[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

II. Úlohy na výpočet velikosti obrazců a ploch

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 153–188.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405288

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

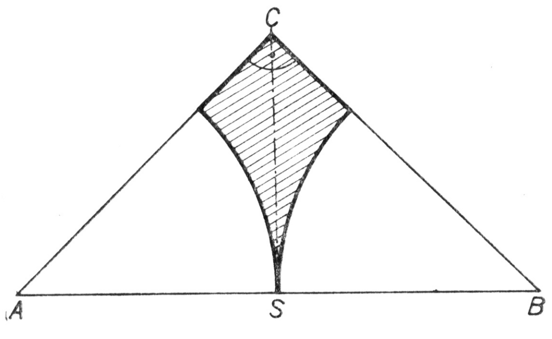
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

II. Úlohy na výpočet velikosti obrazců a ploch

9. Narýsujte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 0,7 dm. Kolem bodů A, B opište kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}AB$. Označte x obsah (v dm^2) té části trojúhelníka, která leží vně obou kružnic.

a) Vypočítejte číslo x $\left(\text{použijte } \pi \doteq \dfrac{22}{7}\right)$.

b) Kolik procent obsahu trojúhelníka ABC je obsah x?



Obr. 30

Řešení (obr. 30). a) Obsah P trojúhelníka ABC snadno vypočítáme, neboť $d(AB) = 0{,}7$ dm, $d(SC) = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}7$ dm, a je tedy

$$P = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}7$$

čili

$$P = \frac{1}{4} \cdot 0{,}7^2\ (\mathrm{dm}^2). \tag{1}$$

Kruhové výseče se středy A, B mají poloměr $r = \frac{1}{2}\, d(AB) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7$ dm. Protože středové úhly těchto výsečí mají velikost 45°, je součet Q obsahů těchto výsečí roven obsahu čtvrtkruhu.

Platí

$$Q = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}7\right)^2 = \frac{1}{16}\pi \cdot 0{,}7^2\ (\mathrm{dm}^2).$$

Pro obsah x vyšrafované části trojúhelníka (obr. 30) dostáváme

$$x = P - Q$$

čili

$$x = \frac{1}{4} \cdot 0{,}7^2 - \frac{1}{16}\pi \cdot 0{,}7^2 = \frac{1}{16} \cdot 0{,}7^2(4 - \pi).$$

Po výpočtu dojdeme k **odpovědi** a):

Obsah x vyšrafované části trojúhelníka ABC je přibližně 0,026 25 dm².

b) Označme písmenem p hledaný počet procent, P je základ a x procentová část; je tedy

$$x = \frac{p}{100} \cdot P$$

čili

$$p = \frac{100x}{P}.$$

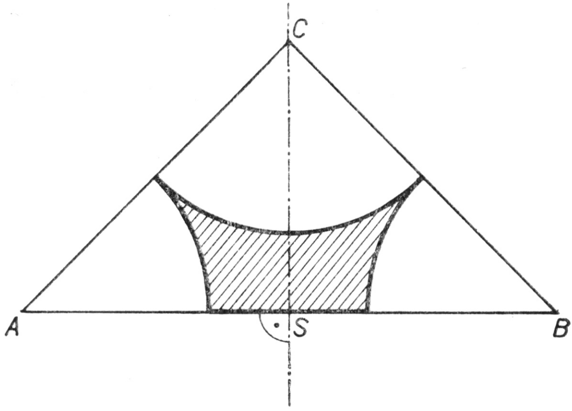
Dosadíme za x a P a dostaneme

$$p \doteq \frac{2{,}625}{\frac{1}{4} \cdot 0{,}7^2} \doteq 21{,}4.$$

Odpověď b): Obsah x uvažovaného obrazce je asi 21,4 % obsahu daného trojúhelníka ABC.

10. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC o odvěsnách CA a CB délky 2 dm. Kolem každého jeho vrcholu opíšeme kružnici o poloměru 1 dm. Oblouky těchto kružnic oddělí z trojúhelníka ABC tři kruhové výseče a z trojúhelníka zbude obrazec, jehož obsah označíme x.

Vypočtěte, kolik procent je obsah x z obsahu daného trojúhelníka.



Obr. 31

Řešení (obr. 31 zmenšený na jednu čtvrtinu). Označme P obsah trojúhelníka ABC a x obsah v textu uvažovaného obrazce; dále označme Q obsah tří kruhových výsečí, které od trojúhelníka ABC máme oddělit. Platí

$$P = \frac{1}{2} \cdot d(CA) \cdot d(CB) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

tedy je

$$P = 2\,(\mathrm{dm}^2). \tag{1}$$

Obsah Q je součet obsahů tří výsečí o poloměru $r = 1$, kruh o poloměru $r = 1$ má obsah πr^2, tj. π; dvě z těchto výsečí (při vrcholech A, B) mají tedy obsahy rovné $\frac{1}{8}\pi$ a třetí výseč (při vrcholu C) má obsah $\frac{1}{4}\pi$; je tedy

$$Q = 2 \cdot \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\pi,$$

tj.

$$Q = \frac{1}{2}\pi \,(\mathrm{dm}^2). \tag{2}$$

Z výsledků (1), (2) pro číslo $x = P - Q$ dostáváme

$$x = 2 - \frac{1}{2}\pi. \tag{3}$$

Položme $\pi \doteq \frac{22}{7}$; po dosazení do (3) obdržíme

$$x \doteq 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 2 - \frac{11}{7} = \frac{14 - 11}{7} = \frac{3}{7},$$

tj.

$$x \doteq \frac{3}{7}. \tag{4}$$

Označme p hledaný počet procent; je

$$p = \frac{x}{P} \cdot 100.$$

Dosaďme sem z (1) a (4); dostáváme přibližně

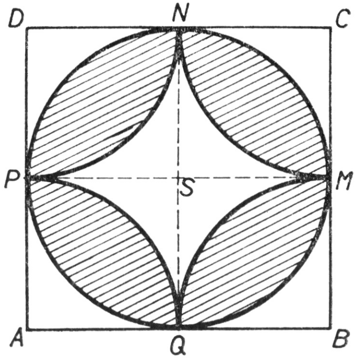
$$p \doteq \frac{3 \,.\, 100}{7} : 2 = \frac{3 \,.\, 100}{7} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}$$

neboli

$$p \doteq 21{,}43.$$

Odpověď. Hledaný obrazec je asi $21\frac{3}{7}$ % obsahu daného trojúhelníka.

11. Je dán čtverec *ABCD* o straně *a* a středu *S*. Čtverci je vepsána kružnice o středu *S*; z každého vrcholu čtverce jsou opsány čtvrtkružnice o poloměru rovném polovině strany čtverce (obr. 32). Kružnice a čtvrtkružnice omezují útvar, který je v obrázku vyšrafován.



Obr. 32

Kolik procent obsahu čtverce zaujímá vyčárkovaný obrazec? Závisí toto číslo na velikosti strany daného čtverce? $\left(\text{Položte } \pi \doteq \frac{22}{7}.\right)$

Řešení. Strana daného čtverce má velikost a centimetrů. Obsahy, které budeme počítat, budou pak udány v cm^2. Kružnice v našem obrázku 32 i každá ze čtyř čtvrtkružnic mají poloměry $r = \frac{1}{2} a$ neboli

$$a = 2r.$$

Střední příčky velkého čtverce na obrázku 32 rozdělují bílou plochu (tj. nevyčárkovanou) kolem bodu S na čtyři části. Každou z těchto částí dostaneme, když od čtverce (např. $AQSP$) o straně r oddělíme čtvrtkruh o poloměru r; střed tohoto čtvrtkruhu je v jednom z vrcholů velkého čtverce. Rovněž bílé plošky při vrcholech velkého čtverce vzniknou tak, že od čtverce o straně r oddělíme čtvrtkruh o poloměru r (střed je ve středu velkého čtverce). Dostáváme tak celkem osm bílých ploch, z nichž každá má týž obsah x. Tento obsah x je roven rozdílu obsahu r^2 malého čtverce a čtvrtkruhu o obsahu $\frac{1}{4} \pi r^2$, tedy

$$x = r^2 - \frac{1}{4} \pi r^2.$$

Všech osm bílých plošek má dohromady obsah

$$8x = 8\left(r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2\right)$$

neboli

$$8x = 8r^2 - 2\pi r^2.$$

Plochu, která je na obr. 32 vyčárkována, dostaneme, když od velkého čtverce oddělíme oněch osm bílých plošek. Označme y obsah vyčárkované plochy. Obsah velkého čtverce je $a^2 = (2r)^2$ neboli $a^2 = 4r^2$. Obsah $y = a^2 - 8x$ neboli

$$y = 4r^2 - (8r^2 - 2\pi r^2),$$

tj.

$$y = 2\pi r^2 - 4r^2 = 2r^2(\pi - 2).$$

Označíme p počet procent, y je procentová část a $4r^2$ (obsah velkého čtverce) je základ. Tu platí

$$p = \frac{y}{4r^2} \cdot 100$$

neboli

$$p = \frac{2r^2(\pi - 2)}{4r^2} \cdot 100.$$

Odtud po zkrácení dostaneme

$$p = \frac{\pi - 2}{2} \,.\, 100$$

neboli

$$p = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) .\, 100. \qquad (1)$$

Protože $\pi \doteq \frac{22}{7}$, je $\frac{\pi}{2} = \frac{11}{7} = 1{,}\overline{571\,428}$, a tedy $\frac{\pi}{2} - 1 \doteq$ $\doteq 0{,}571\,4$.

Je tedy

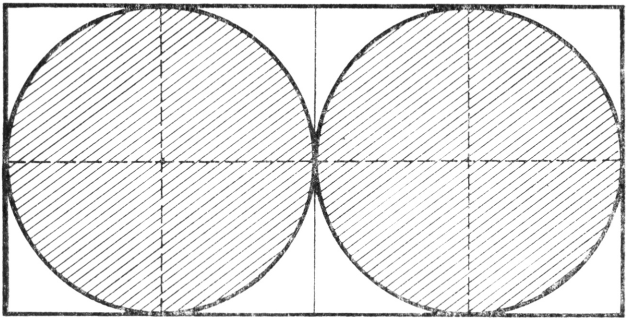
$$p \doteq 0{,}571\,4 \,.\, 100$$

neboli

$$p \doteq 57{,}14.$$

Odpověď. Obsah čárkované části na obr. 32 je přibližně 57 % obsahu čtverce o straně *a*. Protože číslo *p*, které jsme ve vztahu (1) vypočítali, nezávisí na velikosti poloměru *r*, a tím na velikosti *a* strany velkého čtverce, dospějeme k témuž výsledku při každém kladném čísle *a*.

Poznámka. Snadno usoudíme, že bílé plošky, o nichž jsme mluvili (viz obr. 32), jsou shodné s bílými ploškami na obr. 33.



Obr. 33

Proto obsah $8x$ těchto bílých plošek podle obr. 33 dostaneme, když od obsahu $2a^2$ dvou velkých čtverců odečteme obsah $2\pi r^2$ dvou kruhů, z nichž každý má poloměr r. Platí tedy

$$8x = 2(2r)^2 - 2\pi r^2$$

neboli

$$8x = 8r^2 - 2\pi r^2,$$

čímž bychom podstatně zkrátili předchozí výpočet.

Jiné řešení (obr. 32). Délka strany čtverce a je rovna $2r$, přičemž r je poloměr vepsané kružnice. Proto obsah čtverce

$$P = (2r)^2 = 4r^2,$$

což představuje 100 %; z toho 1 % je

$$\frac{4r^2}{100} = \frac{r^2}{25}.$$

Obsah kruhu do čtverce vepsaného je $P_1 = \pi r^2$, což představuje x % obsahu čtverce. Vypočteme nyní v procentech, jakou částí obsahu čtverce je obsah kruhu P_1. Zjistíme to dělením

$$\pi r^2 : \frac{r^2}{25} = 25\pi.$$

Potom platí, že

$$25\pi \doteq 25 \cdot \frac{22}{7} = 78\frac{4}{7}.$$

Obsah kruhu se rovná $78\frac{4}{7}$ % obsahu čtverce. Čtyři plošky při vrcholech čtverce se rovnají nevyčárkovanému obrazci uvnitř kruhu, to znamená, že jejich obsah je roven $P - P_1$, což v procentech činí:

$$100 - 78\frac{4}{7} = 21\frac{3}{7}$$

Obsah vyčárkovaného obrazce se rovná rozdílu obsahu kruhu a obrazce uvnitř kruhu. V procentech to znamená:

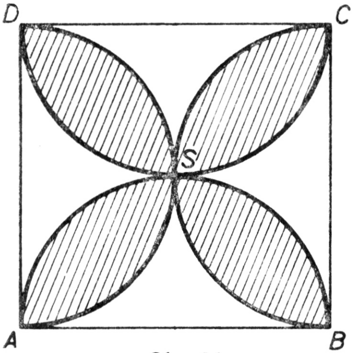
$$78\frac{4}{7} - 21\frac{3}{7} = 57\frac{1}{7}$$

Odpověď. Vyčárkovaný obrazec zaujímá asi $57\frac{1}{7}$ % obsahu čtverce.

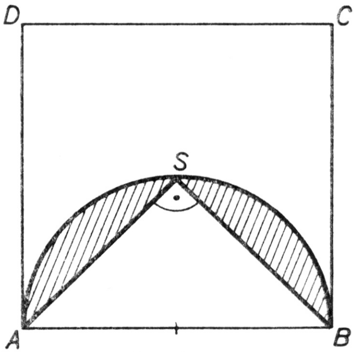
Z výrazu

$$\frac{\pi r^2 . 25}{r^2} = 25\pi$$

je vidět, že počet procent je nezávislý na délce strany čtverce, neboť se rovná 25π (r^2 se totiž zkrátí).



Obr. 34



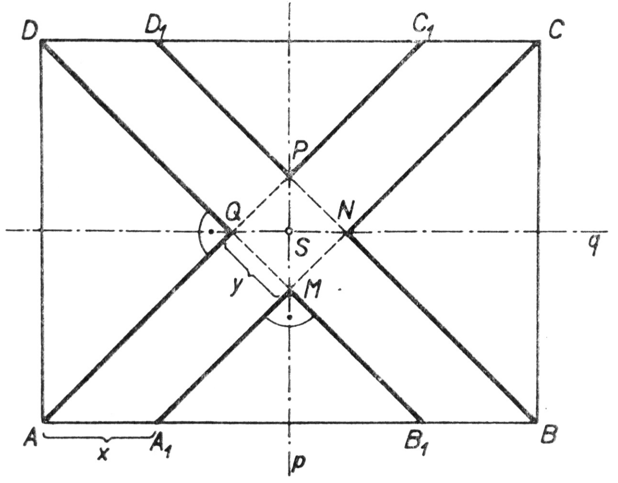
Obr. 35

Tentýž výsledek dostaneme řešením úlohy:

12. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky d. Kolem středu každé jeho strany opište polokružnici, která prochází středem čtverce $ABCD$.

Kolik procent z obsahu čtverce tvoří obsah vyčárkovaného obrazce (obr. 34)?

Řešení lze provést postupem vycházejícím z obr. 35, tj. od obsahu polokruhů s průměrem AB odečteme obsah rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka ABS a dostaneme obsah jednoho »lístku«. Výsledek úlohy je týž jako v úloze 11.



Obr. 36

13. Park tvaru obdélníka $ABCD$ má rozměry $d(AB) = 240$ m, $d(AD) = 232$ m. Parkem vedou dvě stejně široké navzájem kolmé hlavní cesty (viz obr. 36).

a) Vypočítejte výměru obou cest dohromady. b) Zjistěte, kolik procent (s přesností na desetiny) z celého parku připadá na obě cesty dohromady.

Řešení. a) Velikosti úseček budeme udávat v metrech a obsahy v m^2. Použijeme označení zavedené na obr. 36. Celý útvar je souměrný podle os $p \perp AB$, $q \perp BC$, vedených středem S

obdélníka $ABCD$. Proto body M, P leží na přímce p a body N, Q na přímce q.

Pro výpočet výměry cest bude třeba určit šířku cest; ta bude známa, zjistíme-li společnou délku úseček $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = x$. Vzhledem k souměrnosti podle přímky q je pravoúhlý trojúhelník BCN rovnoramenný a jeho přepona BC má délku 232. Jeho odvěsna NB je i odvěsnou pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka A_1BN; platí tedy

$$\triangle BCN \cong \triangle A_1BN,$$

takže také $BC = A_1B$ čili $232 = 240 - x$. Je tedy

$$x = 8.$$

Z rovnoběžníka AA_1NQ plyne, že $d(QN) = 8$. Je tedy šířka cesty $QM = y$ rovna délce strany čtverce $QMNP$ s úhlopříčkou QN, tj.

$$y = 4\sqrt{2}.$$

Výměru V obou cest dohromady dostaneme jako součet obsahů dvou shodných rovnoběžníků AA_1CC_1 a B_1BD_1D, zmenšený o obsah čtverce $QMNP$. Rovnoběžník AA_1CC_1 má ke straně AA_1 příslušnou výšku $v = d(BC) = 232$. Je tedy

$$V = 2 \cdot 8 \cdot 232 - (4\sqrt{2})^2,$$

tj.

$$V = 3\,712 - 16 \cdot 2$$

čili

$$V = 3\,680 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Poznámka. Výpočtu šířky y cest bychom se mohli vyhnout, kdybychom obsah čtverce $QMNP$ vyjádřili jako polovinu obsahu čtverce se stranou QN velikosti x, tj. $\frac{x^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32$.

b) Výměra 3 680 m² představuje procentovou část vzhledem k základu, jímž je obsah pozemku $ABCD$, tj.

$$232 \,.\, 240 = 55\,680 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Máme tedy vypočítat, kolik procent p je 3 680 ze základu 55 680. Pro p platí

$$\frac{55\,680}{100} \,.\, p = 3\,680$$

čili

$$p = \frac{3\,680 \,.\, 100}{55\,680}.$$

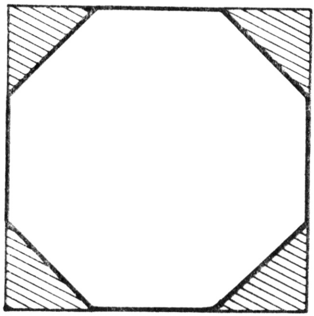
Po úpravě krácením a dělením dostaneme

$$p \doteq 6{,}6.$$

Odpověď. Obě cesty mají dohromady výměru 3 680 m^2 a zaujímají asi 6,6 % celkové výměry parku.

14. Plechová podložka má tvar čtverce o straně délky 8 dm. Při každém vrcholu tohoto čtverce máme odříznout stejnou část tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka tak, aby se hmotnost podložky zmenšila a) o 18 %; b) o 72 %.

Vypočtěte velikost odvěsen odříznutých trojúhelníků. Dále rozhodněte, zda je možné obojí odříznutí provést.



Obr. 37

Řešení. Čtvercová podložka má čtvercovou stěnu o straně délky 8 dm; tato stěna má obsah 64 dm^2. Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, který odřízneme, má odvěsnu velikosti x dm; součet obsahů všech těchto čtyř trojúhelníků je $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ (obr. 37). V našem případě musí být $x \leqq 4$, jinak by se odříznutí nedalo provést.

Protože tloušťka podložky i hustota jejího materiálu je všude stejná, stačí, když místo hmotnosti uvažujeme jen obsah čtvercové stěny podložky.

a) 18 % ze 64 je 64.0,18; toto číslo má být rovno $2x^2$, tj. má platit

$$2x^2 = 64 . 0{,}18$$

neboli

$$x^2 = 64 . 0{,}09.$$

Je tedy

$$x = 8 . 0{,}3,$$

tj.

$$x = 2{,}4.$$

Protože je $2{,}4 < 4$, lze odříznutí provést (obr. 37). Zkouškou bychom se přesvědčili o správnosti výpočtu.

Odpověď. Abychom hmotu podložky zmenšili o 18 %, je nutno v každém rohu podložky odříznout pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnou délky 2,4 dm.

b) 72 % ze 64 dm^2 je 64.0,72. Má platit

$$2x^2 = 64 . 0{,}72$$

neboli

$$x^2 = 64 . 0{,}36.$$

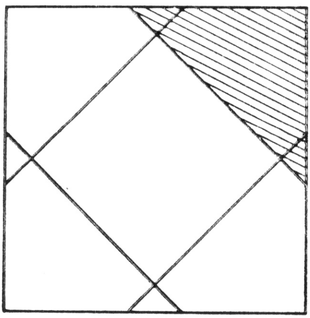
Je tedy

$$x = 8 . 0{,}6,$$

tj.

$$x = 4{,}8.$$

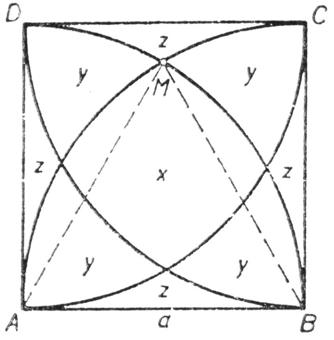
Protože je $4{,}8 > 4$, nelze odříznutí provést (obr. 38).



Obr. 38

Odpověď. Požadavky úlohy nelze tedy v případě b) splnit a úloha je neřešitelná.

15. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Kolem jeho vrcholů jsou opsány vnitřkem čtverce čvrtkružnice s poloměrem a. Tím se čtverec rozdělí na 9 částí tří různých tvarů (obr. 39). Vypočítejte obsahy těchto částí.



Obr. 39

Řešení. Průsečík oblouků opsaných okolo bodů A, B označme M. Písmeny x, y, z označme obsahy vzniklých ploch tak jako na obr. 39. Potom platí

$$z = P - (P_1 + 2P_2),$$

kde P je obsah čtverce $ABCD$ se stranou délky a, P_1 je obsah rovnostranného trojúhelníka ABM se stranou délky a a P_2 je obsah kruhové výseče s poloměrem a a středovým úhlem velikosti 30° (tj. $2P_2$ je součet obsahů výsečí AMD a BCM). Platí tedy

$$z = a^2 - \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} - 2\pi a^2 . \frac{30}{360},$$

tj.

$$z = \frac{a^2}{12} (12 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0{,}043\, a^2. \qquad (1)$$

Dále je

$$y = P - (P_3 + 2z),$$

kde P_3 je obsah čtvrtkruhu ABD s poloměrem a, tj.

$$y = \frac{a^2}{12}(\pi + 6\sqrt{3} - 12) \doteq 0{,}128\, a^2. \tag{2}$$

Pro x platí

$$x = P - (4y + 4z),$$

tj.

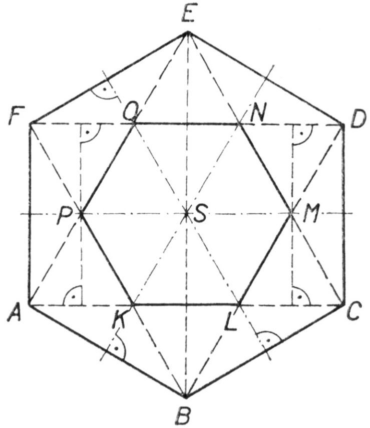
$$x = \frac{a^2}{3}(3 + \pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0{,}315\, a^2. \tag{3}$$

Odpověď. Řešení úlohy je dáno vztahy (1), (2) a (3).

16. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Trojúhelníky ACE a BDF se protínají opět v pravidelném šestiúhelníku. Dokažte, že jeho obsah se rovná třetině obsahu šestiúhelníka $ABCDEF$.

Řešení. Pozorně si prohlédněte obr. 40 a dokažte, že šestiúhelník $ABCDEF$ je sjednocením 36 shodných pravoúhlých trojúhelníků, které mají ostré vnitřní úhly 60° a 30° a jejichž delší odvěsna je rovna polovině strany daného šestiúhelníka.

Přitom žádné dva z těchto trojúhelníků se nepřekrývají. Šestiúhelník $KLMNOP$, který je průnikem trojúhelníků ACE a BDF, je sjednocením dvanácti těchto trojúhelníků. Odtud již plyne tvrzení úlohy.



Obr. 40

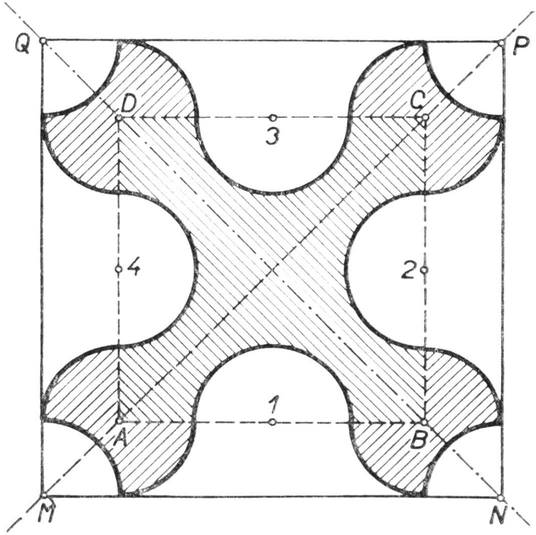
17. Na obr. 41 je znázorněna plechová součástka, jejíž obvod se skládá z oblouků shodných kružnic s daným poloměrem a. Středy oblouků jsou v obrázku vyznačeny kroužky. Přitom $ABCD$, $MNPQ$ jsou čtverce, jejichž úhlopříčky leží ve dvou navzájem kolmých přímkách $MACP$, $NBDQ$. Přitom je $d(AB) = 4a$, $d(MN) = 6a$.

a) Narýsujte obrázek součástky, je-li $a = 2{,}5$ cm.

b) Vyjádřete obsah obrazu součástky pomocí čísla a.

c) Vyjádřete pomocí čísla a hmotnost 1 000 kusů součástek, jestliže 1 m^2 plechu, z kterého jsou vyrobeny, váží 8,5 kg. Výpočet proveďte pro $a = 2{,}5$ cm.

Řešení. a) Obrázek součástky je zmenšen na dvě pětiny (obr. 41).

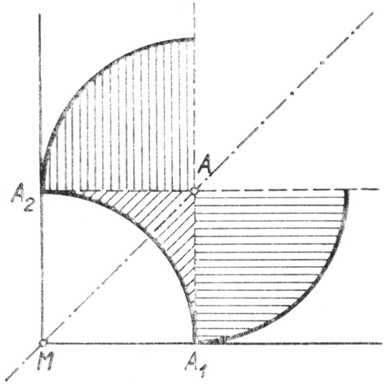


Obr. 41

b) Protože číslo a udává velikost úseček v centimetrech, vypočteme obsah P vyšrafované plochy v obr. 41 v centimetrech čtverečných. Obvod čtverce $ABCD$ rozděluje plochu součástky ve dvě nepřekrývající se části. První část je znázorněna vyšrafovanou plochou ve čtverci $ABCD$; její obsah označíme x. Druhá část je znázorněna čtyřmi vyšrafovanými plochami, z nichž každá leží ve čtverci $MNPQ$. Jedna z těchto ploch je znázorněna ve zvětšení v obr. 42, a to plocha, která leží při vrcholu A; její obsah označíme y. Výpočty provedeme odděleně.

Obsah čtvrtkruhu o poloměru a označíme K; obsah celého kruhu o poloměru a je

$$4K = \pi a^2. \tag{1}$$



Obr. 42

I. Výpočet obsahu x první části vyšrafované plochy: Obsah x dostaneme, když od obsahu čtverce $ABCD$ odečteme obsah čtyř polokruhů o poloměru a (středy polokruhů jsou v bodech 1, 2, 3, 4). Čtverec $ABCD$ má stranu délky $4a$; jeho obsah je $(4a)^2 = 16\,a^2$. Obsah jednoho polokruhu je $2K$, všech čtyř je $8K$. Proto je

$$x = 16a^2 - 8K. \tag{2}$$

II. Výpočet obsahu druhé části vyšrafované plochy: Obsah y plochy naznačené v obr. 42 dostaneme, když od obsahu čtverce MA_1AA_2 o straně MA_1 délky a odečteme obsah jednoho čtvrtkruhu (jeho střed je v M a poloměr má délku a) a k tomu přičteme obsahy dvou čtvrtkruhů o středu A a délce poloměru a. Obsah čtverce MA_1AA_2 je a^2, obsah čtvrtkruhu je K; je tedy $y = (a^2 - K) + 2K$ neboli $y = a^2 + K$. Obsah $4y$ druhé části tudíž je

$$4y = 4(a^2 + K). \tag{3}$$

III. Vypočteme obsah P celé vyšrafované plochy, tj. určíme součet obsahů všech nepřekrývajících se obrazců. Tu platí $P = x + 4y$. Dosaďme sem z výsledků (2) a (3); dostaneme postupně

$$P = (16a^2 - 8K) + 4(a^2 + K),$$

$$P = 16a^2 - 8K + 4a^2 + 4K,$$

$$P = 20a^2 - 4K.$$

Do tohoto výsledku dosadíme ze vzorce (1); obdržíme postupně

$$\left.\begin{aligned} P &= 20a^2 - \pi a^2, \\ P &= a^2(20 - \pi), \end{aligned}\right. \tag{4}$$

což je hledaný výsledek. Tím je úloha b) rozřešena.

c) Označme Q hmotnost 1 000 kusů součástek v kilogramech. Protože je udána hmotnost 1 m^2 plechu, převedeme obsah P

ve výsledku (4) na čtverečné metry. Platí 1 $m^2 = 100\ dm^2 = 100 . 100\ cm^2 = 10\,000\ cm^2$. Obsah součástky v metrech čtverečných je proto $\frac{1}{10\,000} . a^2 (20 - \pi)$ a hmotnost jedné součástky v kilogramech je

$$\frac{1}{10\,000} . a^2 (20 - \pi) . 8{,}5.$$

Hmotnost Q je 1 000krát větší, tj.

$$Q = \frac{1}{10\,000} . a^2 (20 - \pi) . 8{,}5 . 1\,000;$$

postupnou úpravou dostaneme

$$Q = \frac{1}{10} . a^2 (20 - \pi) . 8{,}5,$$

což je hledaná hmotnost 1 000 součástek vyjádřená užitím čísla a.

Jestliže nyní je $a = 2{,}5$, dostaneme odtud postupně

$$Q = 2{,}5^2 . (20 - \pi) . 0{,}85,$$

$$Q = 6{,}25 . 0{,}85 . (20 - \pi).$$

Výpočet proveďme pro $\pi \doteq \frac{22}{7}$. Tu je

$$20 - \pi \doteq 20 - \frac{22}{7} = \frac{140 - 22}{7} = \frac{118}{7}\text{; je tedy}$$

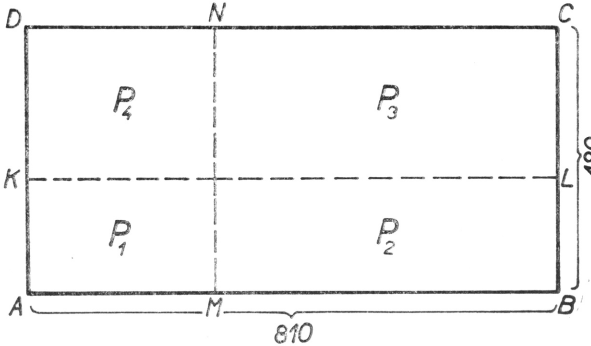
$$Q \doteq 5{,}31 . \frac{118}{7} = (5{,}31 . 118) . \frac{1}{7} \doteq 627 . \frac{1}{7} \doteq 89{,}6.$$

Odpověď. 1 000 kusů plechových součástek má hmotnost asi 90 kg.

18. Pole tvaru obdélníka $ABCD$ má rozměry $d(AB) = 810$ m, $d(AD) = 180$ m. Toto pole je třeba rozdělit na čtyři obdélníky s obsahy P_1, P_2, P_3, P_4 jako na obr. 43. Přitom má platit

$$P_1 = 2{,}03 \text{ ha}, \; P_4 = 3{,}19 \text{ ha}.$$

Vypočítejte a) obsahy P_2, P_3; b) obvody všech obdélníků.



Obr. 43

Řešení (obr. 43).

a) Abychom úlohu rozřešili, musíme určit velikosti úseček AM, AK; jejich pomocí už snadno vypočítáme rozměry všech vzniklých obdélníků. (Písmeny P_1, P_2, P_3, P_4 budeme značit jak dané obdélníky, tak jejich obsahy.)

Obsah obdélníka $AMND$ je $P_1 + P_4$, jeden jeho rozměr je $d(AD) = 180$ m; druhý rozměr $d(AM)$ vypočítáme tak, že obsah obdélníka dělíme rozměrem $d(AD)$. Uvedeme-li délku úseček v metrech a obsahy ve čtverečných metrech, platí

$$P_1 = 20\,300 \text{ m}^2, P_4 = 31\,900 \text{ m}^2$$

a dále

$$d(AM) = 52\,200 : 180 = 290 \text{ (m)}. \qquad (1)$$

Nyní obdobně vypočítáme délku úsečky AK jako podíl obsahu obdélníka P_1 a délky druhé strany AM. Platí

$$d(AK) = 20\,300 : 290 = 70 \text{ (m)}. \qquad (2)$$

Z výsledků (1) a (2) vypočítáme zbývající rozměry obdélníků P_2, P_3, tj. $d(MB) = 520$ m, $d(KD) = d(LC) = 110$ m. Je tedy

$$P_2 = d(MB).d(AK) = 520.70 = 36\,400 \text{ (m}^2\text{)}, \qquad (3)$$

$$P_3 = d(MB).d(LC) = 520.110 = 57\,200 \text{ (m}^2\text{)}. \qquad (4)$$

Zkoušku provedeme sečtením obsahů obdélníků P_1, P_2, P_3, P_4; snadno se přesvědčíte, že dostanete obsah P obdélníka

$ABCD$, tj. 145 800 m^2. Výsledky (3) a (4) jsou tedy řešením úlohy.

b) Označme o_1, o_2, o_3, o_4 (v tomto pořadí) obvody obdélníků P_1, P_2, P_3, P_4. Pak platí

$$o_1 = 2.(d(AM) + d(AK)) = 2(290 + 70) = 720 \text{ (m)},$$

$$o_2 = 2.(d(MB) + d(AK)) = 2(520 + 70) = 1\,180 \text{ (m)},$$

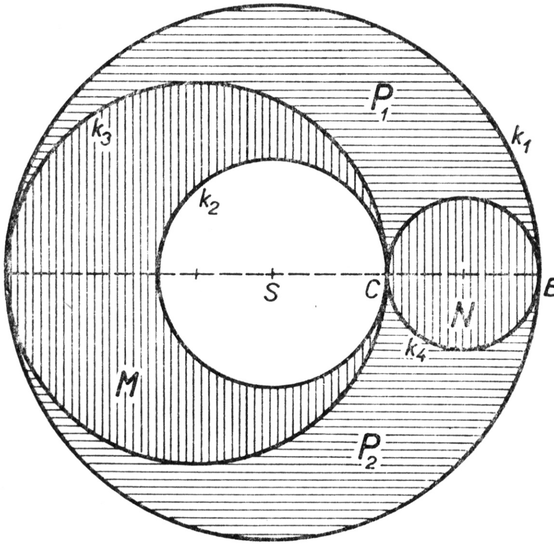
$$o_3 = 2.(d(MB) + d(KD)) = 2(520 + 110) = 1\,260 \text{ (m)},$$

$$o_4 = 2.(d(AM) + d(KD)) = 2(290 + 110) = 800 \text{ (m)}.$$

Zkoušku provedeme např. tak, že součet obvodů $o_1 + o_2 + o_3 + o_4$ porovnáme s dvojnásobným obvodem obdélníka $ABCD$; druhý obvod odpovídá dvojnásobně počítanému součtu délek úseček MN a KL.

19. Na obr. 44 jsou dány soustředné kružnice $k_1 = (S; x)$, $k_2 = (S; y)$, přičemž je $x > y$. Úsečka AB je průměrem kružnice k_1, bod C leží na kružnici k_2 a uvnitř úsečky SB. Nad úsečkami AC, BC jako průměry opíšeme kružnice k_3, k_4.

Součet $P_1 + P_2$ obsahů vodorovně vyčárkovaných ploch je roven součtu $M + N$ obsahů ploch vyčárkovaných svisle. Dokažte.



Obr. 44

Řešení (obr. 44). Obsahy kruhů k_1, k_2, k_3, k_4 označme po řadě p_1, p_2, p_3, $p_4 = N$. Poloměry kružnic k_3, k_4 jsou po řadě $r_3 = \frac{1}{2}\, d(AC)$, $r_4 = \frac{1}{2}\, d(CB)$, kde $d(AC) = d(AS) + d(SC) = x + y$, $d(CB) = d(SB) - d(SC) = x - y$; proto je

$$r_3 = \frac{1}{2}\,(x + y),\; r_4 = \frac{1}{2}\,(x - y).$$

Je proto

$$p_1 = \pi x^2,\; p_2 = \pi y^2,\; p_3 = \frac{\pi}{4}\,(x + y)^2,\; p_4 = \frac{\pi}{4}\,(x - y)^2.$$

Je tedy

$$P_1 + P_2 = p_1 - p_3 - p_4 =$$

$$= \frac{\pi}{4}[4x^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2] =$$

$$= \frac{\pi}{4}[2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2}(x^2 - y^2). \tag{1}$$

Dále je

$$M = p_3 - p_2 = \frac{\pi}{4}(x + y)^2 - \pi y^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4}[(x + y)^2 - 4y^2],$$

$$N = p_4 = \frac{\pi}{4}(x - y)^2,$$

a tedy

$$M + N = \frac{\pi}{4}[(x + y)^2 - 4y^2 + (x - y)^2] =$$

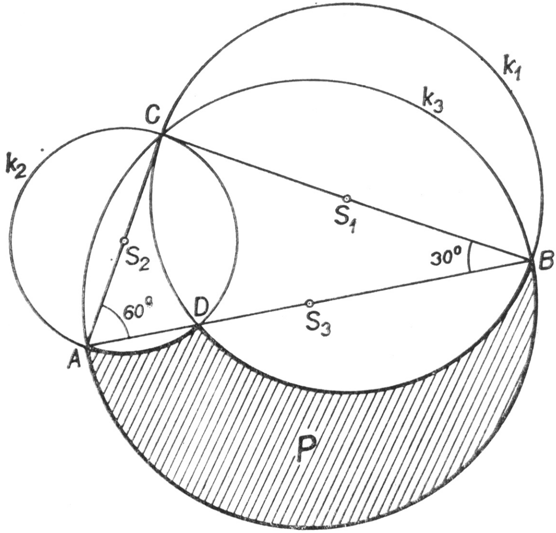
$$= \frac{\pi}{4}[2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2}(x^2 - y^2). \tag{2}$$

Porovnáním výsledků (1), (2) vyplývá

$$P_1 + P_2 = M + N,$$

což jsme měli dokázat.

20. Je dán trojúhelník ABC, jehož úhly mají velikosti $\sphericalangle BAC = 60°$, $\sphericalangle ABC = 30°$ a strana AC má velikost 1. Vypočtěte obsah vyšrafované plochy (obr. 45), která je omezená kružnicemi sestrojenými nad průměry AB, BC, CA (na dvě desetinná místa).



Obr. 45

Řešení. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $\sphericalangle ACB = 90°$. Označme D patu výšky k přeponě. Podle obrácení Thaletovy věty procházejí kružnice k_1, k_2 sestrojené nad odvěsnami BC, CA bodem D. Pro délky stran trojúhelníka ABC platí

$$AC = 1, AB = 2, BC = \sqrt{3}. \tag{1}$$

Označme P obsah vyšrafované plochy, P_1, P_2 obsahy úsečí omezených tětivami BD, AD a kružnicemi k_1, k_2; středy těchto kružnic označme S_1, S_2. Pak platí vzhledem k (1)

$$P = \frac{1}{2}\pi - P_1 - P_2. \tag{2}$$

Obsahy P_1, P_2 vypočteme pomocí středových úhlů

$$\sphericalangle BS_1D = 120°, \sphericalangle AS_2D = 60°.$$

Je tedy vzhledem k (1)

$$P_1 = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{360}.120 - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4}\sqrt{3}$$

čili

$$P_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \tag{3}$$

$\Big($trojúhelník BDS_1 má týž obsah jako rovnostranný trojúhelník

o straně délky $\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$. Rovnost (3) po úpravě zní

$$P_1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{3\sqrt{3}}{16}. \tag{4}$$

Obdobně dostaneme

$$P_2 = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{360}.60 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

čili

$$P_2 = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

po úpravě

$$P_2 = \frac{1}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{16}. \tag{5}$$

Dosadíme-li z (4) a (5) do (2), vyjde

$$P = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

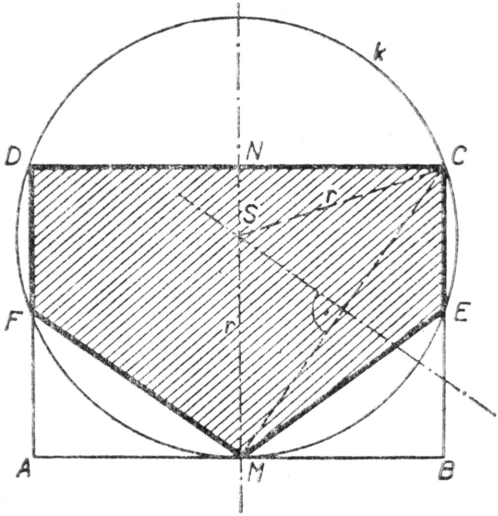
Numericky

$$P = (3{,}14 . 5) : 24 + (1{,}73 : 4) \doteq 0{,}65 + 0{,}43,$$

tedy

$$P \doteq 1{,}08.$$

21. Je dán obdélník $ABCD$. Bod M je středem strany AB. Uvnitř stran BC, AD sestrojte body E, F tak, aby bylo možno pětiúhelníku $MECDF$ opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníka pomocí délek stran obdélníka. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 46

Řešení. Situaci zachycuje obr. 46. Kružnice k opsaná pětiúhelníku $MECDF$ je opsaná i rovnoramennému trojúhelníku MCD. Její střed je průsečíkem osy úsečky CD a osy úsečky MC. Označme N střed strany CD, r poloměr kružnice k, $a = d(AB)$, $b = d(BC)$ délky stran obdélníka. Potom

$$d(SC) = d(SM) = r, d(SN) = b - r, d(CN) = \frac{1}{2}a,$$

a podle Pythagorovy věty platí

$$(b - r)^2 + \frac{a^2}{4} = r^2. \tag{1}$$

Z (1) po úpravě dostaneme

$$r = \frac{4b^2 + a^2}{8b}. \tag{2}$$

Ze vzorce (2) vyjde vždy $r > 0$. Dále je $r < b$ právě tehdy, když $4b^2 + a^2 < 8b^2$ neboli $4b^2 > a^2$, tj. $2b > a$ čili

$$b > \frac{a}{2}. \tag{3}$$

Nerovnost (3) je podmínkou řešitelnosti, jak vyplývá z obrácení postupu.

Výpočet obsahu pětiúhelníka $MECDF$:

Protože trojúhelník CES je rovnoramenný, platí

$$d(CE) = d(DF) = 2d(SN) = 2(b - r). \qquad (4)$$

Protože platí $BE = BC - CE$, je vzhledem ke (4)

$$d(BE) = b - 2(b - r) = 2r - b. \qquad (5)$$

Pětiúhelník $MECDF$ vznikne sjednocením obdélníku $ECDF$ a rovnoramenného trojúhelníku MEF. Jeho obsah P je tedy vzhledem ke (4) a (5)

$$P = a.2(b - r) + \frac{1}{2}a(2r - b) = \frac{a}{2}(3b - 2r). \qquad (6)$$

Po dosazení za r ze vzorce (2) do (6) dostaneme po úpravě

$$P = ab - \frac{a^3}{8b}. \qquad (7)$$

Odpověď. Poloměr r hledané kružnice je dán vzorcem (2) a obsah pětiúhelníku vzorcem (7). Úloha má řešení jen pro

$$b > \frac{1}{2}a.$$