[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

V. Nerovnosti v geometrii

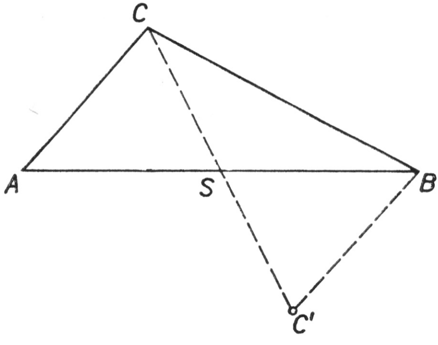
In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 247–257.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405291

V. Nerovnosti v geometrii

44. Je dán trojúhelník ABC. Označme S střed strany AB. Dokažte, že

$$CS < \frac{1}{2}(AC + BC). \tag{1}$$



Obr. 75

Řešení. Na prodloužení úsečky CS (obr. 75) za bod S sestrojíme bod C' tak, aby platilo

$$C'S \cong CS.$$

Pak ovšem platí

$$CC' = 2.CS \text{ a } BC' \cong AC. \qquad (2)$$

Bod S neleží na přímce BC, takže body C, C' a B neleží na téže přímce a platí pro ně trojúhelníková nerovnost

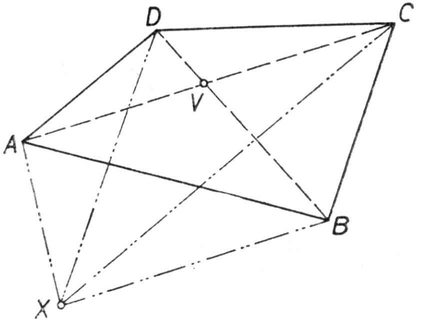
$$CC' < BC' + BC,$$

tj. podle (2)

$$2.CS < AC + BC,$$

odkud již plyne dokazovaná nerovnost (1).

45. V rovině daného vypuklého čtyřúhelníku $ABCD$ najděte všechny body, jejichž součet vzdáleností od vrcholů A, B, C, D je nejmenší.



Obr. 76

Řešení. Zvolme libovolný bod X v rovině daného čtyřúhelníku $ABCD$ a hledejme (obr. 76), v kterém případě je nejmenší součet

$$AX + BX + CX + DX.$$

Pro body A, C, X podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$AX + CX \geqq AC, \tag{1}$$

přičemž rovnost nastává, právě když bod X je bodem úsečky AC. Obdobně podle trojúhelníkové nerovnosti pro body B, D, X plyne

$$BX + DX \geqq BD, \tag{2}$$

kde rovnost platí, právě když je bod X bodem úsečky BD.

Z nerovností (1) a (2) dostáváme

$$AX + BX + CX + DX \geqq AC + BD,$$

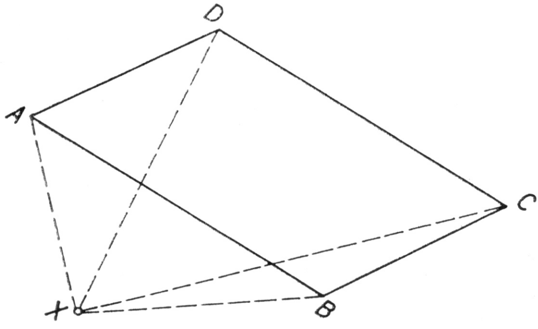
přičemž rovnost platí, právě když je bod X zároveň bodem úsečky AC a úsečky BD. Tyto dvě úsečky mají jediný společný bod - svůj průsečík V. Tento bod V je tedy bodem, jehož součet vzdáleností od bodů A, B, C, D je nejmenší.

Úloha má jediné řešení; je jím průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

46. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníku platí

$$AX < BX + CX + DX. \tag{1}$$

Dokažte.



Obr. 77

Řešení. Pro každý bod X roviny rovnoběžníku $ABCD$ (obr. 77) podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$AX \leqq AD + DX. \tag{2}$$

Porovnáním s nerovností (1), kterou máme dokázat, vidíme, že na místě úsečky AD potřebujeme mít součet $BX + CX$. Pro tento součet podle trojúhelníkové nerovnosti pro body B, C, X platí

$$BC \leqq BX + CX, \tag{3}$$

přičemž

$$AD = BC, \tag{4}$$

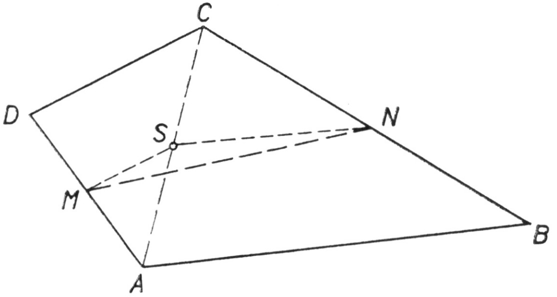
což plyne z toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník. Tak dostáváme nerovnost

$$AD \leqq BX + CX, \tag{5}$$

z níž a z nerovnosti (2) plyne

$$AX \leqq BX + CX + DX. \tag{6}$$

Nyní zbývá ještě rozřešit problém, zda v (6) může nastat rovnost. Ta by platila, právě když by platila rovnost současně v (2) a (5), tj. v (2) a (3), tedy právě když by bod X ležel zároveň na polopřímce opačné k polopřímce DA a na úsečce BC. To však není možné, neboť přímky AD a BC jsou různé rovnoběžky. Tedy pro každý bod X roviny rovnoběžníka $ABCD$ platí nerovnost (1).



Obr. 78

47. Je dán vypuklý čtyřúhelník $ABCD$. Označme M a N po řadě středy stran AD a BC.

Dokažte následující tvrzení: Jestliže

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD), \tag{1}$$

pak střed S úhlopříčky AC leží uvnitř úsečky MN a $AB \parallel CD$.

Řešení. Úsečky MS a SN jsou po řadě středními příčkami (obr. 78) trojúhelníků ACD a ABC. Tedy

$$MS \parallel CD, \quad SN \parallel AB, \tag{2}$$

$$MS = \frac{1}{2} CD, \quad SN = \frac{1}{2} AB,$$

takže

$$MS + SN = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Z předpokladu (1) tedy plyne

$$MS + SN = MN. \tag{3}$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro body M, N S platí

$$MS + SN \geqq MN,$$

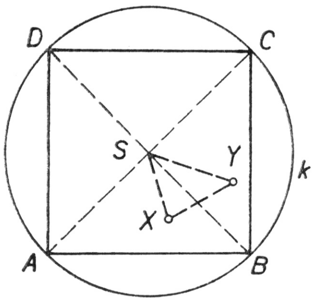
přičemž rovnost nastává, právě když bod S je vnitřním bodem úsečky MN. Tedy z rovnosti (3) vyplývá, že bod S je vnitřním bodem úsečky MN. Pak podle (2) je

$$MN \parallel AB \text{ a } MN \parallel CD,$$

tj.

$$AB \parallel CD.$$

48. Jsou dány dva různé body P a Q. Sestrojte čtverec **K**, který obsahuje body P a Q a má nejmenší možný obsah.



Obr. 79

Řešení. Nejprve dokážeme, že pro každý čtverec $ABCD$ platí: Jsou-li X a Y dva jeho body, pak

$$XY \leqq AC, \tag{1}$$

přičemž rovnost nastává, právě když X a Y jsou protější vrcholy čtverce $ABCD$.

Označme S střed čtverce $ABCD$ a u délku jeho úhlopříčky (obr. 79). Všechny body čtverce $ABCD$ náleží kruhu o středu S a poloměru $\frac{u}{2}$. Je tedy

$$d(SX) \leqq \frac{u}{2}, \; d(SY) \leqq \frac{u}{2}. \tag{2}$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro body S, X, Y platí

$$SX + SY \geqq XY, \tag{3}$$

odkud již vzhledem k nerovnosti (2) plyne nerovnost (1). Rovnost v nerovnosti (1) nastane, právě když platí rovnost v obou nerovnostech (2) a v nerovnosti (3), tj. právě když bod S je vnitřním bodem úsečky XY a body X, Y jsou vrcholy čtverce $ABCD$, tj. právě když X a Y jsou protější vrcholy čtverce $ABCD$.

Hledaný čtverec **K** má obsahovat dané body P, Q a mít přitom nejmenší možný obsah. Musí tedy mít nejmenší možnou stranu, a tedy nejmenší možnou úhlopříčku. Body P a Q jsou různé, a proto nejmenší možná délka úhlopříčky čtverce **K** je podle (1) rovna $d(PQ)$. Body P, Q jsou tedy protějšími vrcholy čtverce **K**. Odtud již plyne (obr. 80) konstrukce čtverce **K**.

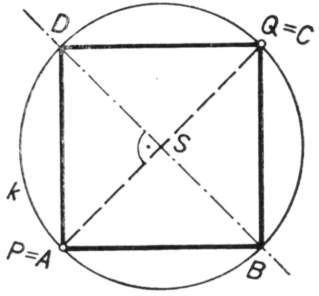
49. Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí: Jestliže

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA, \tag{1}$$

pak

$$AS < BS < CS. \tag{2}$$

Dokažte. Platí i věta obrácená k této větě?



Obr. 80

Řešení. Z předpokladu

$$\sphericalangle BCA < \sphericalangle ABC \tag{3}$$

plyne, že

$$\frac{1}{2} \sphericalangle BCA < \frac{1}{2} \sphericalangle ABC. \tag{4}$$

Bod S je však středem vepsané kružnice trojúhelníka ABC, takže z nerovnosti (4) dostáváme (obr. 81)

$$\sphericalangle SCB < \sphericalangle SBC. \tag{5}$$

Podle známé věty o vztahu mezi úhly a stranami trojúhelníka pak z trojúhelníka BSC dostáváme

$$BS < CS. \tag{6}$$

Z předpokladu

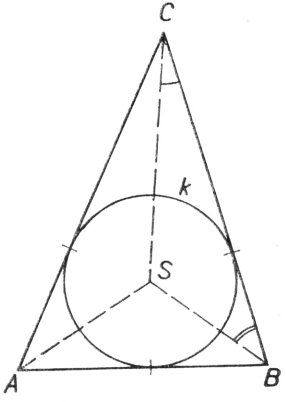
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB \tag{7}$$

dále obdobně plyne, že

$$\sphericalangle ABS < \sphericalangle SAB. \tag{8}$$

V trojúhelníku ABS je tedy

$$AS < BS. \tag{9}$$



Obr. 81

Nyní už stačí napsat nerovnosti (6) a (9) do jednoho zápisu tvaru (2) a věta je dokázána.

Zbývá ještě odpovědět na poslední otázku v textu úlohy. Nejprve však musíme zformulovat obrácenou větu. Ta zní:

Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí: Jestliže jsou splněny nerovnosti (2), pak platí nerovnosti (1). K důkazu této obrácené věty lze využít důkaz původní věty, stačí ho číst odzadu. Z nerovností (2) užijeme nerovnost (9), podle níž platí v trojúhelníku ABS nerovnost (8), z níž plyne nerovnost (7). Dále z nerovností (2) využijeme nerovnost (6), z níž postupně vyplynou nerovnosti (5), (4) a (3).