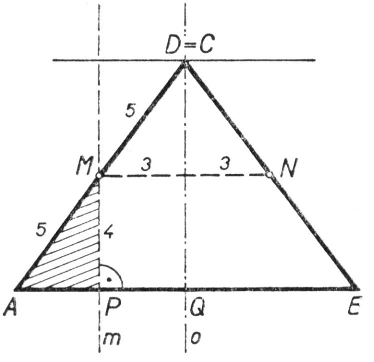
$$d(MN) > \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}. \tag{2}$$

Podmínka (1) je zřejmě pro konstrukci podmínkou nutnou; při jejím splnění je možno trojúhelník APM vždy sestrojit. Tato podmínka však při konstrukci lichoběžníků nestačí. Zvolíme-li totiž např. $d(AD) = 10$ cm, $v = 8$ cm, $d(MN) = 6$ cm (obr. 115), trojúhelník APM sice sestrojíme, ale po další konstrukci body D a C splynou a vznikne trojúhelník ABC; platí totiž $d(MN) = \frac{1}{2} d(AB)$. Odtud už dostaneme pro konvexní lichoběžník podmínku (2), neboť

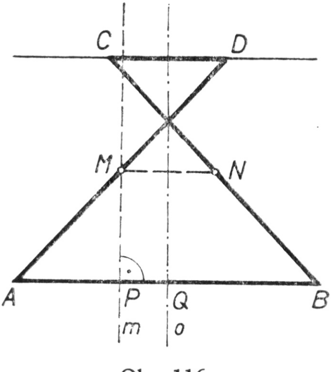
$$d(AB) = 2 . d(AQ) = \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}.$$

Pro $d(MN) < \sqrt{(d(AD))^2 - v^2}$ konvexní lichoběžník nedostaneme (obr. 116).

Proto říkáme, že teprve oba vztahy (1) a (2) tvoří tzv. *podmínku postačující* pro konstrukci lichoběžníka při parametrickém zadání naší úlohy.



Obr. 115

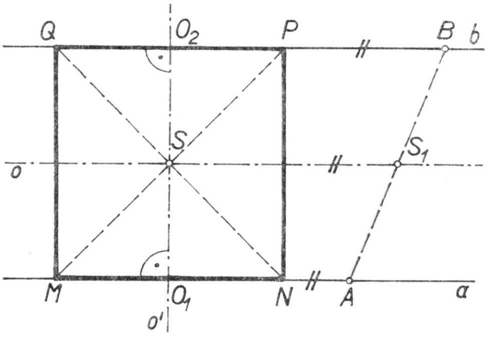


Obr. 116

71. Jsou dány tři různé body A, B, S, které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $MNPQ$, který má tyto vlastnosti:

a) Bod S je jeho středem.

b) Přímka MN prochází bodem A a přímka PQ bodem B.



Obr. 117

Řešení. Rozbor. Na obr. 117 je načrtnuto předpokládané řešení úlohy (všimněte si, že tento pomocný obrázek pro rozbor začneme kreslit od čtverce $MNPQ$ a k němu teprve připojíme dané údaje - při konstrukci ovšem budete vycházet z daných prvků).

Bod S je středem čtverce $MNPQ$ a leží např. na ose o pásu rovnoběžek $MN \parallel PQ$, které po řadě obsahují body A, B. Střed S_1 úsečky AB je také bodem osy o uvedeného pásu. Osa pásu je rovnoběžná s jeho hraničními přímkami, šíře pásu je rovna délce strany hledaného čtverce. Můžeme tedy přistoupit ke **konstrukci**:

1. Sestrojíme střed S_1 úsečky AB a přímku $o = SS_1$.

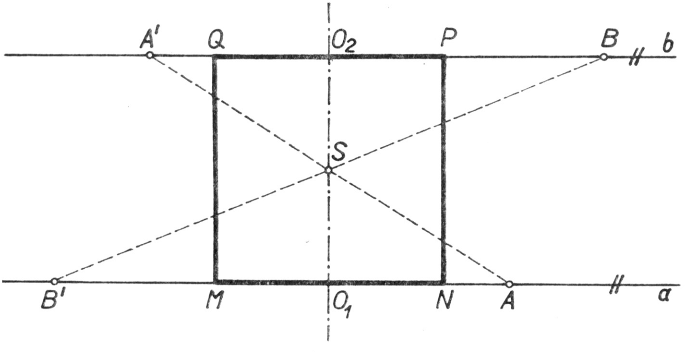
2. Rovnoběžky a, b s osou o vedené po řadě body A, B vytvoří pás, jehož šířku zjistíme např. kolmicí o' bodem S k hranicím pásu.

3. Paty této kolmice určí po řadě středy O_1, O_2 stran MN, PQ hledaného čtverce.

4. Sestrojíme vrcholy M, N, P, Q hledaného čtverce na hranicích pásu $a \parallel b$ tak, že $MO_1 \cong NO_1 \cong SO_1 \cong PO_2 \cong$ $\cong QO_2$.

Zkouška. To, že sestrojený čtverec $MNPQ$ má bod S za střed, zjistíme ze shodnosti (podle věty *sus*) trojúhelníků MO_1S, NO_1S, PO_2S, QO_2S. Z bodu 2 konstrukce je zřejmé, že přímka MN prochází bodem A a přímka PQ bodem B.

Úloha, jak vyplývá z konstrukce pro body A, B, S neležící na přímce, má jediné řešení, nehledíme-li na možnou záměnu pojmenování bodů M a N, popř. P a Q.



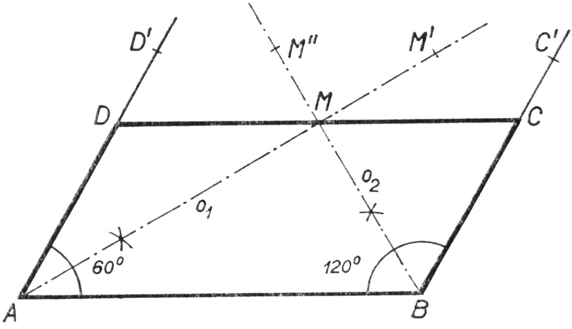
Obr. 118

Poznámka. Kdybychom při rozboru vyšli ze středové souměrnosti čtverce $MNPQ$ se středem S (obr. 118), bylo by možno přímky a, b sestrojit jednodušeji: $a = AB'$, $b = BA'$, kde body A', B' jsou středově souměrné po řadě k bodům A, B. Jinak by řešení úlohy probíhalo obdobně.

72. a) Narýsujte rovnoběžník $ABCD$ těchto vlastností $d(AB) = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 60°$, strana CD prochází průsečíkem M os úhlů $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle ABC$.

b) Dokažte, že pro tento rovnoběžník platí

$$d(AB) = 2 . d(AD).$$



Obr. 119

Řešení. a) Rozbor provedeme na obr. 119. Úhel $\sphericalangle ABC$ má velikost 120°. Konstrukci rovnoběžníka provedeme tedy takto:

1. Sestrojíme úsečku AB délky 7 cm.

2. Ve zvolené polorovině s hranicí AB sestrojíme úhly $\sphericalangle BAD' = 60°$ a $\sphericalangle ABC' = 120°$ a jejich osy $o_1 = AM'$ a $o_2 = BM''$.

3. Průsečíkem M přímek o_1 a o_2 vedeme přímku $m \parallel AB$.

4. Průsečík přímek m a AD' je bod D, průsečík přímek m a BC' je bod C.

Dokážeme, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník a že má požadované vlastnosti. Z 2. bodu konstrukce plyne, že $AD' \parallel BC'$. Bod M existuje, neboť podle vlastností os úhlů o_1, o_2 platí

$$\sphericalangle BAM' + \sphericalangle ABM'' = 30° + 60° < 180°.$$

Úhel $\sphericalangle BAD = 60°$ byl použit ve 2. bodě konstrukce. Také strana CD je podle 3. bodu konstrukce rovnoběžná s AB.

b) Z konstrukce vyplývá, že

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD = \sphericalangle DMA = 30°.$$

Proto v rovnoramenném trojúhelníku AMD se základnou AM je

$$AD \cong DM. \tag{1}$$

Obdobně dokážeme, že v trojúhelníku BMC platí

$$BC \cong CM. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne dokazovaný vztah

$$d(AB) = 2 . d(AD),$$

neboť $AB \cong CD \cong DM + MC$, $BC \cong AD$.

73. Narýsujte přímku p a zvolte dva různé body X, Y mimo ni.

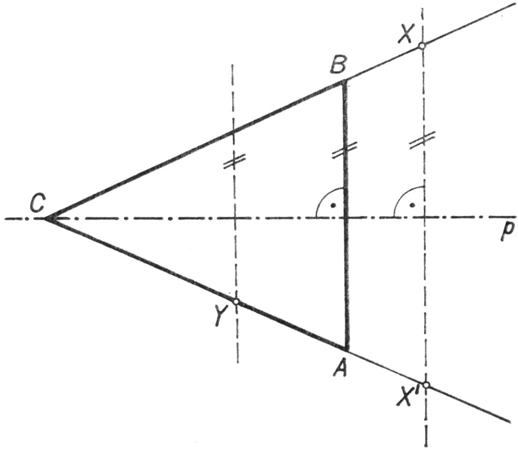
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, který má tyto vlastnosti:

a) Přímka p je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka.

b) Délka ramen je 6 cm.

c) Polopřímka CA prochází bodem Y, polopřímka CB bodem X.

Řešení. Rozbor. Z podmínky c) a a) vyplývá, že body X, Y nemohou ležet uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p, má-li mít úloha řešení.



Obr. 120

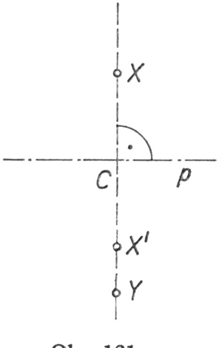
Na obr. 120 je znázorněno předpokládané řešení úlohy. Protože přímka p je osou souměrnosti trojúhelníka, jsou souměrně sdružené jak body A, B, tak i polopřímky CA a CB; bod C je v této osové souměrnosti samodružný. Proto bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p padne na přímku CA. Je-li $X' \neq Y$, jsou přímky $X'Y$ a CA totožné a **konstrukce** trojúhelníka bude jednoduchá (případ $X' = Y$ vyšetříme zvlášť):

1. Sestrojíme bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p.

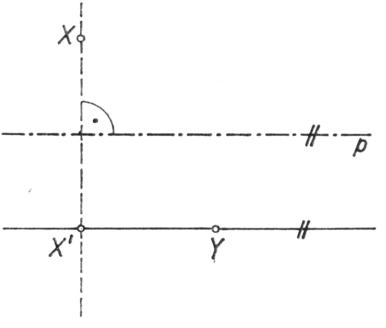
2. Existuje-li průsečík přímky $X'Y$ s přímkou p, je to bod C.

3. Na polopřímky CX, popř. CY, naneseme úsečku délky 6 cm a dostaneme po řadě body B, A.

Zkouška bezprostředně vyplývá z konstrukce: trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB, přímka p je jeho osou souměrnosti, vznikne-li ovšem trojúhelník ABC. To nastane jen tehdy, neleží-li body X', Y a C na přímce (kolmé k přímce p) - viz obr. 121. Závěr této úvahy už uvádí jeden z případů diskuse.



Obr. 121



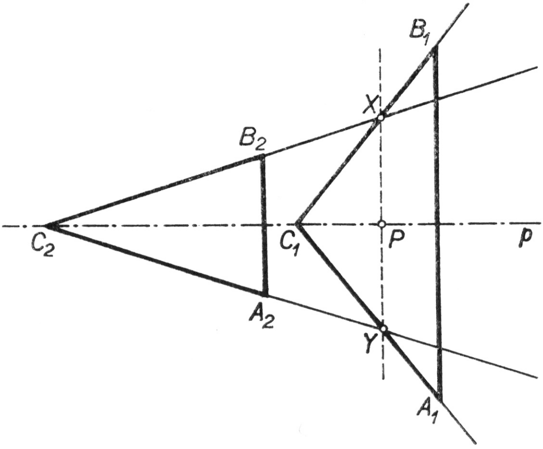
Obr. 122

Diskuse. Pro případ $X' \neq Y$, který jsme právě vyšetřili, má úloha jediné řešení, protnou-li se přímky $X'Y$ a p, přičemž $X'Y$ není kolmá na p. Existenci řešení nebrání ani možnost, že by bod Y ležel na přímce p; musel by však být různý od průsečíku přímek XX' a p.

Jestliže $X'Y \parallel p$, což je v případě, že vzdálenosti bodů X a Y od přímky p jsou si rovny, úloha nemá řešení (obr. 122).

Zbývá vyšetřit případ $X' = Y$, což nastane právě tehdy, když body X, Y jsou souměrně sdružené podle přímky p. Označme P průsečík přímek XY a p. Pak průsečík C_1 ($C_2, \ldots$) libovolné přímky procházející bodem $X' = Y$ až na bod P může být vrcholem trojúhelníka, který splňuje podmínky úlohy. V tomto případě má úloha nekonečně mnoho řešení (obr. 123).

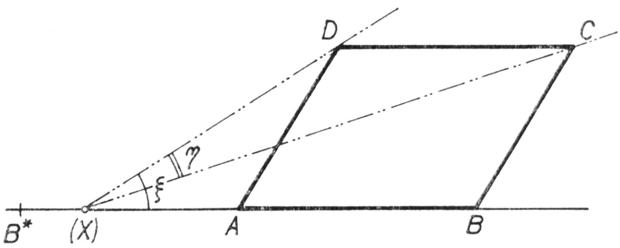
Již v rozboru jsme zjistili, že úloha nemá řešení, jestliže body X, Y leží uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p.



Obr. 123

74. Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž je $AB > BC$ a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý. Na přímce AB sestrojte takový bod X, z něhož je vidět úsečky AD a DC pod shodnými úhly.

Vyšetřete polohu bodu X vzhledem k úsečce AB.



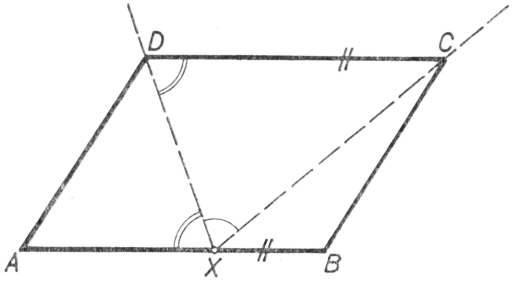
Obr. 124

Řešení. Protože jde o polohovou úlohu, opět je úkolem »najít všechny body X«.

Rozbor. Pro zjednodušení úvahy vyloučíme nejprve možnost, že by hledaný bod mohl ležet na polopřímce $AB^\star$, která je k polopřímce AB opačná. Předpokládejme, že bod (X) leží na polopřímce $AB^\star$ (obr. 124). Pak úhly $\sphericalangle A(X)D = \xi$ a $\sphericalangle D(X)C = \eta$ leží v téže polorovině s hranicí $(X)D$. Jedno rameno $(X)D$ mají společné, druhá jejich ramena $(X)A$ a $(X)C$ jsou však různá, neboť bod C na přímce $(X)A = AB$ neleží. Proto $\xi \neq \eta$ pro libovolný bod (X) polopřímky $AB^\star$; bod (X) nemůže být tedy řešením úlohy.

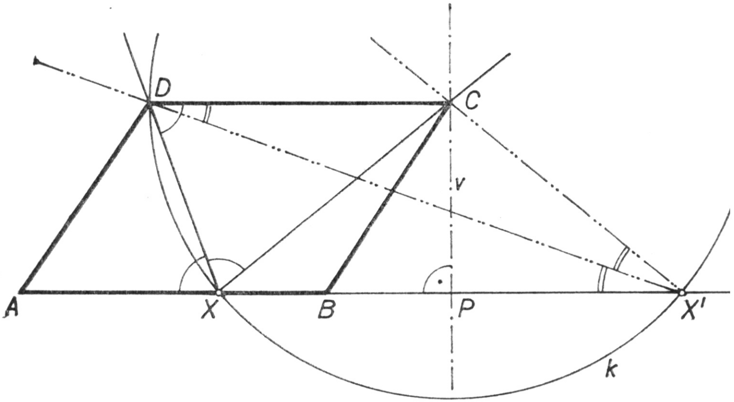
Předpokládejme tedy, že bod X leží na polopřímce AB (obr. 125) a má požadovanou vlastnost, tj. $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle DXC$. Protože $AB \parallel DC$, platí o střídavých úhlech $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle XDC$. Trojúhelník DXC je tedy rovnoramenný se základnou DX. Odtud **konstrukce:**

1. Okolo bodu C poloměrem CD opíšeme kružnici k.
2. Průsečík přímky AB a kružnice k (existuje-li) je hledaný bod X.



Obr. 125

Zkouška vlastností sestrojeného bodu X je jednoduchá: Existuje-li X na přímce AB, pak trojúhelník DXC je rovnoramenný se základnou DX, úhly $\sphericalangle XDC$ a $\sphericalangle DXC$ jsou shodné. Podle věty o střídavých úhlech platí $\sphericalangle XDC \cong \cong \sphericalangle AXD$, takže i $\sphericalangle AXD \cong \sphericalangle DXC$.



Obr. 126

Diskuse. Kružnice k má s přímkou AB společný aspoň jeden bod, je-li $d(CD) = d(AB) \geqq v$, kde $v = d(CP)$ je výška rovnoběžníka ke straně AB. V prvním případě má úloha dvě řešení (viz obr. 126); případ rovnosti nemůže nastat vzhledem k podmínce úlohy $AB > BC$ a proto, že úhel $\sphericalangle DAB \cong \cong CBP$ je ostrý.

Vzhledem k souměrnosti obou řešení X a X' podle přímky CP jeden z bodů, např. X', určitě nenáleží polopřímce PA. Pro bod X dokážeme, že patří vnitřku úsečky AB. Protože podle podmínky úlohy je úhel $\sphericalangle DAB$ ostrý, je úhel $\sphericalangle ADC$ trojúhelníka ADC tupý. Z podmínky úlohy a z vlastnosti tupoúhlého trojúhelníka ADC plyne

$$AC > CD > AD. \tag{1}$$

Protože body A, B, X leží na polopřímce PA a platí $CD \cong \cong XC$, $AD \cong BC$, dostaneme z nerovnosti (1) nerovnost

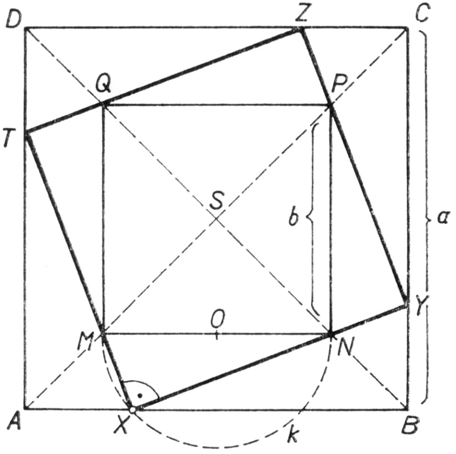
$$AC > XC > BC,$$

z níž vyplývá toto uspořádání bodů na polopřímce PA:

$$P, B, X, A;$$

bod X leží tedy uvnitř úsečky AB.

Neprotne-li kružnice k přímku AB, je poloměr $d(CD) < v = = d(CP)$. Protože $\sphericalangle CBP$ je ostrý v pravoúhlém trojúhelníku BPC, platí $BC > CP$. Je tedy $d(BC) > d(CD) = d(AB)$, což odporuje podmínce úlohy $AB > BC$. Nemůže se tedy stát, že by úloha neměla řešení. Z diskuse vyplývá, že existují vždy dvě řešení.



Obr. 127

75. Je dán čtverec *ABCD* o délce strany *a* a čtverec *MNPQ* o délce strany *b*, přičemž $a > b$; vrcholy *M*, *N*, *P*, *Q* leží v úhlopříčkách *AC*, *BD* (viz obr. 127).

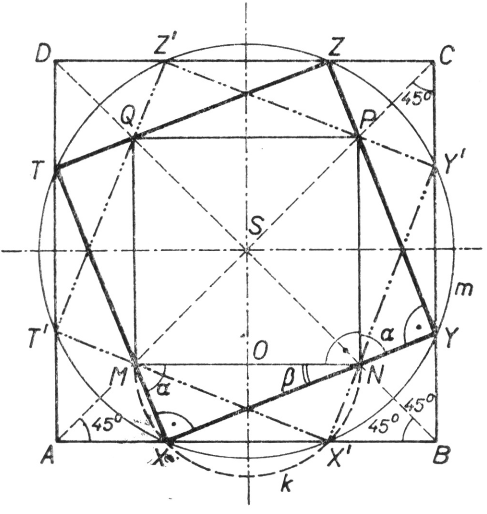
Sestrojte čtverec *XYZT* tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce *ABCD* a aby body *M*, *N*, *P*, *Q* ležely na obvodu čtverce *XYZT*.

Stanovte počet řešení úlohy vzhledem k daným číslům *a*, *b*.

Řešení. Rozbor (viz obr. 127). Podle zadání úlohy jsou oba dané čtverce souměrné podle svého středu *S*. Naši představu řešení znázorňuje čtverec *XYZT*. Pak trojúhelník *MNX* je pravoúhlý s přeponou *MN*; bod *X* tedy nutně leží na Thaletově kružnici nad průměrem *MN*.

Odtud plyne **konstrukce:**

1. Sestrojíme kružnici $k = (O;\ r = \frac{1}{2}b)$ nad stranou *MN* jako průměrem.



Obr. 128

2. Existuje-li společný bod kružnice k a strany AB, nazveme ho X (na obr. 128 jsou to dva různé body X, X').

3. Kolem průsečíku S úhlopříček daného čtverce opíšeme kružnici $m = (S; r = d(SX))$.

4. Na kružnici m leží další vrcholy Y, Z, T hledaného čtverce tak, že $AX \cong BY \cong CZ \cong DT$.

Protože však jde o polohovou úlohu, musíme uvažovat i případný druhý průsečík k s AB, tj. na obr. 128 bod X', který vede k *druhému* řešení úlohy, čtverci $X'Y'Z'T'$.

Zkouška. Nejprve musíme dokázat, že např. bod Y leží na přímce XN atd. Označme úhly pravoúhlého trojúhelníka MXN tak, že

$$\sphericalangle XMN = \alpha, \sphericalangle XNM = \beta$$

a platí

$$\alpha + \beta = 90°. \tag{1}$$

Pro trojúhelníky MAX a NBY platí: $BY \cong AX$ (podle konstrukce), $BN \cong AM$, $\sphericalangle NBY \cong \sphericalangle MAX$ (ze zadání úlohy), proto jsou shodné podle věty *sus* a je $NY \cong MX$.

Trojúhelníky MXN a NYP jsou shodné podle věty *sss*, neboť $d(NP) = d(MN) = b$, $NY \cong MX$ (podle předešlé úvahy) a $YP \cong XN$, protože platí $\triangle YCP \cong \triangle XBN$ podle *sus*. Je tedy $\sphericalangle PNY \cong \sphericalangle NMX = \alpha$ a platí vzhledem k (1):

$$\sphericalangle XNM + \sphericalangle MNP + \sphericalangle PNY = \beta + 90° + \alpha = 180°; \tag{2}$$

proto polopřímky NX a NY tvoří přímý úhel, tj. body X, N, Y leží v přímce.

Z dokázané shodnosti pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MXN \cong \triangle NYP \cong \triangle PZQ \cong \triangle QTM$$

vyplývá dále:

a) $\sphericalangle TXY = \sphericalangle XYZ = \sphericalangle YZT = \sphericalangle ZTX = 90°$;

b) $XN + NY = YP + PZ = ZQ + QT = TM + MX$,

takže čtyřúhelník $XYZT$ je vskutku čtverec.

Poznámka. Celá zkouška proběhne jednodušeji, otočíme-li celý útvar okolo bodu S o pravý úhel (např. tak, že bod A přejde v bod B, bod M v N atd.). Je to možné, neboť ze zadání vyplývá $SA \cong SB$, $SM \cong SN$ atd. Pak úsečka AB přejde v úsečku BC, pravoúhlý trojúhelník MXN přejde ve shodný trojúhelník NYP; tím dokážeme předpoklady pro platnost vztahu (2).

Diskuse. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky AB a kružnice k. Vzdálenost v jejího středu O od AB je $v = \frac{1}{2}(a - b)$, její poloměr je $r = \frac{1}{2}b$. Podle věty o vzájemné poloze přímky a kružnice dospějeme k tomuto výsledku:

a) Je-li $v < r$ neboli $a - b < b$, tj.

$$b < a < 2b,$$

dostaneme dvě různá řešení $XYZT$, $X'Y'Z'T'$; tato řešení jsou souměrně sdružená podle středních příček daných čtverců a můžeme k nim dospět dvěma otočeními v navzájem opačných smyslech (jedno z nich je popsáno v poznámce).

b) Je-li $v = r$ neboli

$$a = 2b,$$

má úloha jediné řešení $XYZT$, kde X je střed úsečky AB.

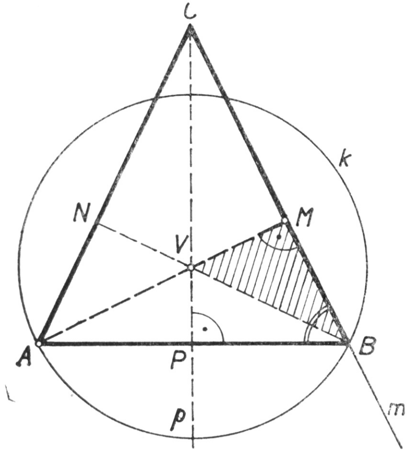
c) Je-li $v > r$ neboli

$$a > 2b,$$

nemá úloha řešení.

76. V rovině je dána úsečka AM a uvnitř této úsečky bod V. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby úsečka AM byla jeho výškou a bod V průsečíkem výšek. Stanovte podmínku řešitelnosti.

Narýsujte, je-li $d(AM) = 82$ mm, $d(AV) = 52$ mm.



Obr. 129

Řešení. V textu úlohy je vlastně dána výška AM hledaného trojúhelníka a předepsána poloha průsečíku V jeho výšek. Toto zadání vás může svést přímo k vlastní konstrukci: Podle vašich znalostí je zřejmé, že přímka vedená bodem M kolmo k přímce AM bude obsahovat stranu BC hledaného trojúhelníka. Tím však vaše konstrukce skončí, neboť asi nevíte, jak využít bod V pro další konstrukci. Provedete-li však řádně rozbor úlohy, uvidíte, že sestavení konstrukce není obtížné.

Při **rozboru** vyjdeme opět z předpokladu, že na obr. 129 je narýsován hledaný trojúhelník ABC. Paty jeho výšek vedených po řadě body A, B, C označme M, N, P. Přímka $CP = p = v_c$ prochází bodem V a je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka, takže je $VA \cong VB$. Protože jde o úlohu polohovou, potřebujeme sestrojit dva »neznámé« vrcholy B, C. Pro ně hledáme množiny možných bodů. Oba body leží na přímce m procházející bodem M a kolmé k přímce AM. Pro bod C nemáme »v dohledu« žádnou jednoduchou množinu bodů; o bodu B však víme, že $VA \cong VB$. Proto bod B náleží kružnici $k = (V;\ d(VA))$. V pravoúhlém trojúhelníku VMB (kde $\sphericalangle VMB = 90°$ - pokud ovšem existuje) známe tedy přeponu VB a odvěsnu VM. Odtud **konstrukce.**

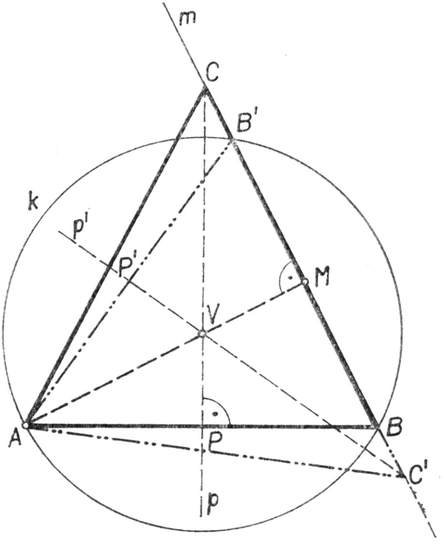
1. Sestrojíme bodem M přímku $m \perp AM$.
2. Okolo bodu V opíšeme kružnici k poloměrem $d(VA)$.
3. Každý z průsečíků k a m (existují-li) vede k jednomu vrcholu B hledaného trojúhelníka.
4. Bod C je průsečíkem přímky m a osy p úsečky AB.

Provedeme **zkoušku** toho, že každý sestrojený trojúhelník je řešením úlohy. Podle konstrukce je $AM \perp m = BC$. Protože pomocný trojúhelník VAB (existuje-li) je podle konstrukce rovnoramenný, je osa p úsečky AB jeho osou souměrnosti a zároveň i osou základny trojúhelníka ABC; proto je $CV \perp AB$ a bod V je průsečíkem výšek.

Podmínku řešitelnosti zjistíme takto: Popsanou konstrukcí získáme řešení právě tehdy, protne-li kružnice k přímku m, tj. když $VB \cong VA > VM$. Pak dostaneme dva různé body B a B' souměrně sdružené podle přímky AM. V pravoúhlém trojúhelníku AMB je úhel ABM ostrý, úhel VPB je pravý, a proto se přímky m a p podle Euklidova axiómu protnou; bod C tedy vždy existuje. Úloha má tedy pro $VA > VM$ - což je náš případ - vždy dvě řešení souměrně sdružená podle přímky AM.

Poznámka. Tato dvě řešení splynou (nehledíme-li na popis), jestliže přímka AM je osou úsečky BC. Pak trojúhelník je rovnostranný; to nastane právě tehdy, je-li $d(AV) = 2.d(VM)$; ze zadání naší úlohy to však neplyne.

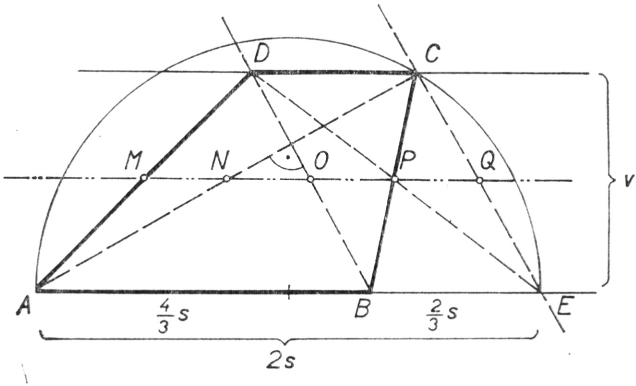
Konstrukce je provedena na obr. 130 v poměru 1 : 2.



Obr. 130

77. Je dána délka s střední příčky*) a délka v výšky lichoběžníka $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Průsečíky úhlopříček se střední příčkou lichoběžníka $ABCD$ dělí tuto příčku na tři shodné úsečky.

Sestrojte lichoběžník $ABCD$.



Obr. 131

Řešení (obr. 131). **Rozbor.** Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník. Rovnoběžka vedená bodem C s úhlopříčkou BD protne polopřímku AB v bodě E. Trojúhelník AEC je pravoúhlý, známe jeho výšku a víme, že $d(AE)$ je $2s$. Střední příčka trojúhelníka DCB má délku $\frac{1}{3}s$; je tedy $d(DC) = d(BE) =$

*) Střední příčka lichoběžníka je úsečka určená středy jeho ramen. Je rovnoběžná se základnami. Její délka s je rovna aritmetickému průměru délek obou základen, tj. $s = \frac{a + c}{2}$.

$= \frac{2}{3} s$. Protože $EC \parallel BD$, je $\sphericalangle ACE = 90°$. V pravoúhlém trojúhelníku ACE známe tedy délku $2s$ přepony AE a délku příslušné výšky v.

Konstrukce

1. Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ACE s přeponou AE délky $2s$ a příslušnou výškou v. [Použijeme Thaletovu větu: Nad průměrem AE opíšeme půlkružnici (jejíž poloměr je s) a najdeme její průsečík C s přímkou sestrojenou v téže polorovině rovnoběžně s AE ve vzdálenosti v.]

2. Na přeponě AE sestrojíme bod B tak, aby platilo: $d(AB) : d(BE) = 2 : 1$ (víme totiž, že $d(AB) = \frac{4}{3} s$, $d(BE) = \frac{2}{3} s$).

3. Trojúhelník ABC doplníme na hledaný lichoběžník $ABCD$ tak, že $CD \cong BE$.

Zkouška. Z toho, že $d(AE) = 2s$, $CD \cong BE$ a $AE = AB + BE$, je zřejmé, že střední příčka sestrojeného lichoběžníka $ABCD$ má danou délku s. Protože $\sphericalangle ACE = 90°$ a $CE \parallel DB$, jsou úhlopříčky AC a DB navzájem kolmé.

Označme písmeny (viz obr. 131) M, N, O, P a Q průsečíky přímky obsahující střední příčku lichoběžníka $ABCD$ postupně s přímkami AD, AC, BD, BC a CE. Potom v rovnoběžníku $BECD$ platí

$$d(OP) = d(PQ) = \frac{1}{3} s. \qquad (1)$$

V trojúhelníku AEC má střední příčka NQ délku $\frac{1}{2} d(AE) = s$.

Vzhledem k uspořádání bodů M, N, O, P a Q vyplývá z $d(NQ) = s$ a z (1), že i

$$d(NO) = \frac{1}{3} s.$$

Potom také

$$d(MN) = d(MP) - d(NP) = s - \frac{2}{3} s = \frac{1}{3} s.$$

Střední příčku MP rozdělují tedy úhlopříčky AC a BD na tři shodné úsečky.

Diskuse. Možnost provedení celé konstrukce závisí jen na existenci bodu C. V případě $v > s$ bod C neexistuje, takže úloha nemá řešení.

V případě $v \leqq s$ bod C existuje (jeden nebo dva), takže úloha má řešení (jedno nebo dvě).

Jedinou podmínkou řešitelnosti je tedy splnění nerovnosti $v \leqq s$.

78. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, je-li dána délka jeho těžnice t_c a velikost úhlu ω, který svírá těžnice t_c s osou úhlu ACB. Pro které ω má úloha řešení?

Řešení. Rozbor (obr. 132). Označme S střed přepony AB. Podle Thaletovy věty je $d(SA) = d(SC) = d(SB) = t_c$. Trojúhelníky ASC a BSC jsou tedy rovnoramenné, a proto

$$\sphericalangle ACS = \sphericalangle CAS = \alpha,$$

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle SBC = \beta.$$

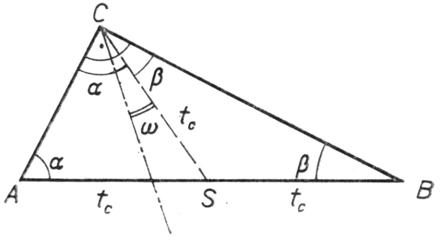
Je-li ω úhel, který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB = 90°$, potom

$$\alpha = 45° + \omega,\ \beta = 45° - \omega, \tag{1}$$

nebo

$$\alpha = 45° - \omega,\ \beta = 45° + \omega. \tag{2}$$

Z posledních vztahů vyplývá konstrukce. Jde o konstrukci trojúhelníka podle věty *usu*: $d(AB) = 2 . t_c$ a úhly α, β jsou určeny vztahy (1), popř. (2).



Obr. 132

Zkouška. Ze vztahů (1), popř. (2), je zřejmé, že sestrojený trojúhelník ABC je pravoúhlý. Protože délka jeho přepony je $2t_c$, má těžnice k přeponě předepsanou délku.

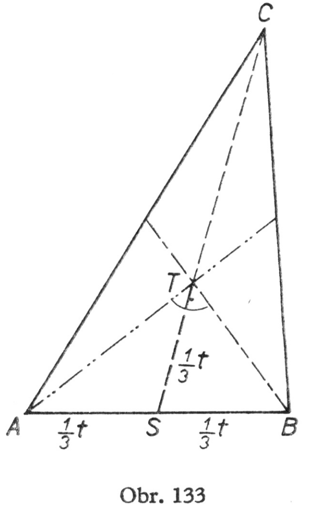
Diskuse. Aby úloha měla řešení, musí být úhly α, β dané vztahy (1), popř. (2), ostré, tj.

$$0° \leqq \omega < 45°.$$

Je-li $\omega = 0°$, má úloha jediné řešení a sestrojený trojúhelník ABC je rovnoramenný. Je-li $0° < \omega < 45°$, má úloha dvě řešení.

Pro $\omega \geqq 45°$ nemá úloha řešení.

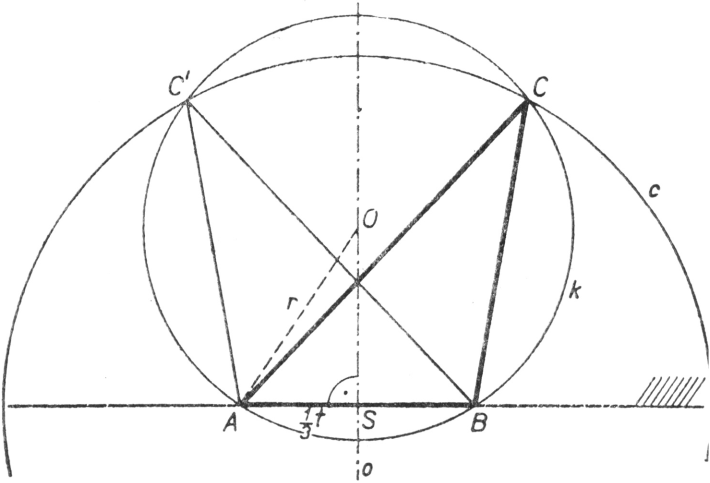
79. V trojúhelníku ABC jsou těžnice t_a a t_b na sebe kolmé. Dále je dána délka t těžnice t_c a poloměr r opsané kružnice. Sestrojte tento trojúhelník a proveďte diskusi řešitelnosti.



Obr. 133

Řešení. Rozbor (obr. 133). Víme, že $d(CS) = t$, kde S je střed strany AB, a že $\sphericalangle ATB = 90°$. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC má střed O a poloměr r. Z pravoúhlého trojúhelníka ATB vyplývá $d(ST) = d(SA) = d(SB) = \frac{1}{3}t$. Proto

$d(AB) = 2.d(ST) = \frac{2}{3}t$.



Obr. 134

Z toho vyplývá **konstrukce** (obr. 134):

1. Sestrojíme úsečku AB délky $\frac{2}{3}t$ a její střed S.
2. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB sestrojíme bod O tak, aby platilo $d(OA) = d(OB) = r$.

3. Sestrojíme kružnice $c = (S, t)$ a $k = (O, r)$.
4. Průsečík kružnic c, k označme C.
5. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Zkouška. Je jasné, že kružnice opsaná sestrojenému trojúhelníku ABC má poloměr r. Označme písmenem T těžiště trojúhelníka ABC; potom $d(ST) = \frac{1}{3} t$. Protože podle konstrukce je $d(AB) = \frac{2}{3} t$, platí $SA \cong SB \cong ST$. Proto leží bod T na Thaletově kružnici s průměrem AB, takže $\sphericalangle ATB = 90°$. Těžnice v přímkách AT, BT jsou tedy navzájem kolmé.

Diskuse. Bod 2 z konstrukce je možno provést jen tehdy, je-li

$$r \geqq \frac{1}{3} t. \tag{1}$$

Průsečík C kružnic $c = (S, t)$ a $k = (O, r)$ podle bodu 4 existuje tehdy a jen tehdy, platí-li

$$| r - t | \leqq d(SO) \leqq r + t.$$

Dosadíme-li $d(SO) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{3} t\right)^2}$ do nerovnosti $| r - t | \leqq d(SO)$, dostaneme po umocnění

$$r^2 - 2rt + t^2 \leqq r^2 - \frac{t^2}{9}$$

a po další úpravě

$$r \geqq \frac{5}{9}\,t. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) platí současně právě tehdy, je-li

$$r \geqq \frac{5}{9}\,t.$$

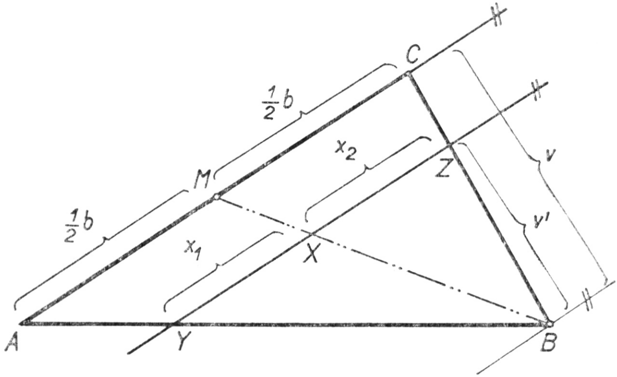
Protože průsečík C kružnic c a k nikdy nemůže ležet na přímce AB, je možno provést 5. bod konstrukce.

Podmínkou řešitelnosti je tedy

$$\frac{r}{t} \geqq \frac{5}{9}\,.$$

Snadno zjistíme, že úloha má dvě řešení souměrná podle přímky o; pouze v případě, že $r = \frac{5}{9}\,t$, je jediným řešením rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C.

80. Je dán trojúhelník ABC se stranami délek $d(AB) = 9$ cm, $d(BC) = 5$ cm, $d(CA) = 8$ cm. Sestrojte kružnici k vepsanou tomuto trojúhelníku a na ní najděte všechny body X této vlastnosti: přímka p rovnoběžná s AC a procházející bodem X protíná strany AB, BC v takových bodech Y a Z, že X je střed úsečky YZ.



Obr. 135

Řešení. Rozbor. Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC představuje jednu množinu možných bodů X. Druhou množinu možných bodů X tvoří středy úseček YZ popsaných v textu úlohy; nazveme ji **M**. Nejdříve najděte tuto množinu. Na obr. 135 je trojúhelník ABC daných rozměrů. Je zřejmé, že bod M jako střed strany AC patří do množiny **M**. Nabízí se domněnka, že i další body úsečky MB (tj. těžnice t_b) patří do množiny **M**, nikoliv však bod B. Veďme libovolným bodem X mezi body M, B rovnoběžku s AC; písmeny Y, Z označme její průsečíky se stranami AB, BC.

Provedeme tzv. *nepřímý* důkaz toho, že $XY \cong XZ$.

a) Předpokládáme, že $XY < XZ$, tzn., že pro délky těchto úseček platí $x_1 < x_2$ (viz obr. 135). Vzdálenosti bodu B od přímek AC, YZ označíme v, v'; vzdálenost přímek AC, YZ je tedy $v - v'$.

O obsazích trojúhelníků XYB, XZB vzhledem k $x_1 < x_2$ platí

$$S_{XYB} < S_{XZB}. \qquad (1)$$

Z obdobného důvodu pro obsahy lichoběžníků $AMXY$ a $CMXZ$ dostáváme

$$S_{AMXY} < S_{CMXZ} \qquad (2)$$

Sečtením nerovností (1) a (2) dostaneme, že obsah trojúhelníka AMB je menší než obsah trojúhelníka CMB, tj.

$$S_{AMB} < S_{CMB}. \qquad (a)$$

b) Jestliže předpokládáme, že $x_1 > x_2$, dostaneme obdobným postupem

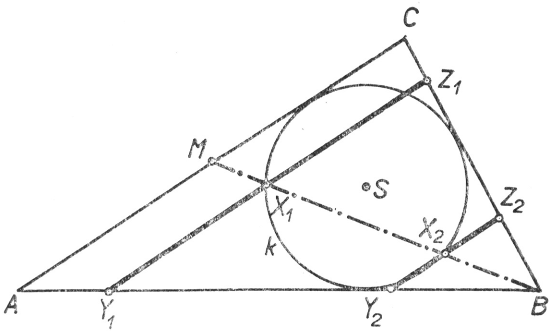
$$S_{AMB} > S_{CMB}. \qquad (b)$$

Oba výsledky (a) a (b) jsou však zřejmě ve sporu s tím, že

$$S_{AMB} = S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b.v.$$

Pro vztah mezi čísly x_1, x_2 musí tedy platit jediná zbývající možnost $x_1 = x_2$, což znamená, že bod X je středem úsečky YZ.

Závěr. Body množiny **M** jsou všechny body těžnice MB vyjma bodu B. Z úvahy též vyplývá, že žádný jiný bod roviny nemůže mít požadovanou vlastnost.



Obr. 136

Tento výsledek využijeme v **konstrukci** (obr. 136).

1. Sestrojíme trojúhelník ABC.
2. Trojúhelníku ABC vepíšeme kružnici k.
3. Určíme těžnici BM.
4. Kružnice k protne těžnici BM ve dvou různých bodech X_1, X_2, které jsou zřejmě řešením úlohy.

Dokážeme to: Jak z úvahy v rozboru vyplývá, jedině body těžnice BM (mimo bod B) mohou mít požadovanou vlastnost. Těžnice BM leží ve vnitřku úhlu ABC, neboť bod M leží mezi body A, C. Polopřímky BA, BC se kružnice k dotýkají, a proto polopřímka BM protne kružnici k ve dvou různých bodech. Tyto body X_1, X_2 vzhledem ke konstrukci jsou body vnitřku trojúhelníka ABC. Úloha má tedy dvě různá řešení.

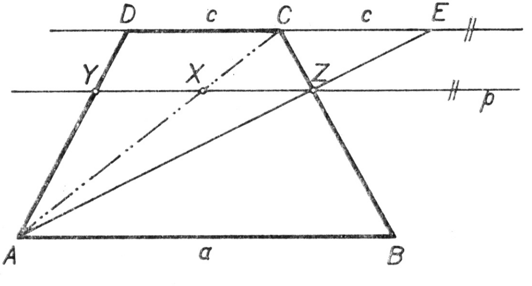
81. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD.

a) Určete takový bod X úhlopříčky AC, aby přímka p rovnoběžná s AB vedená bodem X protľala ramena AD, BC po řadě v bodech Y, Z, pro něž platí $XY \cong XZ$.

b) Vyjádřete délku úsečky XY pomocí $a = d(AB)$, $c = d(CD)$.

Řešení. Rozbor. a) Bod X na obr. 137 má požadovanou vlastnost, tj. úsečky XY a XZ na přímce $p \parallel AB$ jsou shodné. Obměníme-li i úvahu z rozboru v úloze č. 80, patří bod Z (mimo to, že leží na straně BC) straně trojúhelníka AZY, v němž úsečka AX je těžnicí. Proto úsečka AC je těžnicí trojúhelníka ADE, kde pro bod E platí: $E \neq D$, $d(CD) = d(CE) = c$, E leží na přímce DC (obr. 137). Z toho vyplývá i jednoduchá **konstrukce.**

1. Sestrojíme lichoběžník $ABCD$ a na přímce DC bod E tak, jak je popsáno v rozboru.
2. Průsečík polopřímky AE se stranou BC je bod Z požadovaný textem úlohy.
3. Konstrukcí přímky $p \parallel AB$ bodem Z dostaneme bod Y a hledaný bod X.



Obr. 137

Důkaz vlastností bodu X je patrný z rozboru. Úloha má popsané řešení jako jediné, neboť body B a C leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AE; společný bod úsečky BC a polopřímky AE je proto jediný.

b) Ze vztahu $\triangle ZCE \sim \triangle ZBA$ plyne (obr. 137)

$$\frac{d(EZ)}{d(AZ)} = \frac{c}{a} \tag{1}$$

a dále podle (1)

$$\frac{d(AE)}{d(AZ)} = \frac{d(AZ) + d(EZ)}{d(AZ)} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a + c}{a}. \tag{2}$$

Ze vztahu $\triangle AXZ \sim \triangle ACE$ plyne

$$\frac{d(XZ)}{d(CE)} = \frac{d(AZ)}{d(AE)}.$$

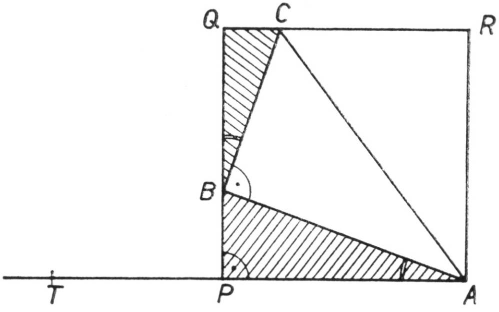
Podle (2) je

$$d(XZ) = \frac{d(AZ)}{d(AE)} \cdot d(CE) = \frac{ac}{a + c},$$

a tedy

$$d(XY) = d(XZ) = \frac{ac}{a + c},$$

což je hledané vyjádření.



Obr. 138

82. Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny délek $d(AB) = 4$ cm, $d(BC) = 3$ cm. Opište mu čtverec $APQR$ tak, aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR.

a) Popište konstrukci.

b) Vypočtěte délku úsečky AP.

Řešení. Úloha bude vyřešena (obr. 138), sestrojíme-li některý z bodů P, Q, R. Konstrukce zbývajících dvou vrcholů hledaného čtverce už bude snadná. Část b) dané úlohy požaduje výpočet délky úsečky AP, kterou označíme a.

Pravoúhlé trojúhelníky ABP a BCQ jsou podobné, neboť

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle CBQ = 90°, \tag{1}$$

takže

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCQ. \tag{2}$$

Koeficient podobnosti trojúhelníků ABP a BCQ (v tomto pořadí) je

$$\frac{d(AB)}{d(BC)} = \frac{4}{3}.$$

Odtud již plyne, že

$$\frac{d(AP)}{d(BQ)} = \frac{4}{3},$$

tj.

$$d(BQ) = \frac{3}{4}\, d(AP) = \frac{3}{4}\, a.$$

Protože $PQ \cong AP$, je

$$d(BP) = a - d(BQ) = \frac{1}{4}\, a. \qquad (3)$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABP podle Pythagorovy věty dostáváme

$$(d(AP))^2 + (d(BP))^2 = (d(AB))^2,$$

tj. podle (3)

$$a^2 + \frac{1}{16}\, a^2 = 16,$$

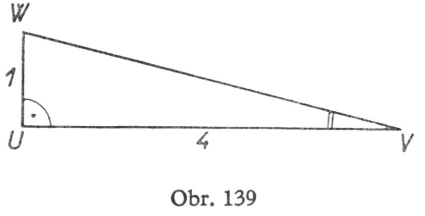
tj.

$$a^2 = \frac{16^2}{17}.$$

Odtud již plyne řešení části b):

$$d(AP) = a = \frac{16\ \text{cm}}{\sqrt{17}} = \frac{16.\sqrt{17}\ \text{cm}}{17} \doteq \frac{16.4{,}13\ \text{cm}}{17} = 3{,}88\ \text{cm}. \qquad (4)$$

Z výsledku (4) vyplývá jeden ze způsobů řešení části a) dané úlohy. Bod P sestrojíme na Thaletově půlkružnici nad průměrem AB (v polorovině opačné k polorovině s hraniční přímkou AB, v níž leží bod C) tak, aby bylo $d(AP) = \frac{16}{17}\sqrt{17}$ cm (viz (4)).



Obr. 139

Jiný způsob nalezení bodu P se zakládá na konstrukci úhlu BAP. Z rovnosti (3) totiž plyne

$$\frac{d(BP)}{d(AP)} = \frac{1}{4}.$$

Sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník UVW (obr. 139) s odvěsnami o délkách $d(UV) = 4$ cm a $d(UW) = 1$ cm. Pak sestrojíme bod T (obr. 138) tak, aby platilo

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle WVU.$$

Bod P se sestrojí jako pata kolmice z bodu B k přímce AT. (Poznamenejme ještě, že trojúhelník UVW je užitečný i pro konstrukci, která se zakládá na rovnosti (4), neboť $d(VW) = \sqrt{17}$ cm.)

Známe-li bod P, pak již snadno sestrojíme další dva vrcholy hledaného čtverce. Na polopřímce PB najdeme bod Q tak, aby bylo $d(PQ) = a$. Na polopřímce QC sestrojíme bod R, pro který platí $d(QR) = a$.

Na závěr musíme ještě provést **zkoušku**, tj. dokázat, že čtyřúhelník $APQR$ je hledaný čtverec. Z konstrukce vyplývá, že úhel APB je pravý a že $d(PQ) = d(QR) = a$. Je třeba dokázat, že také úhel PQR je pravý, že bod B leží na straně PQ a bod C leží na straně QR.

Bod B leží uvnitř úsečky PQ, neboť podle konstrukce bodu P je $d(PB) < a = d(PQ)$. Trojúhelníky ABP a BCQ jsou podobné podle věty $\frac{s}{s}\,u\,\frac{s}{s}$. Z rovnosti (1) plyne rovnost (2) a z konstrukce bodu P vyplývá rovnost (3), takže

$$\frac{d(AP)}{d(BQ)} = \frac{d(AP)}{d(PQ) - d(BP)} = \frac{a}{a - \frac{1}{4}a} = \frac{4}{3} = \frac{d(AB)}{d(BC)}.$$

Úhel PQC je tedy pravý a čtyřúhelník $APQR$ je čtverec. Z konstrukce dále plyne, že bod C skutečně leží na straně QR. Je totiž

$$d(QC) = d(PB) \cdot \frac{d(BC)}{d(AB)} = d(PB) \cdot \frac{3}{4} < a.$$

Poznámka. Při řešení úlohy lze také začít konstrukcí bodu Q a využít pro ni podmínky $\sphericalangle BQC = 90°$ a $\sphericalangle BQA = 45°$.