[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

IV. Úlohy z reality

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 99–131.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405285

IV. Úlohy z reality

62. Dílna splnila v prvním týdnu plán, tj. vyrobila n výrobků. V druhém týdnu poklesla výroba proti prvnímu týdnu o p %. O kolik procent proti druhému týdnu musela dílna zvýšit výkon v třetím týdnu, aby koncem třetího týdne byl splněn třítýdenní plán?

Řešení. Prvním úkolem při řešení tzv. slovní úlohy je sestavit z ní matematickou úlohu (často to bývá rovnice nebo několik rovnic či nerovnic), jejíž řešení nám umožní rozřešit úlohu z reality (ze života). Při sestavení matematické úlohy jde o nahrazení slov matematickými symboly, tj. písmeny a znaky pro operace (+, —, : atd.). Některá z písmen jsou dána už v textu úlohy, některá si musíme zvolit. V naší úloze je označen počet výrobků n, počet procent poklesu p; musíme zvolit označení (x) pro počet procent růstu výroby v třetím týdnu.

Při vyjádření počtu výrobků v jednotlivých týdnech si musíme bedlivě všimnout, z jakého základu jsou vzata procenta. Vyplatí se vždy zapsat potřebné údaje do tabulky:

	1. týden	2. týden	3. týden	Období 1. až 3. týden
Počet výrobků	n	$n\left(1-\frac{p}{100}\right)$	$n\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot$ $\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)$	$3n$
Vzrůst (pokles) v % proti předešlému týdnu	—	p	x	—

V tabulce jsme už použili údaje z textu úlohy, že ve třech týdnech má být splněn plán ($3n$ výrobků). Mimoto užíváme věty: Zvětšíme-li, resp. zmenšíme-li číslo n (počet výrobků) o p procent, dostaneme číslo $n\left(1+\frac{p}{100}\right)$, resp. $n\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Podle textu úlohy je

$$n+n\left(1-\frac{p}{100}\right)+n\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=3n. \qquad (1)$$

Rovnici (1) dělíme kladným číslem n a dostaneme lineární rovnici pro jedinou neznámou x:

$$1+1-\frac{p}{100}+1-\frac{p}{100}+\frac{x}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)=3,$$

po úpravě

$$\frac{x}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)=\frac{2p}{100},$$

$$x(100-p)=200p,$$

$$x=\frac{200p}{100-p}. \tag{2}$$

Je totiž $100-p\neq 0$, neboť je $p\neq 100$; jinak by v druhém týdnu dílna vůbec nepracovala.

Vzorec (2) dává výsledek, který ověříme **zkouškou.**
Z (2) totiž vyplývá, že

$$1+\frac{x}{100}=\frac{100+p}{100-p}.$$

Počet výrobků v třetím týdnu je pak podle tabulky

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{n}{100}(100-p)\,.\,\frac{100+p}{100-p}=$$
$$=n\left(1+\frac{p}{100}\right);$$

součet výrobků z 1. a 3. týdne je potom skutečně $3n$, protože

$$n+n\left(1-\frac{p}{100}\right)+n\left(1+\frac{p}{100}\right)=$$
$$=n+n\left(1-\frac{p}{100}+1+\frac{p}{100}\right)=$$
$$=n+2n=3n.$$

Např. pro $n = 10$ dostaneme z (2) $x = \frac{200}{9} \doteq 22,2\ \%$.

63. V továrně pracovalo 1 440 zaměstnanců (mužů a žen). Za vzornou práci dostalo prémie 18,75 % mužů a 22,5 % žen. Vedení továrny vyhlásilo, že prémiemi bylo odměněno 20 % zaměstnanců. Kolik mužů a kolik žen bylo zaměstnáno v továrně?

Řešení. Neznámý počet zaměstnaných mužů označíme x, počet zaměstnaných žen označíme y. Všimněme si, jakého typu je matematická formulace úlohy. Jsou to dvě lineární rovnice

$$\begin{aligned} x + y &= s, \\ ax + by &= cs. \end{aligned} \tag{1}$$

V našem případě je $s = 1\,440$, $a = 0{,}187\,5$, $b = 0{,}225$, $c = 0{,}20$. Typ úlohy je tento: Je dán součet s hledaných čísel a součet jistých částí hledaných čísel je jistá známá část součtu s. Přepišme znovu soustavu (1) s číselnými údaji:

$$\begin{aligned} x + y &= 1\,440 \\ 0{,}187\,5x + 0{,}225y &= 0{,}2\,.\,1\,440 \end{aligned} \tag{2}$$

Dosadíme z první rovnice (2) za y do druhé:

$$0{,}187\,5x + 0{,}225\,(1\,440 - x) = 0{,}2\,.\,1\,440$$

neboli

$$(0{,}187\,5 - 0{,}225)x = (0{,}2 - 0{,}225) \,.\, 1\,440$$

neboli

$$-0{,}037\,5x = -0{,}025 \,.\, 1\,440$$

neboli

$$375x = 25 \,.\, 14\,400.$$

Odtud plyne $15x = 14\,400$ a dále

$$x = 960;$$

z první rovnice (2) pak vyjde

$$y = 480.$$

Zkouškou ověříme správnost výpočtu.

64. Při omezování odběru elektrické energie v době špiček se 35 závodů zavázalo k snížení spotřeby. Celkem byly tři skupiny závodů: V první skupině každý závod dosáhl snížení na 50 % pravidelného odběru, v druhé snížil každý závod spotřebu o $\frac{1}{3}$, ve třetí o $\frac{1}{4}$ pravidelného odběru.

Tím se dosáhlo úspory 40 % celkové pravidelné spotřeby. Přitom v první skupině byl počet závodů dvojnásobný než v druhé a původně měl každý z 35 závodů tutéž spotřebu. Kolik bylo závodů v každé skupině?

Řešení. Označíme písmeny neznámé počty závodů: v druhé skupině bylo x závodů, v první $2x$ závodů, v třetí y závodů.

Je tedy $2x + x + y = 35$ neboli

$$3x + y = 35. \tag{1}$$

Dále označme m kWh spotřebu elektrické energie, kterou původně odbíral každý z 35 závodů v době špičky. Celková původní spotřeba v době špičky byla $35\,m$ kWh.

Zapišme původní i snížené spotřeby jednotlivých skupin do tabulky:

	První skupina závodů	Druhá skupina závodů	Třetí skupina závodů	Celkem
Původní spotřeba	$2xm$	xm	ym	$35m$
Snížená spotřeba	$\frac{50}{100} \cdot 2xm$	$\frac{2}{3} \cdot xm$	$\frac{3}{4} \cdot ym$	$\frac{60}{100} \cdot 35m$

Podle textu úlohy je

$$xm + \frac{2}{3}xm + \frac{3}{4}ym = \frac{3}{5} \,.\, 35\,m;$$

po úpravě dostaneme

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{4}y = 21$$

a dále

$$20x + 9y = 252. \qquad (2)$$

K rovnici (2) připojíme rovnici (1) a vyloučíme y; vyjde

$$20x + 9(35 - 3x) = 252$$

a dále

$$7x = 63,$$

$$x = 9.$$

Z rovnice (1) vyjde $y = 8$.

V první skupině je tedy $2 . 9 = 18$ závodů, v druhé 9 a v třetí 8.

Zkouškou ověříme, že výsledek je správný (při zkoušce počítáme vlastně údaje z tabulky).

65. Na chmelové brigádě soutěžily dvě třídy v česání chmele. Jedna třída o 39 žácích pracovala 9 dní a natrhala 2 282 věrtelů. Druhá třída o 31 žácích pracovala 8 dní a natrhala 1 959 věrtelů. Přitom jeden žák z této třídy onemocněl a čtyři dni nepracoval. Která třída měla vyšší průměrný denní pracovní výkon na osobu?

Řešení. Výkon první třídy by splnilo za jeden den $39 \,.\, 9 = 351$ žáků. Průměrný denní výkon na osobu je tedy

$$\frac{2\,282}{351} \doteq 6{,}5 \text{ (věrtele).}$$

Výkon druhé třídy by splnilo za jeden den $31 \,.\, 4 + 30 \,.\, 4 = 124 + 120 = 244$ žáků (ve skutečnosti 4 dni pracovalo 31 žáků, 4 dni jen 30 žáků). Průměrný denní výkon na osobu je tedy

$$\frac{1\,959}{244} \doteq 8{,}0 \text{ (věrtele).}$$

Vyšší výkon měla tedy druhá třída, která zvítězila.

66. Máme 1 500 gramů 7,2procentního roztoku kuchyňské soli ve vodě. Vařením tohoto roztoku se odpaří část vody a zůstane 1 200 gramů nového roztoku.

a) Kolikaprocentní je nový roztok?

b) Kolik gramů soli musíme přidat do nového roztoku, aby vznikl 25procentní roztok?

Řešení. Je třeba si připomenout, co znamenají slova »1 500 gramů 7,2procentního roztoku kuchyňské soli«. Hmotnost tohoto roztoku je 1 500 g a roztok se skládá z

$$7{,}2\,\% \text{ z } 1\,500 \text{ g, tj. } 1\,500 \,.\, 0{,}072 \text{ g soli a}$$

$$92{,}8\,\% \text{ z } 1\,500 \text{ g, tj. } 1\,500 \,.\, 0{,}928 \text{ g vody.}$$

Původní roztok obsahuje tedy 108 g soli a 1 392 g vody.

Úloha a). Po odpaření se množství soli nezměnilo, celková hmotnost roztoku je 1 200 g. Procenta soli tedy určíme dělením

$$108 : 1\,200 = 0{,}09.$$

Nový roztok je 9procentní.

Úloha b). Otázka úlohy nás vybízí, abychom zavedli neznámou: označíme x počet gramů soli, které musíme přidat k 1 200 g roztoku se 108 g soli, abychom dostali 25procentní roztok. Zápis úlohy je

$$0{,}25 \,.\, (1\,200 + x) = 108 + x$$

neboli

$$\tfrac{1}{4}(1\,200 + x) = 108 + x. \qquad (1)$$

Rovnici (1) upravíme

$$1\,200 + x = 432 + 4x$$

a řešíme; vyjde

$$x = 256.$$

Je tedy třeba přidat 256 g soli.

67. Máme dva kusy klempířské pájky (slitina olova a cínu) o hmotnostech 5 kg, $7\frac{1}{2}$ kg. Obsah cínu v prvním kusu je $\frac{1}{4}$ jeho hmotnosti, v druhém kusu $\frac{1}{3}$ jeho hmotnosti. Od obou kusů oddělíme část stejné hmotnosti a připojíme ke zbytku druhého kusu. Po slití každého zbytku s nově připojenou částí dostaneme opět dva kusy o hmotnosti 5 kg a $7\frac{1}{2}$ kg.

Vypočtěte hmotnosti oddělených částí, aby nové slitiny měly stejné procento cínu.

Řešení. Hmotnost oddělených částí v kg označíme x a pro přehlednost si zapíšeme údaje do tabulky.

	Část oddělená od první pájky	Zbytek první pájky	Část oddělená od druhé pájky	Zbytek druhé pájky
Hmotnost v kg	x	$5 - x$	x	$7{,}5 - x$
Díl cínu	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Hmotnost cínu v kg	$\frac{x}{4}$	$\frac{5 - x}{4}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{7{,}5 - x}{3}$

Nově vzniklé pájky jsou:

a) 7,5 kg, obsahující (podle tabulky) $\frac{x}{4} + \frac{7{,}5 - x}{3}$ kg cínu,

b) 5 kg, obsahující (podle tabulky) $\frac{x}{3} + \frac{5 - x}{4}$ kg cínu.

Podle textu úlohy je

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{7{,}5 - x}{3}\right) : 7{,}5 = \left(\frac{x}{3} + \frac{5 - x}{4}\right) : 5.$$

Odtud dostaneme

$$(3x + 30 - 4x) : 7{,}5 = (4x + 15 - 3x) : 5$$

neboli

$$5 \,.\, (30 - x) = 7{,}5(15 + x),$$

tj. $x = 3$. Oddělená část váží 3 kg, což ověříme zkouškou.

68. Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý 60 %. Smísením obou druhů pájky a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu.

Kolik kilogramů každého druhu pájky potřebujeme k výrobě nové pájky?

Řešení. Soustředíme se na hmotnosti olova obsaženého v každém ze tří druhů pájek. První druh obsahuje 25 % cínu - tedy 75 % olova, druhý druh 60 % cínu - tedy 40 % olova. Výsledná pájka obsahuje 30 % cínu - tedy 70 % olova.

Potřebná množství pájek označíme: x kg prvního druhu, y kg druhého druhu.

Celkem je ve směsi obou pájek po přidání 2 kg olova

$$0{,}75x + 0{,}40y + 2 \tag{1}$$

kilogramů olova. Celkem dostaneme $x + y + 2 = 10$ kg pájky se 70 % obsahem olova. Je tedy podle (1)

$$0{,}75x + 0{,}40y + 2 = 0{,}70 \,.\, 10 \tag{2}$$

a mimoto

$$x + y = 8. \tag{3}$$

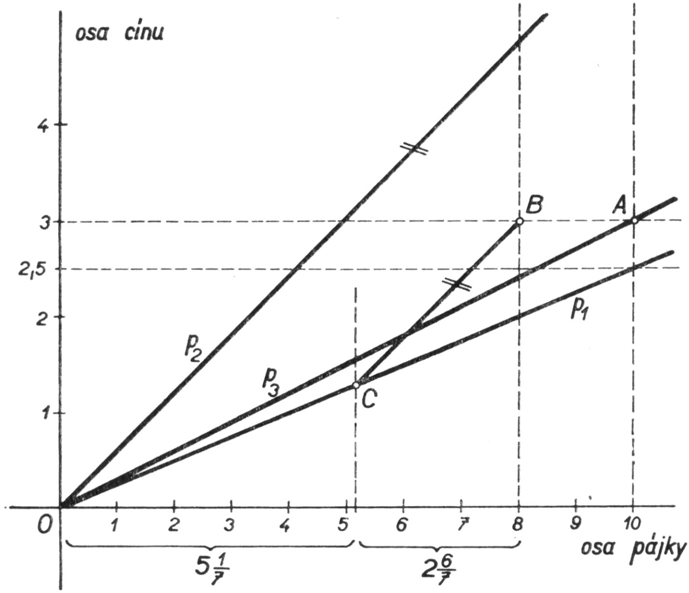
Rovnice (2), (3) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y. Rovnice (2) dá po úpravě $75x + 40y = 500$ neboli

$$15x + 8y = 100. \tag{4}$$

Dosadíme-li za y z (3) do (4), dostaneme $x = \frac{36}{7}$ a z (3) pak $y = \frac{20}{7}$. Výsledek ověříme zkouškou.

Odpověď. Potřebujeme $5\frac{1}{7}$ kg prvního druhu pájky a $2\frac{6}{7}$ kg druhého druhu.

Úlohu rozřešíme ještě jednou graficky. Osu x zvolíme za »osu pájky«; jednotková úsečka znázorňuje 1 kg pájky. Osu y zvolíme za »osu cínu«; jednotková úsečka znázorňuje 1 kg cínu.



Obr. 13

Určitá pájka obsahuje vždy totéž procento cínu. Např. první druh pájky obsahuje 25 % cínu, tj. např. 4 kg pájky obsahují 1 kg cínu, 8 kg pájky obsahuje 2 kg cínu atd. Grafem pájky je tedy polopřímka; každý bod této polopřímky má za souřadnice čísla x, y, udávající počet kg pájky (x) a cínu (y). Čisté olovo je »pájka«, jejímž grafem je poloosa $+x$.

K sestrojení grafu kterékoli pájky stačí její počátek [0,0] a jeden další bod. Tak jsou sestrojeny na obr. 13 grafy obou druhů pájek i graf výsledné pájky s 30 % cínu.

Konstrukce je provedena takto: Když z 10 kg výsledné pájky p_3 (bod A) ubereme 2 kg olova, dostaneme pájku charakterizovanou bodem B. Bod C leží na grafu p_1, a to tak, aby bylo $BC \parallel p_2$. Když sestrojíme bod C, odečteme množství obou druhů pájek, jak ukazuje obr. 13.

69. Ve sklepě JZD jsou dva sudy vína; v jednom je a litrů vína po n Kčs, ve druhém b litrů vína po p Kčs. Z každého sudu ubereme současně totéž množství vína a nalejeme je do druhého sudu. Lze toto množství zvolit tak, aby cena směsi za jeden litr v obou sudech byla stejná? Jaká bude tato cena?

Vypočtěte numericky pro $a = 80$ litrů, $b = 120$ litrů, $n = 20$ Kčs, $p = 16$ Kčs.

Řešení. Vyplníme tabulku:

		Množství vína v litrech	Celková cena v Kčs	Cena za 1 litr v Kčs
I. sud	Před mícháním	a	an	n
	Po míchání	$(a - x) + x = a$	$(a - x)n + xp$	$\dfrac{(a - x)n + xp}{a}$
II. sud	Před mícháním	b	bp	p
	Po míchání	$(b - x) + x = b$	$(b - x)p + xn$	$\dfrac{(b - x)p + xn}{b}$

Přitom x je množství vína v litrech, které se ubralo z I. i II. sudu. Podle znění textu úlohy má mít směs v sudě I i v sudě II stejnou cenu za 1 litr, tj. má platit (viz tabulka)

$$\frac{(a-x)\,n+xp}{a}=\frac{(b-x)\,p+xn}{b}. \tag{1}$$

Při úpravě se z této rovnice (1) vyloučí n, pokud je $n \neq p$ $(n-p \neq 0)$, a dostaneme

$$x=\frac{ab}{a+b}. \tag{2}$$

Cena za jeden litr směsi je podle tabulky

$$q=\frac{(a-x)\,n+xp}{a}. \tag{3}$$

Dosadíme-li do (3) z (2), dostaneme

$$q=\frac{an+bp}{a+b}.$$

Číselně vyjde $x = 48$ litrů, $q = 17{,}60$ Kčs.

Nyní se ještě podíváme na vyloučený případ $n = p$, tj. kdy cena za 1 litr vína je v obou sudech stejná. Popsaným přeléváním vína se jeho cena za 1 litr ani v jednom sudu nemůže změnit; v obou bude stále $n = p$. Vzorec (3) platí i v tomto případě. Vzorec (2) však neurčuje všechna řešení; v tomto případě může být přelévané množství vína x jakékoli kladné číslo, jež je menší nebo rovné menšímu z čísel a a b; plyne to i z toho, že rovnici (1) lze pro $n = p$ upravit na tvar $x \cdot 0 = ab \cdot 0$.

70. Bylo vypočteno, že stavební materiál odveze jisté auto za x dní ($x > 3$). Když bylo třeba odvoz urychlit, počal se materiál čtvrtého dne odvážet ještě dalšími dvěma auty. Výkon 1. pomocného auta byl $\frac{5}{6}$ výkonu původního auta, výkon 2. pomocného auta byl 1,5 výkonu původního auta. Celý odvoz pak trval y dní.

a) Vyjádřete y pomocí x.

b) Pro která celá čísla $x < 50$ je y číslo celé?

Řešení. Označíme M množství materiálu v tunách a vyplníme tabulku:

	Původní auto	1. pomocné auto	2. pomocné auto
Odvezený materiál za 1 den	$\frac{M}{x}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{M}{x}$	$1{,}5 \cdot \frac{M}{x}$
Počet pracovních dní	y	$y - 3$	$y - 3$

Z této tabulky vyčteme rovnici

$$M = y\frac{M}{x} + (y - 3)\,\frac{5}{6}\,\frac{M}{x} + 1{,}5\,(y - 3)\,\frac{M}{x}.$$

Dělíme číslem M a upravíme

$$x - 3 = (y - 3) \cdot \frac{20}{6}.$$

Další úpravou dostaneme

$$y = \frac{3}{10}(x + 7),$$

což dává odpověď na otázku a).

Má-li x vyhovovat požadavkům úlohy b), musí být $x + 7$ násobkem 10 a $x < 50$. Oběma požadavkům vyhovují jedině čísla $x = 13, 23, 33, 43$, neboť v textu úlohy je podmínka $x > 3$.

71. Turistického zájezdu se zúčastnilo 286 zaměstnanců podniku. Měli k dispozici jednak autobusy s 19 sedadly, jednak autobusy se 17 sedadly (řidič a jeho sedadlo se neberou v úvahu).

Kolik autobusů každého druhu se použilo při zájezdu, když všechna sedadla v každém autobusu byla obsazena?

Řešení. Text úlohy nás vybízí k zavedení dvou neznámých:
x počet autobusů s 19 sedadly,
y počet autobusů se 17 sedadly.

Matematický zápis úlohy je

$$19x + 17y = 286, \tag{1}$$

neboť $19x$ je počet všech osob, které jely autobusy prvního druhu, $17y$ je počet všech osob, které jely autobusy druhého druhu.

Rovnice (1) je rovnice o dvou neznámých; hledáme však taková její řešení x, y, která jsou přirozená čísla.

Rovnici (1) budeme řešit pokusně. Pro $x = 1, 2, 3, \ldots$ budeme počítat rozdíl $286 - 19x$ a mezi těmito čísly vyhledáme násobky čísla 17. Přitom stačí omezit se na čísla $x = 1$ až $x = 15$, neboť 15 autobusů prvního druhu odveze $15 . 19 = 285$ osob a větší počet než 15 autobusů by nebyl zcela zaplněn.

Sestavíme tabulku:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$286 - 19x$	267	248	229	210	191	172	153	134	115	96	77	58	39	20	1

Všimněme si, že druhý řádek tabulky (2) dostaneme postupným přičítáním čísla 19 takto: $1 + 19 = 20$, $20 + 19 = 39$, $39 + 19 = 58$ atd.

V druhém řádku tabulky (2) nyní vyhledáme násobky čísla 17; k tomu účelu si vypíšeme »násobilku sedmnácti«:
17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255, 272, 289, ...

Z těchto násobků je v druhém řádku tabulky (2) obsaženo jediné číslo 153. Podle tabulky (2) je tedy $x = 7$ a z rovnice (1) plyne $y = 9$.

Odpověď. Při zájezdu se použilo 7 autobusů prvního druhu a 9 autobusů druhého druhu.

Jiné řešení. Užijeme postup velmi obvyklý v úlohách na zjištění počtu předmětů dvou druhů (v našem případě autobusů). Seskupíme autobusy do dvojic: v každé dvojici bude jeden autobus prvního druhu a jeden autobus druhého druhu; tato dvojice pojme $19 + 17 = 36$ sedících osob. Takovýchto dvojic je nejvýše 7, neboť

$$\begin{array}{l} 286 : 36 = 7 \\ 34 \end{array}$$

Při 7 dvojicích stačí ještě přibrat 2 autobusy druhého druhu, neboť $2 . 17 = 34$, a úloze je vyhověno; dostáváme týž výsledek 7, 9 jako při předchozím způsobu řešení.

Zbývá ovšem ještě dokázat, že není možné řešení s menším počtem dvojic autobusů. To provedeme pomocí tabulky (3):

z	0	1	2	3	4	5	6	7
$286-36z$	286	250	214	178	142	106	70	34

(3)

Přitom z znamená počet dvojic autobusů. Protože v druhém řádku je jediný násobek sedmnácti (34) a žádný násobek devatenácti, má úloha jediné řešení.

72. Vzdálenost Praha - Brno po železniční trati je 255 km. Rychlík projede tuto trať za dobu t hodin. Má-li se doba jízdy rychlíku zkrátit o p %, musí se jeho průměrná rychlost c km/h zvýšit o q %.

a) Vyjádřete q pomocí c, t a p.

b) Vypočtěte q, je-li $p = 10$.

Řešení. a) Možná, že se někdo hned pozastaví nad úlohou b). Jak mám vypočítat q, neznám-li c a t? Uvidíme, že to je možné, neboť q vůbec nezávisí ani na c, ani na t; to nám ukáže řešení úlohy a).

Sestavme si tuto přehlednou tabulku:

	Původně	Po zvýšení rychlosti
Průměrná rychlost jízdy (km/h)	c	$c\left(1+\frac{q}{100}\right)$
Doba jízdy (h)	t	$t\left(1-\frac{p}{100}\right)$

Co jsme potřebovali k sestavení této tabulky? Stoupne-li rychlost c o q %, činí přírůstek $\frac{q}{100}.c$; nová rychlost je tedy

$c + c.\frac{q}{100} = c\left(1+\frac{q}{100}\right)$. Podobně tomu je s dobou.

V obou případech jede rychlík z Prahy do Brna; je tedy

$$ct = 255,\ c\left(1+\frac{q}{100}\right).t\left(1-\frac{p}{100}\right) = 255. \tag{1}$$

Z obou rovností (1) dostaneme

$$ct = ct\left(1+\frac{q}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right). \tag{2}$$

Rovnice (2) dělíme číslem ct; vyjde

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1. \tag{3}$$

Rovnost (3) znásobíme činitelem 100^2; dostaneme

$$(100 + q)(100 - p) = 100^2,$$

tj.

$$100^2 + q(100 - p) - 100p = 100^2.$$

Odtud vyjde

$$q(100 - p) = 100p. \tag{4}$$

Protože je určitě $p < 100$, je $100 - p > 0$; z (4) pak vyjde

$$q = \frac{100p}{100 - p}. \tag{5}$$

Vztah (5) je výsledný vzorec; je vidět, že q skutečně závisí jen na p, nikoli na c, t, dokonce nezávisí ani na vzdálenosti Praha - Brno (255 km).

Vypočteme dosazením $p = 10$ do vzorce (5); dostaneme

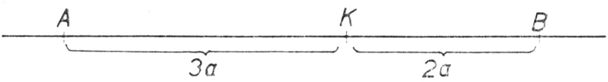
$$q = \frac{1\,000}{90} = 11\frac{1}{9}.$$

Úloha nás poučuje o tom, že některé údaje v textu mohou být zbytečné. Dále nás upozorňuje, jak je výhodné počítat nejdříve s proměnnými (písmeny) a pak teprve dosazovat číselné údaje; tím se vyhneme zbytečným výpočtům.

73. Petr a Milan jeli tramvají do kina, které je v ulici na trati tramvaje mezi stanicemi A, B. Poměr vzdáleností vchodu do kina od stanic A, B je 3 : 2. Petr vystoupil na stanici A, Milan na stanici B. Šli stejnou průměrnou rychlostí a ke vchodu kina přišli v témž okamžiku. Vypočtěte, kolikrát byla průměrná rychlost jejich chůze menší než průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A, B.

Řešení. Tramvaj zřejmě nejdříve přijela do stanice A. Jen tak je možné, aby chlapci přišli v týž okamžik ke vchodu kina.

Vzdálenost zastávek A a B v kilometrech nechť je $5a$ (obr. 14).



Obr. 14

Průměrnou rychlost chůze chlapců v km/h označme v. Je-li průměrná rychlost tramvaje x-krát větší než průměrná rychlost chůze chlapců, pak je její rychlost xv km/h.

Doby cest chlapců ke vchodu kina měřme od okamžiku, kdy tramvaj zastavila ve stanici A. Pak platí

$$t_P = \frac{3a}{v},$$

$$t_M = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v}.$$

Odtud plyne

$$\frac{3a}{v} = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v},$$

tj.

$$3 = \frac{5}{x} + 2,$$

takže

$$x = 5.$$

Snadno ověříme, že chlapci přijdou ke vchodu kina v týž okamžik, má-li tramvaj pětkrát větší průměrnou rychlost než chlapci.

Závěr. Chlapci šli pětkrát menší průměrnou rychlostí, než byla průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A a B.

74. Dva přátelé z téže obce potřebují navštívit blízké město. První jde pěšky a cesta mu trvá hodinu. Druhý jede na kole a cesta mu trvá 20 minut. Chodec vyšel čtvrt hodiny před odjezdem cyklisty. Za jakou dobu po svém odjezdu ho cyklista dohoní?

Řešení. Úloha patří do skupiny úloh na »dohánění« a »potkávání«. Chceme-li tuto úlohu řešit úsudkem, je dobře si zapamatovat tento obrat: představíme si, že pomalejší z obou cestovatelů (v našem případě chodec) se nepohybuje. Pak rychlejší cestovatel se buď pohybuje proti němu rychlostí $v_1 + v_2$, nebo ho dohoní rychlostí $v_1 - v_2$; přitom $v_1(v_2)$ značí rychlost (v km/h nebo m/min apod.) rychlejšího (pomalejšího) cestovatele.

V okamžiku, kdy vyjel cyklista z obce O do města M, byl chodec v místě P vzdáleném od O o $\frac{1}{4}OM$ (neboť tuto vzdálenost urazil chodec za čtvrt hodiny, OM urazí za hodinu); obr. 15.

Obr. 15

Zastavíme chodce v místě P a cyklista ho bude dohánět rychlostí $v_1 - v_2$ (v m/min). Přitom platí

$$OM = v_1 . 20 = v_2 . 60. \tag{1}$$

Hledaný čas (za který cyklista dohoní chodce) je

$$t = \frac{OM}{4} : (v_1 - v_2). \tag{2}$$

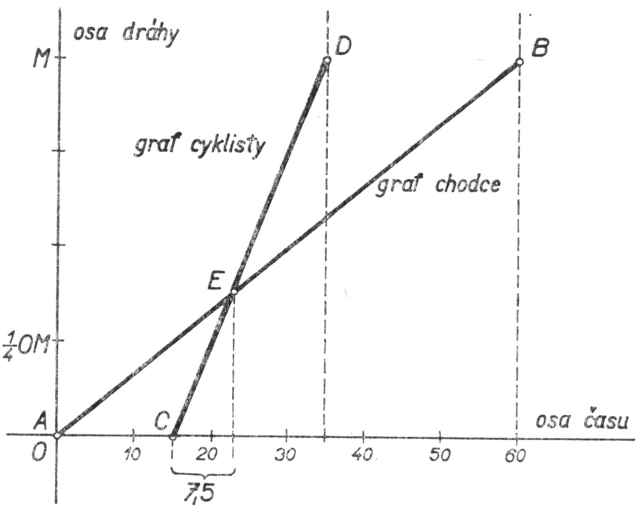
Z (1) vypočteme $v_1 = 3v_2$ a dosadíme do (2)

$$t = \frac{OM}{4} : 2v_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{OM}{v_2}\,. \tag{3}$$

Podle (1) je $\dfrac{OM}{v_2} = 60$; z (3) tedy dostaneme $t = \dfrac{60}{8} = \dfrac{15}{2} = 7\dfrac{1}{2}$.

Cyklista dohoní chodce za $7\frac{1}{2}$ minuty.

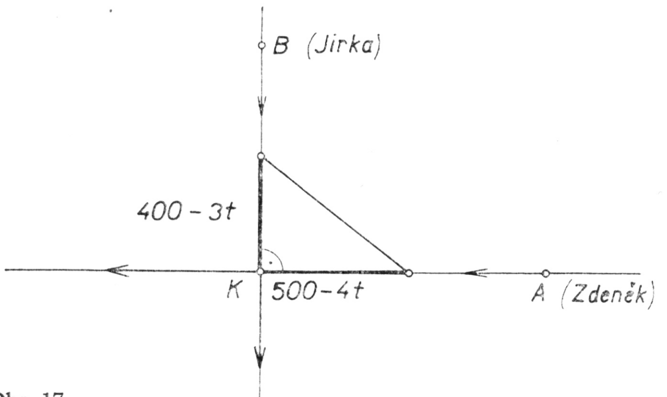
Úlohu rozřešíme ještě jednou graficky. Použijeme přitom vlastně »grafický jízdní řád« pro cyklistu a chodce, které zakreslíme do téhož obrazu.



Obr. 16

Osu x zvolíme za »osu času«; jednotková úsečka značí 10 minut. Osu y zvolíme za »osu dráhy«; jednotková úsečka značí $\frac{1}{4}$ vzdálenosti OM. Cyklista i chodec se pohybují stálými rychlostmi v_1, v_2, tj. konají pohyb rovnoměrný. Dráha vykonaná při tomto pohybu je přímo úměrná času; proto je grafem rovnoměrného pohybu přímka (část přímky). K jejímu sestrojení stačí dva body, tj. dvě dvojice údajů: čas - vykonaná dráha. Na obr. 16 se použilo bodů A, B pro chodce, C, D pro cyklistu. Bod A odpovídá času 0 minut (počátek pozorování) a dráze 0 km (obec O). Bod B odpovídá času 60 minut a dráze OM km (vzdálenost obce O od města M). Bod C odpovídá času 15 minut (cyklista vyjel $\frac{1}{4}$ h po chodci) a dráze 0 km (obec O). Konečně bod D odpovídá času 35 minut ($15 + 20 = 35$, cyklista jel z O do M 20 minut) a dráze OM km.

Průsečík E obou grafů udává čas a dráhu předjetí chodce cyklistou. Čas je 22,5 min od vyjití chodce, tj. 7,5 min od vyjetí cyklisty z obce O.



Obr. 17

75. Zdeněk a Jirka bydlí v domech A, B ve dvou vzájemně kolmých ulicích; domy A, B jsou od křižovatky K obou ulic po řadě vzdáleny 500 m a 400 m. V témž okamžiku vyjedou oba chlapci na kolech od svých bydlišť po ulicích AK, BK směrem ke křižovatce K, kterou projedou.

Zdeněk jede průměrnou rychlostí 4 m/s, Jirka průměrnou rychlostí 3 m/s. Za kolik sekund po startu bude jejich vzdušná vzdálenost nejmenší a kolik metrů to bude?

Řešení. V okamžiku t sekund po startu (obr. 17) je podle Pythagorovy věty vzdálenost obou chlapců (v m) dána vzorcem:

$$z^2 = (500 - 4t)^2 + (400 - 3t)^2$$

neboli

$$z^2 = 25t^2 - 6\,400t + 410\,000$$

neboli

$$z^2 = (5t - 640)^2 + 400.$$

Proměnná z^2 nabývá svého minima jen tehdy, je-li $5t - 640 = 0$, tj. $t = 128$ sekund. Toto minimum je $\sqrt{400}$ metrů, tj. $z = 20$.

76. Ručičky hodin ukazují přesně 12 hodin. Otočíme minutovou (velkou) ručičkou stokrát po sto stupních. Kolik hodin budou pak hodiny ukazovat? Udejte s přesností na minuty.

Řešení. Předpokládáme, že otáčení velkou ručičkou neprovádí ničitel hodinových strojů, tj. že se otáčení děje ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Otočí se o $100 . 100°$, tj. o 10 000 úhlových stupňů. Jedné časové minutě je na ciferníku přiřazen úhel 6°; provedenému otočení je tedy přiřazen čas $\frac{1}{6} . 10\,000 \doteq \doteq 1\,667$ časových minut, tj. 27 hodin 47 minut, neboť $1\,667 = = 27 . 60 + 47$. Je tedy

$$10\,000° \rightarrow 1 \text{ den} + 3 \text{ hodiny} + 47 \text{ minut.}$$

Hodiny budou ukazovat 3h 47min (s přesností na jednu minutu).

77. Kolikrát v době od 14.00 hodin do 14.05 hodin je centrální sekundová ručička hodinek osou dutého úhlu sevřeného hodinovou a minutovou ručičkou? Udejte příslušné okamžiky s přesností na sekundy.

Řešení. Nechť S je střed ciferníku hodin a bod O nechť na něm označuje 12 hodin. Označme α, β, γ velikosti úhlů sevřených po řadě minutovou, hodinovou a sekundovou ručičkou s polopřímkou SO po uplynutí t sekund po 14. hodině.

Minutová ručička opíše za 1 hodinu, tj. za 3 600 sekund, úhel o velikosti 360°. Tedy

$$\alpha = \frac{t}{3\,600} . 360 = \frac{t}{10} \tag{1}$$

stupňů.

Hodinová ručička svírá ve 14 hodin s polopřímkou SO úhel o velikosti 60°. Za 12 hodin, tj. za (12.3 600) sekund, opíše tato ručička úhel 360°, takže

$$\beta = \frac{t}{12.3\,600} \,.\, 360 + 60 = \frac{t}{120} + 60 \tag{2}$$

stupňů.

Sekundová ručička opíše za 1 minutu, tj. za 60 sekund, úhel o velikosti 360°. Tedy

$$\gamma = \frac{t}{60} . 360 - k . 360 = 6t - k . 360 \tag{3}$$

stupňů, kde k je celé nezáporné číslo udávající, kolikrát sekundová ručička oběhla celý ciferník za dobu t sekund po 14 hodinách.

V hledaných okamžicích je velikost úhlu γ aritmetickým průměrem velikostí úhlů α a β. Platí tedy podle (1), (2), (3):

$$6t - k . 360 = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{10} + \frac{t}{120} + 60\right],$$

odkud po úpravě dostaneme

$$1\,427\, t = 86\,400\, k + 7\,200; \tag{4}$$

z této rovnice už lehko určíme t.

Podle textu úlohy splňuje t nerovnici

$$0 \leqq t \leqq 300.$$

Tuto podmínku však splňuje pouze pět kořenů rovnice (4), totiž

$$6,\ 66,\ 126,\ 186,\ 247$$

(s přesností na celé sekundy). O správnosti počtu řešení se též můžeme přesvědčit jednoduchým úsudkem.

78. Na výstavě hraček jezdí dvě elektrické lokomotivy po kolejích položených na dvou soustředných kružnicích $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, kde $r_1 < r_2$, ve stejném smyslu stálou rychlostí v. Vyjely z polohy, v níž byly sobě nejblíže. V kterých okamžicích po startu budou od sebe

a) poprvé nejdále;

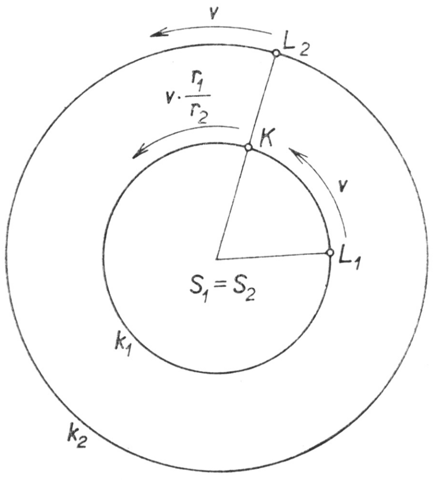
b) poprvé nejblíže?

Řešte nejprve obecně, pak pro $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 70$ cm, $v = 20$ cm/s, $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

Řešení. Nechť body L_1 a L_2 na obr. 18 znázorňují obě lokomotivy v jistém časovém okamžiku. Označme K průsečík polopřímky S_1L_2 s kružnicí k_1. Pohybuje-li se bod L_2 po kružnici k_2 rychlostí v, pak se bod K pohybuje po kružnici k_1 rychlostí

$$v \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Body L_1 a L_2 jsou si zřejmě nejdále (nejblíže), právě když jsou si nejdále (nejblíže) body L_1 a K. V okamžiku startu body L_1 a K splývaly. Protože $r_1 < r_2$, je rychlost bodu K menší než rychlost bodu L_1.



Obr. 18

a) Body L_1 a K budou od sebe nejdále, právě když budou v krajních bodech téhož průměru kružnice k_1. Poprvé se tak stalo v okamžiku t, v němž platilo

$$v \, . \, t - v \, . \, \frac{r_1}{r_2} \, . \, t = \pi r_1,$$

tj.

$$t = \frac{\pi r_1 r_2}{v(r_2 - r_1)};$$

pro dané údaje $t \doteq 66$ s. V tomto okamžiku jsou od sebe také poprvé nejdále obě lokomotivy.

b) Body L_1 a K budou k sobě vždy nejblíže, když budou splývat. Poprvé se tak stane, když bod L_1 bude mít před bodem K náskok $2\pi r_1$. Bude tomu tak v časový okamžik T, v němž bude platit

$$vT - v\frac{r_1}{r_2}T = 2\pi r_1,$$

tj. pro

$$T = \frac{2\pi r_1 r_2}{v(r_2 - r_1)} = 2t;$$

pro dané údaje $T \doteq 132$ s. V tomto okamžiku jsou také poprvé po startu nejblíže k sobě obě lokomotivy.

79. Ozubené pedálové kolečko jízdního kola (bicyklu) má 48 zubů; malé převodové kolečko na zadní ose má 20 zubů. Průměr zadního kola bicyklu je 72 cm. (Uvědomte si, že vzdálenost dvou sousedních zubů u obou koleček je táž.) Cyklista jede po vodorovné silnici stálou rychlostí 25 km za hodinu na plný záběr (šlape rovnoměrně).

a) Kolikrát musí šlápnout za 1 minutu, aby si udržel stálou rychlost 25 km/h?

b) Kolikrát musí šlápnout na trati dlouhé 4,5 km?

Řešení. Úloha je značně idealizována; může být proti ní oprávněná námitka, že se takto na kole nejezdí.

Otočí-li se pedálové kolečko jednou, otočí se zadní kolo $\frac{48}{20} = 2{,}4$krát; k tomu, aby se pedálové kolečko otočilo jednou, musí cyklista šlápnout dvakrát.

Při jednom šlápnutí ujede zadní kolo dráhu délky (v cm)

$$\frac{\pi d \cdot 2{,}4}{2} \doteq \frac{3{,}14 \cdot 72 \cdot 2{,}4}{2} = 271{,}296 \doteq 271,$$

kde d jsme označili průměr zadního kola bicyklu.

Na dráze 25 km = 2 500 000 cm cyklista šlápne tolikrát, kolik je 2 500 000 : 271; to je přibližně 9 225. Za jednu hodinu tedy šlápne 9 225krát a za jednu minutu 9 225 : 60 = 153,75, tj. přibližně 154krát.

Poměr drah 4,5 km a 25 km je $\frac{4{,}5}{25}$. V témže poměru se změní i počet šlápnutí, tj. číslo 9 225; dostaneme

$$9\,225 \cdot \frac{4{,}5}{25} = 369 \cdot 4{,}5 = 1\,660{,}5 \doteq 1\,660.$$

Na dráze 4,5 km musí cyklista šlápnout asi 1 660krát.