[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

I. Aritmetika přirozených čísel

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 13–43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405282

I. Aritmetika přirozených čísel

1. Určete počet všech přirozených čísel menších než 5000000, z nichž každé je dělitelné zároveň třemi, pěti a sedmi.

Řešení. Každá dvě z čísel 3, 5, 7 jsou navzájem nesoudělná, tj. mají největšího společného dělitele 1. Číslo n, které je dělitelné zároveň třemi, pěti i sedmi, je dělitelné součinem

$$3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 105. \tag{1}$$

Uvědomte si, že by tento úsudek nebyl správný, kdyby některá dvě z těchto tří čísel byla soudělná. Např. čísla 9, 10, 14 nejsou po dvou nesoudělná; číslo 630 je dělitelné zároveň devíti, deseti i čtrnácti, ale není dělitelné jejich součinem 9 . 10 . 14 = = 1 260.

Každé z čísel hledaných v naší úloze je tedy dělitelné číslem 105. Obráceně, zřejmě každé číslo dělitelné číslem 105, je podle (1) dělitelné zároveň třemi, pěti a sedmi.

Musíme tedy zjistit počet násobků čísla 105, které jsou menší než 5 000 000; tento počet zjistíme dělením

```
5 000 000 : 105 = 47 619
  800
   650
    200
     950
      5
```

Provedeme zkoušku dělení násobením:

$$47\,619 \,.\, 105 + 5 = 4\,999\,995 + 5 = 5\,000\,000$$

Počet hledaných čísel je tedy 47 619.

2. Někdo znásobil tři bezprostředně po sobě jdoucí přirozená čísla. Aniž známe součin, můžeme o něm tvrdit, že je dělitelný šesti; dokažte.

Řešení. a) Označme nejmenší ze zvolených čísel n; pak jsou další dvě čísla $n + 1$, $n + 2$. Součin všech tří čísel je

$$s = n(n + 1)(n + 2). \qquad (1)$$

Chceme-li dokázat, že s je násobek šesti, musíme dokázat, že s je násobek dvou (tj. číslo sudé) a že je zároveň násobek tří.

Snadno zjistíme, že aspoň jedno z čísel n, $n + 1$, $n + 2$ je sudé: buď je n sudé, nebo je n liché a pak je $n + 1$ sudé.

Snadno také dokážeme, že aspoň jedno z čísel n, $n + 1$, $n + 2$ je násobkem čísla 3. Číslo n dává totiž při dělení třemi zbytek buď nula, nebo jedna, nebo dvě. Dává-li n zbytek nula, je n dělitelné třemi. Dává-li n zbytek 1, pak dává číslo $n + 2$ zbytek nula a $n + 2$ je dělitelné třemi. Dává-li n zbytek 2, pak číslo $n + 1$ dává zbytek nula a $n + 1$ je dělitelné třemi.

Dokázali jsme tedy, že v součinu (1) je aspoň jeden činitel dělitelný dvěma a aspoň jeden činitel dělitelný třemi; součin je tedy vždy dělitelný šesti.

b) Rozřešíme úlohu ještě jedním způsobem, na kterém ukážeme dva typické obraty.

Za prvé: Poněvadž jde o tři po sobě bezprostředně následující přirozená čísla, označíme prostřední z nich n; nejmenší je pak $n - 1$ a největší $n + 1$; jejich součin se dá vyjádřit v poměrně jednoduchém tvaru

$$s = (n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n. \tag{2}$$

Za druhé: Protože máme zkoumat dělitelnost čísla s šesti a protože číslo s je vyjádřeno vzorcem (2) pomocí n, vyjádříme číslo n pomocí zbytku po dělení šesti takto:

$$n = 6k + z, \tag{3}$$

kde k je nula nebo číslo přirozené a zbytek z je některé z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Z (3) dosadíme do (2) a dostaneme po úpravě

$$s = 216k^3 + 108k^2z + 18kz^2 - 6k + z^3 - z. \tag{4}$$

Každý z prvních čtyř sčítanců v (4) je zřejmě dělitelný šesti; vypočteme ještě rozdíl $z^3 - z$ pro $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

z	0	1	2	3	4	5
$z^3 - z$	0	0	6	24	60	120

Poněvadž v druhém řádku tabulky (5) jsou vesměs násobky šesti, je podle (4) každý součin s dělitelný šesti a věta je dokázána.

3. Dělíme-li druhou mocninu přirozeného čísla dvanácti, může být zbytek jenom jedno z určitých čtyř přirozených čísel. Zjistěte tato čtyři čísla.

Řešení. Při dělení přirozeného čísla dvanácti je zbytek z některé z čísel

$$0, 1, 2, \ldots, 10, 11. \tag{1}$$

Přirozené číslo n, které dává při dělení dvanácti zbytek z, lze napsat ve tvaru

$$n = 12k + z.$$

Jeho druhá mocnina je

$$n^2 = 144k^2 + 24kz + z^2 = 12(12k^2 + 2kz) + z^2. \tag{2}$$

Z rovnosti (2) vyplývá, že zbytek při dělení čísla n^2 dvanácti je týž jako zbytek při dělení čísla z^2 dvanácti.

Vypočteme tedy druhé mocniny všech dvanácti zbytků (1) a zjistíme, jaké zbytky dávají čísla z^2 při dělení dvanácti.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Zbytek při dělení z^2 dvanácti	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Hledaný zbytek je tedy některé z čísel 0, 1, 4, 9.

4. Jsou dána celá čísla a, b, jejichž aritmetický průměr je celé číslo dělitelné třemi. Dokažte, že pak číslo

$$a(3a^2 + b^2)\,(a^3 - 2b^3)^3$$

je násobkem čísla 108.

Řešení. Podle textu úlohy je $\frac{1}{2}(a + b) = 3k$, kde k je celé číslo. Odtud plyne $b = 6k - a$ a dále

$$3a^2 + b^2 = 3a^2 + 36k^2 - 12ak + a^2 = 4(a^2 - 3ak + 9k^2),$$

$$a^3 - 2b^3 = a^3 - 2(216k^3 - 108k^2a + 18ka^2 - a^3) =$$

$$= 3(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3);$$

z toho

$$a(3a^2 + b^2)\,(a^3 - 2b^3)^3 =$$

$$= 4 \,.\, 3^3a(a^2 - 3ak + 9k^2)\,(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3)^3,$$

což je násobek 108, jak jsme měli dokázat.

5. Představte si, že napíšete všechna přirozená čísla od 1 do 5 555. Kolik devítek přitom napíšete?

Řešení. Uvažujme takto: Devítky se budou vyskytovat jednak na místě jednotek, jednak na místě desítek, jednak na místě stovek (na místě tisícovek už ne). Označme:

x počet devítek na místě jednotek,
y počet devítek na místě desítek,
z počet devítek na místě stovek.

V každé desítce se vyskytuje jedna devítka na základním místě. Číslo 5 555 obsahuje 555 celých desítek a »načatou« desítku

$$5\,551,\ 5\,552,\ 5\,553,\ 5\,554,\ 5\,555.$$

Je tedy

$$x = 555. \tag{1}$$

V každé stovce se vyskytuje 10 devítek na místě desítek; je to u čísel

$$.90,\ .91,\ .92,\ \ldots,\ .99.$$

Číslo 5 555 obsahuje 55 celých stovek a »načatou« stovku

$$5\,501 \text{ až } 5\,555.$$

Je tedy

$$y = 55\,.\,10 = 550. \tag{2}$$

V každé tisícovce se vyskytuje 100 devítek na místě stovek; je to u čísel

$$.900,\ .901,\ .902,\ \ldots,\ .999.$$

Číslo 5 555 obsahuje 5 celých tisícovek a »načatou« tisícovku

$$5\,001 \text{ až } 5\,555.$$

Je tedy

$$z = 5 \,.\, 100 = 500. \qquad (3)$$

Z (1), (2), (3) plyne $x + y + z = 1\,605$.

Napíšete tedy celkem 1 605 devítek.

6. Napišme za sebou přirozená čísla

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ \ldots; \qquad (1)$$

tak dostaneme jistý sled číslic. Která číslice stojí v tomto sledu na milióntém místě?

Řešení. Kdybychom chtěli tento sled skutečně napsat až k milióntému místu a kdybychom počítali na napsání jedné cifry a konstatování jejího místa jen jednu sekundu, trvala by nám tato práce při osmihodinovém pracovním dni asi 35 pracovních dní. Je tedy vidět, že se vyplatí přemýšlet, jak rozřešit úlohu obratněji.

Máme devět jednociferných čísel (1 až 9), která zaujmou devět míst sledu číslic. Dvojciferná čísla počínají číslem 10 a končí číslem 99; je jich 90 a spotřebují $2 \,.\, 90 = 180$ míst. Trojciferná čísla počínají číslem 100 a končí číslem 999; je jich 900 a spotřebují $3 \,.\, 900 = 2\,700$ míst. Obdobně je 9 000 čtyřciferných čísel (1 000 až 9 999) a zaujmou $4 \,.\, 9\,000 =$

$= 36\,000$ míst; pěticiferných čísel je 90 000 (10 000 až 99 999) a zaujmou $5 \,.\, 90\,000 = 450\,000$ míst. Jednociferná až pěticiferná čísla spotřebují celkem

$$9 + 180 + 2\,700 + 36\,000 + 450\,000 = 488\,889$$

míst. Protože 900 000 šesticiferných zaujme $6 \,.\, 900\,000 = 5\,400\,000$ dalších míst, náleží milióntě místo některému šesticifernému číslu.

Šesticiferná čísla zaujmou v sledu (1), napsanému až po milióntou cifru, celkem

$$1\,000\,000 - 488\,889 = 511\,111$$

míst. Na tato místa se vejde x šesticiferných čísel a část $(x + 1)$ního čísla. Číslo x zjistíme dělením:

$$\begin{array}{l} 511\,111 : 6 = 85\,185 \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

Je tedy $x = 85\,185$ a na milióntém místě stojí první cifra $(x + 1)$ního čísla.

První šesticiferné číslo je

$$100\,000 = 100\,000 + (1 - 1),$$

druhé šesticiferné číslo je $100\,000 + (2 - 1) = 100\,001$, třetí šesticiferné číslo je

$$100\,002 = 100\,000 + (3 - 1);$$

$(x + 1)$ní šesticiferné číslo je

$$100\,000 + (x + 1 - 1) = 100\,000 + x.$$

Pro $x = 85\,185$ je to tedy číslo 185 185. Jeho první cifra je 1 a to je cifra stojící na milióntém místě sledu (1).

7. Domy ve větších obcích bývají označeny nejen popisnými čísly, ale ještě tzv. orientačními čísly, a to takto: V každé ulici jsou označeny domy po jedné její straně po řadě čísly 2, 4, 6... a po druhé straně 1, 3, 5... Kolik domů má ulice, jestliže na každé její straně je právě n domů, jejichž orientační číslo obsahuje aspoň jednu číslici 4? Úlohu řešte a) pro $n = 6$, b) pro $n = 9$.

Řešení. a) Nechť $n = 6$. Na straně sudých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$4, 14, 24, 34, 40, 42.$$

Na straně lichých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$41, 43, 45, 47, 49, 141.$$

Na obou stranách je tedy $21 + 71 = 92$ domů.

b) Nechť $n = 9$. Na straně sudých čísel jsou »čtyřkové« domy

$$4, 14, 24, 34, 40, 42, 44, 46, 48.$$

Dům č. 48 však nemusí být poslední, za ním může být ještě dům č. 50 a popřípadě č. 52. Na straně lichých čísel jsou »čtyřkové« domy

41, 43, 45, 47, 49, 141, 143, 145, 147.

Na obou stranách je tedy $24 + 74 = 98$ domů, nebo $25 + 74 = 99$ domů, nebo $26 + 74 = 100$ domů.

8. Určete nejmenší přirozené číslo, jehož ciferný součet je 1 977.

Řešení. Hledané číslo n je nejmenší ze všech přirozených čísel, která mají ciferný součet 1 977. Odtud plyne, že číslo n má zápis s nejmenším možným počtem cifer, tj. že v jeho zápise jsou všechny cifry nenulové a největší možný počet z nich jsou devítky.

Z rovnosti

$$1\,977 = 9 . 219 + 6$$

plyne, že číslo n má ve svém zápise 219 devítek a jednu šestku. Protože n je nejmenší ze všech dvousetdvaceticiferných přirozených čísel, v jejichž zápise je jedna cifra 6 a ostatní jsou 9, platí

$$n = 6\underbrace{99\ldots9}_{\text{celkem 219 devítek}}.$$

Poznámka. Nalezené číslo n lze psát také ve tvaru

$$7 \cdot 10^{219} - 1.$$

9. Dokažte, že rozdíl každých dvou kladných čísel, která jsou v desítkové soustavě trojciferná a jsou v ní napsána týmiž číslicemi, ale v opačném pořadí, je násobek devíti i jedenácti.

Řešení. Zapíšeme obě čísla:

$$100a + 10b + c, \; 100c + 10b + a.$$

Předpokládáme, že je $a \geqq c$, aby rozdíl vyšel nezáporný. Rozdíl je

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - 100c - 10b - a &= 99a - 99c = \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a - c) \geqq 0. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

10. Najděte všecka přirozená čísla dělitelná osmi, jejichž ciferný součet (v desítkové soustavě) je roven sedmi a ciferný součin*) je roven šesti.

Řešení. Při řešení této úlohy nebudeme vycházet z vyjádření čísla jako mnohočlenu v mocninách deseti, protože nevíme, kolikaciferné je hledané číslo.

Protože hledané číslo N je násobkem osmi, je sudé - jeho poslední cifra (vpravo) je některá z cifer 0, 2, 4, 6, 8. Protože

---

*) Ciferný součin čísla 572 je $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$; ciferný součin čísla 503 je $5 \cdot 0 \cdot 3 = 0$.

N má ciferný součin 6, není poslední cifra ani 0, ani 4, ani 8 (číslo šest není dělitelné ani čtyřmi, ani osmi). Poslední cifra je tedy buď 6, nebo 2.

Číslo N neobsahuje ve svém zápisu žádnou nulu (ciferný součin je 6). Protože ciferný součet je 7, máme dvě možnosti:

a) Číslo N je dvojciferné s ciframi 1, 6.
b) Číslo N je čtyřciferné s ciframi 2, 3, 1, 1.

Případ a): Úloze vyhovuje číslo 16.
Případ b): Možná řešení jsou čísla

$$3\,112,\ 1\,312,\ 1\,132.$$

Z těchto tří čísel jsou jen první dvě násobky osmi, třetí nikoli.

Úloha má tedy tři řešení:

$$16,\ 3\,112,\ 1\,312.$$

11. Nejmenší přirozené číslo x, pro které je $1\,260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

a) $1\,470$, b) $1\,260^2$, c) $7\,350$.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

Řešení. Číslo 1 260 rozložíme v součin prvočinitelů; platí

$$1\,260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Hledané číslo 1 260x tedy bude mít ve svém rozkladu jen prvočísla 2, 3, 5, 7; to vyplývá z požadavku, aby bylo x co nejmenší. Z téhož požadavku vyplývá, že číslo 1 260x má ve svém rozkladu co nejmenší mocniny prvočísel 2, 3, 5, 7, tj. 2^3, 3^3, 5^3, 7^3; je tedy

$$x = 2 . 3 . 5^2 . 7^2 = 150 . 49 = 7\,350.$$

Správná je odpověď c).

12. Najděte nejmenší přirozené číslo x takové, aby každé z čísel x, 616, 700, 924 bylo dělitelem součinu ostatních tří.

Řešení. Nechť x je takové přirozené číslo, že každé z čísel x, 616, 700, 924 dělí součin zbývajících tří. Platí

$$\begin{aligned} 616 &= 2^3 . 7 . 11, \\ 700 &= 2^2 . 5^2 . 7, \\ 924 &= 2^2 . 3 . 7 . 11. \end{aligned} \tag{1}$$

Z (1) plyne, že číslo 924 dělí součin $616 . 700 . x$, právě když existuje takové přirozené číslo a, že

$$x = 3a. \tag{2}$$

Dále podle (1) platí, že číslo 700 dělí součin $616 . 924 . x$, právě když

$$x = 5^2 . b, \tag{3}$$

kde b je přirozené číslo.

Číslo 616 dělí součin $700.924.x$, jak vyplývá z (1), pro každé přirozené číslo x.

Nejmenší přirozené číslo x vyhovující zároveň podmínkám (2) a (3) a dělící přitom součin $616.700.924$ je zřejmě číslo

$$3.5^2 = 75.$$

13. Představme si, že jsme znásobili všecka přirozená čísla od 1 do 1 976. Kolika nulami končí zápis výsledku v desítkové soustavě?

Řešení. Představme si, že číslo $N = 1.2. \ldots .1\,976$ vyjádříme jako součin prvočinitelů; provede se to tak, že každé z čísel 2, 3, ..., 1 976 se rozloží v součin prvočinitelů (např. $12 = 2.2.3 = 2^2.3$, $22 = 2.11$, $1000 = 2^3.5^3$). Ze všech těchto prvočinitelů nás zajímají jen prvočinitelé rovní 2 a 5, neboť $2.5 = 10$; kolik dvojic 2, 5 vytvoříme v součinu N, tolika nulami bude končit číslo N v desítkovém zápisu.

Označme a počet těch prvočinitelů čísla N, které se rovnají 2. Protože každé sudé číslo $\leqq 1\,976$ obsahuje aspoň jednoho prvočinitele rovného 2, je

$$a \geqq \tfrac{1}{2}.1\,976 = 988. \qquad (1)$$

Označme b počet těch prvočinitelů čísla N, jež se rovnají 5. Prvočinitel 5 se vyskytuje aspoň jednou u všech přirozených čísel $\leqq 1\,976$, která jsou násobky pěti, tj. u čísel 5, 10, 15, 20, ..., 1 975; dále se vyskytuje aspoň dvakrát u násobků čísla 25, tj. 25, 50, 75, 100, ..., 1 975; dále se vyskytuje aspoň třikrát u násobků čísla 125, tj. 125, 250, 375, 500, ..., 1 875; konečně se vyskytuje aspoň čtyřikrát u násobků čísla 625, tj. 625, 1 250, 1 875. Žádné přirozené číslo $\leq$ 1 976 není násobkem 5^5, neboť $5^5 = 3\,125$.

Mezi čísly 1, 2, ..., 1 976 je 395 násobků pěti, neboť $1\,976 = 5 . 395 + 1$; obdobně se zjistí, že je mezi nimi 79 násobků dvaceti pěti, 15 násobků čísla 125 a tři násobky čísla 625.

Ve vyjádření čísla N jako součinu prvočinitelů se vyskytuje tedy prvočíslo pět b-krát, kde

$$b = 395 + 79 + 15 + 3 = 492. \qquad (2)$$

Podle (1), (2) je $a > b$, takže číslo $b = 492$ udává počet nul, které má číslo N v dekadickém vyjádření na konci.

14. Najděte všechna celá nezáporná čísla n, pro která je podíl

$$1\,260 : (3n + 1)$$

přirozené číslo.

Řešení. Jde o to najít všechny kladné dělitele čísla 1 260, které lze vyjádřit ve tvaru $3n + 1$, tj. dělitele, které při dělení třemi dávají zbytek 1. Předně je to číslo 1 (pro $n = 0$); je-li $n > 0$, je $3n + 1 > 1$ a číslo $3n + 1$ je vytvořeno pomocí prvočinitelů čísla 1 260. Vyjádříme tedy číslo 1 260 jako součin prvočinitelů

$$1\,260 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7$$

a k jednotlivým prvočinitelům připíšeme zbytky při dělení třemi:

Prvočinitel	2	2	3	3	5	7
Zbytek	2	2	0	0	2	1

Utvoříme ty dělitele čísla 1 260, jež nejsou násobky tří, a připíšeme k nim zbytky při dělení třemi (násobek tří nelze totiž napsat ve tvaru $3n + 1$):

Dělitel	2	5	7	2.2	2.5	2.7	5.7	2.2.5	2.2.7	2.5.7	2.2.5.7
Zbytek	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2

Dostáváme tedy spolu s $n = 0$ tato řešení:

$3n + 1$	1	4	7	10	28	70
n	0	1	2	3	9	23

15. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích lichých čísel je čtyřciferné číslo, jehož všechny číslice (v dekadickém vyjádření) jsou stejné. Najděte všecky takové trojice lichých čísel.

Řešení. Chceme-li vyjádřit tři za sebou následující členy aritmetické posloupnosti, pak se zpravidla osvědčuje jejich »symetrický« zápis pomocí prostředního z nich, tj. zápis

$$a - d, a, a + d.$$

Tento obrat použijeme i při řešení této úlohy.

Je-li x prostřední číslo hledané trojice, pak další dvě čísla jsou $x - 2$ a $x + 2$. Platí:

$$(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 3x^2 + 8$$

Číslo $3x^2 + 8$ je liché kladné, a proto se musí rovnat některému z čísel

$$1\,111, 3\,333, 5\,555, 7\,777, 9\,999,$$

tj. číslo $3x^2$ se rovná některému z čísel

$$1\,103, 3\,325, 5\,547, 7\,769, 9\,991.$$

Z nich pouze číslo 5 547 je dělitelné třemi, takže

$$3x^2 = 5\,547,$$

tedy

$$x^2 = 1\,849 = 43^2,$$

tj.

$$|\,x\,| = 43.$$

Poněvadž

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 1\,681 + 1\,849 + 2\,025 = 5\,555,$$

má úloha právě dvě řešení; jsou to trojice 41, 43, 45 a -41, -43, -45.

16. Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geqq 6$ lze vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž jedno je prvočíslo a druhé číslo složené.

Řešení. Každé sudé přirozené číslo větší nebo rovné 4 je složené. Jediné sudé prvočíslo je 2, ostatní prvočísla jsou lichá. Nejmenší liché prvočíslo je 3. Z těchto vlastností prvočísel již plyne řešení:

a) Nechť přirozené číslo $n \geqq 6$ je sudé, pak je lze psát jako součet

$$n = 2 + (n - 2),$$

kde číslo $n - 2 \geqq 4$ je sudé, a tedy složené.

b) Nechť přirozené číslo $n \geqq 6$ je liché. Potom je vyjádříme jako součet

$$n = 3 + (n - 3),$$

kde číslo $n - 3 \geqq 3$ je sudé, takže je složené.

17. a) Vyšetřte, kterou číslicí končí zápis druhé mocniny prvočísla v desítkové soustavě.

b) Je-li p prvočíslo větší než 3, pak čísla $p^2 + 14$ a $p^2 - 14$ nejsou obě zároveň prvočísla. Dokažte.

Řešení. a) Pro prvočíslo 2 máme $2^2 = 4$, a tedy poslední číslice je 4. Zvláštní postavení v našem vyšetřování má též prvočíslo 5. Platí $5^2 = 25$ a poslední číslice je tedy 5. Každé jiné prvočíslo končí některou z číslic 1, 3, 7, 9. Končí-li číslicí 1, pak druhá mocnina též končí číslicí 1. Končí-li číslicí 3, je poslední číslice druhé mocniny 9. Končí-li číslicí 7, poslední číslice je též 9. Konečně končí-li číslicí 9, druhá mocnina má na konci 1.

Můžeme shrnout: Zápis druhé mocniny prvočísla v desítkové soustavě končí jedině některou z číslic 1, 4, 5, 9. (Přitom, je-li prvočíslo větší než 5, pak jeho druhá mocnina končí jedině číslicí 1 nebo 9.)

b) Nyní ke druhé otázce. Je-li $p = 5$, pak $p^2 + 14 = 39$, což není prvočíslo. Zvolíme-li libovolné prvočíslo p větší než 5, pak p^2 končí buď číslicí 1, nebo 9. Končí-li číslicí 1, pak číslo $p^2 + 14$ končí číslicí 5 a je větší než 5. Tedy je $p^2 + 14$ složené. Končí-li p^2 číslicí 9, pak $p^2 - 14$ končí číslicí 5 a je větší než 5. Proto $p^2 - 14$ je číslo složené. Tím je důkaz podán.

18. Dokažte, že existuje jediné takové prvočíslo p, že p, $p + 2$, $p + 4$ jsou prvočísla.

Řešení. Je-li $p = 2$, nejsou čísla p, $p + 2$, $p + 4$ prvočísla. Je-li $p = 3$, jsou p, $p + 2 = 5$, $p + 4 = 7$ prvočísla. Zbývá tedy dokázat, že kromě trojice 3, 5, 7 jiná trojice daných vlastností neexistuje. Každé číslo $p > 3$ lze vyjádřit ve tvaru

$$p = 3x,\ p = 3x + 1,\ p = 3x + 2,$$

kde x je přirozené číslo > 1. Vyplníme tabulku:

p	$3x$	$3x + 1$	$3x + 2$
$p + 2$	$3x + 2$	$3(x + 1)$	$3(x + 1) + 1$
$p + 4$	$3(x + 1) + 1$	$3(x + 1) + 2$	$3(x + 2)$

Zarámovaná čísla jsou složená. Proto úloha nemá řešení mimo trojici 3, 5, 7.

19. Ciferný součet kladného trojciferného prvočísla p_1 je dvojciferné prvočíslo p_2. Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslo $p_3 > 2$. Najděte všecky takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3.

Řešení. Úlohu lze řešit experimentálně, ovšem velmi neobratně. Nahlédli bychom do tabulky prvočísel a našli bychom v ní všechna trojciferná prvočísla; je jich 143. Pak bychom vypočetli jejich ciferné součty a vybrali mezi nimi všechna dvojciferná prvočísla. Opět bychom vypočetli jejich ciferné součty a mezi nimi nalezli ty, které jsou jednocifernými prvočísly. Úloha by tak byla vyřešena, ovšem řešení by bylo časově velmi náročné. S uvedeným postupem kontrastuje řešení, v němž použijeme dedukci.

Ciferný součet trojciferného čísla je nejvýše $3 . 9 = 27$. Mezi přirozenými čísly do 27 je jen pět dvojciferných prvočísel; jejich ciferné součty ukazuje tabulka:

Prvočíslo	11	13	17	19	23
Jeho ciferný součet	2	4	8	10	5

Mezi nimi je jen jedno prvočíslo větší než 2; je to 5. Našli jsme tak $p_2 = 23$, $p_3 = 5$.

Nyní je třeba najít ještě prvočíslo p_1. Nejprve musíme rozložit číslo 23 na součet tří kladných celočíselných sčítanců.

Zřejmě není možné, aby největší sčítanec byl 7, neboť $3 . 7 = 21$. Rozklady obsahující sčítanec 9 jsou tři:

$$9 + 9 + 5$$
$$9 + 8 + 6$$
$$9 + 7 + 7$$

Rozklad obsahující jako největší sčítanec číslo 8 je jen jeden:

$$8 + 8 + 7$$

Nyní najdeme všechna možná trojciferná čísla, která odpovídají těmto součtům. Následující tabulka uvádí přehledně všechny možnosti.

Rozklad čísla 23	Trojciferná čísla	p_1
$9 + 9 + 5$	995, 959, 599	599
$9 + 8 + 6$	986, 968, 896, 869, 698, 689	
$9 + 7 + 7$	977, 797, 779	977, 797
$8 + 8 + 7$	887, 878, 788	887

Při vyplňování posledního sloupce tabulky jsme užili tabulku prvočísel, která je uvedena např. v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro ZŠ. (Všechna čísla nemusíme v tabulce prvočísel hledat. Pokud jsou sudá nebo končí 5, pak nejsou zřejmě prvočísly.)

Úloha má čtyři řešení: 599, 23, 5; 797, 23, 5; 887, 23, 5; 977, 23, 5.

20. Přirozená čísla 1, 2, 3, ..., n napsaná v nějakém pořadí označíme $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Je-li n číslo liché, je součin

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3). \ldots .(a_n - n)$$

dělitelný dvěma. Dokažte.

Řešení. Mezi čísly 1, 2, ..., n je lichých čísel o jedno víc než sudých, neboť n je liché. Proto v uspořádání $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ stojí aspoň jedno liché číslo a_k na »lichém« místě k; sudých míst je totiž o jedno méně. Rozdíl $a_k - k$ je pak dělitelný dvěma, a tedy i součin $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3). \ldots .(a_n - n)$ je dělitelný dvěma.

21. V zápise dělení dvou přirozených čísel chybějí některé cifry. Nahraďte chybějící cifry tak, aby zápis byl správný.

Zápis zní:

$$12a76 : 23b = c2;$$

každé z písmen a, b, c značí jednu cifru.

Řešení. Zápis dělení ukazuje, že jde o dělení beze zbytku. Použijeme postup, kterým provádíme zkoušku dělení: platí

$$(23b).(c2) = (12a76). \tag{1}$$

Všechna tři čísla v rovnici (1) přepíšeme jako dvojčleny; vyjde

$$(230 + b) . (10c + 2) = 12\,076 + 100a. \qquad (2)$$

Rovnice (2) obsahuje sice tři neznámé a, b, c, avšak každé z čísel a, b, c je celé číslo, které je větší nebo rovné nule a menší nebo rovné devíti.

Vynásobíme oba dvojčleny na levé straně (2); po úpravě dostaneme:

$$2\,300c + 10bc - 100a = 11\,616 - 2b. \qquad (3)$$

Číslo na levé straně (3) je násobek deseti; proto jím musí být také číslo na pravé straně (3). Odtud vyplývají jen dvě možnosti pro b; $b = 3$ nebo $b = 8$.

1. Zkusíme dosadit do (3) $b = 3$; po krácení deseti vyjde:

$$233c - 10a = 1\,161$$

a odtud

$$233c = 1\,161 + 10a. \qquad (4)$$

Protože je $0 \leqq a \leqq 9$, plyne z (4)

$$1\,161 \leqq 233c \leqq 1\,251. \qquad (5)$$

Z nerovností (5) dostaneme odhady

$$5 \leqq c \leqq 5,$$

tj. $c = 5$. Avšak $233 . 52 = 12\,116$, takže pro žádné a neplatí rovnost (1).

2. Zkusíme nyní druhou možnost $b = 8$; z (3) dostaneme po krácení deseti

$$238c = 1\,160 + 10a. \tag{6}$$

Číslo na pravé straně (6) je násobek deseti; proto je tomu tak i na levé straně (6). Protože je $0 \leqq c \leqq 9$, je buď $c = 0$, nebo $c = 5$.

Zkusíme $c = 0$; z (6) vyjde $116 + a = 0$, což je nemožné (je $0 \leqq a \leqq 9$). Je tedy $c = 5$ a z (6) vypočteme $a = 3$.

Skutečně je

$$12\,376 : 238 = 52.$$

22. Udejte všechny pravoúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené celými čísly (v centimetrech), které mají tu vlastnost, že jejich obvod (v cm) je roven jejich obsahu (v cm^2).

Řešení. Jsou-li a, b velikosti stran hledaného pravoúhelníka, pak podle podmínky úlohy platí

$$2a + 2b = ab. \tag{1}$$

Přepíšeme-li tuto rovnici v tvaru

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4,$$

vyplývá odtud

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Čísla $a - 2$, $b - 2$ jsou tedy sdruženými děliteli čísla 4. Výsledky sestavíme do tabulky:

$a - 2$	4	2	1	-4	-2	-1
$b - 2$	1	2	4	-1	-2	-4
a	6	4	3	-2	0	1
b	3	4	6	1	0	-2

Geometrický význam mají jen kladné hodnoty. Hledané pravoúhelníky jsou dva: obdélník o stranách velikosti 3 cm a 6 cm a čtverec, jehož strana má velikost 4 cm.

Poznámka. Při hledání dvojic přirozených čísel a, b, které splňují rovnici (1), lze také postupovat následujícím způsobem. Z (1) plyne

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Číslo $b - 2$ je tedy dělitelem čísla 4. Na základě toho dojdeme tedy k obdobné tabulce jako v uvedeném řešení. Bude ovšem mít jen tři řádky, a to pro $b - 2$, b, a.

23. Určete všechny dvojice celých čísel x, y, pro které platí

$$4x^2 - 4x - y^2 = 20. \tag{1}$$

Řešení. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$(2x - 1)^2 - y^2 = 21. \tag{2}$$

Levou stranu poslední rovnice rozložíme pomocí vzorce pro rozdíl druhých mocnin. Dostáváme

$$(2x + y - 1)(2x - y - 1) = 21.$$

Číslo 21 lze rozložit v tyto součiny celých čísel:

$$1 \,.\, 21 = 3 \,.\, 7 = (-1) \,.\, (-21) = (-3) \,.\, (-7).$$

Sestavíme tabulku:

$2x + y - 1$	1	21	-1	-21	3	7	-3	-7
$2x - y - 1$	21	1	-21	-1	7	3	-7	-3
x	6	6	-5	-5	3	3	-2	-2
y	-10	10	10	-10	-2	2	2	-2

Každá z 8 dvojic čísel x, y je řešením úlohy, jak se přesvědčíme zkouškou.

24. Určete všecky dvojice přirozených čísel x, y, pro které platí

$$8x^3 - y^3 = 387. \tag{1}$$

Řešení. Platí $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$, tj. rovnice (1) zní

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 387.$$

Zřejmě je $4x^2 + 2xy + y^2 > 0$, $2x - y > 0$, $2x > y$. Rozložíme číslo 387 v součin prvočinitelů: $387 = 3 \cdot 3 \cdot 43$. Sestavíme tabulku:

$2x - y$	1	3	43	9	129	387
$4x^2 + 2xy + y^2$	387	129	9	43	3	1
$(2x - y)^2$	1	9	1 849	81	$129^2 > 3$	$387^2 > 1$
$4x^2 + 2xy + y^2 - (2x - y)^2 = 6xy$	386	120	záporné	záporné	záporné	záporné
xy	není celé	20	—	—	—	—
x	—	4	—	—	—	—
y	—	5	—	—	—	—

Rozložíme číslo 20 v součin dvou činitelů: $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$; kladné rozdíly $2x - y$ jsou $2 \cdot 20 - 1 = 39$,

$2 \cdot 10 - 2 = 18$, $2 \cdot 5 - 4 = 6$, $2 \cdot 4 - 5 = 3$. Vyhovuje jen poslední; proto do tabulky (sloupec 2) doplníme $x = 4, y = 5$. Skutečně je $8x^3 - y^3 = 8 \cdot 64 - 125 = 512 - 125 = 387$.

Jiné řešení. Položíme-li $2x = z$, dostáváme

$$z^3 - y^3 = 387. \qquad (2)$$

$1^3 = 1$
$2^3 = 8$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$10^3 = 1\,000$
$11^3 = 1\,331$
$12^3 = 1\,728$
$13^3 = 2\,197$
$14^3 = 2\,744$
.
.
.

Úloha zní: Určete dvě přirozená čísla z, y, přičemž z je sudé, aby rozdíl jejich třetích mocnin byl 387. Z rovnosti (2) plyne, že pro sudé číslo z platí

$$z^3 > 387,$$

takže z tabulky třetích mocnin přirozených čísel snadno zjistíme, že

$$z \geqq 8. \qquad (3)$$

Z této tabulky lze také odhadnout, že sudé číslo z nemůže být větší než 10, tj. musí být

$$z \leqq 10. \qquad (4)$$

Odečteme-li totiž od třetí mocniny libovolného sudého čísla $z > 10$ třetí mocninu největšího čísla, které přichází v úvahu jako číslo y, tj. třetí mocninu čísla $z - 1$, potom, jak se zdá z tabulky, dostaneme vždy číslo větší než 387. Pravdivost tohoto odhadu snadno dokážeme. Každé sudé přirozené číslo $z > 10$ lze psát ve tvaru $12 + n$, kde n je celé nezáporné číslo. Platí:

$$(12 + n)^3 - [(12 + n) - 1]^3 =$$

$$= (12 + n)^3 - (12 + n)^3 + 3(12 + n)^2 - 3(12 + n) + 1 =$$

$$= 397 + n^2 + 69n > 387.$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne, že sudé číslo z je buď 8 nebo **10.** Z tabulky třetích mocnin zjistíme, že úloha má jediné řešení $z = 8$ a $y = 5$, tj. $x = 4$ a $y = 5$.

25. Zlomek $\frac{178}{39}$ vyjádřete jako součet dvou kladných zlomků se jmenovateli 3, 13 a s celočíselnými čitateli. Najděte všecka řešení úlohy.

Řešení. Podle textu úlohy je

$$\frac{178}{39} = \frac{x}{3} + \frac{y}{13}, \tag{1}$$

kde x, y jsou přirozená čísla. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$13x + 3y = 178$$

a dále

$$y = 59 + \frac{1 - 13x}{3}. \tag{2}$$

Protože y musí být přirozené číslo, musí být podle (2) číslo

$$\frac{1 - 13x}{3} = \frac{1 - x}{3} - 4x > -59$$

a zároveň celé. Těmto podmínkám vyhovují jedině čísla $x = 1$, 4, 7, 10, 13. Sestavíme tabulku:

x	1	4	7	10	13
$\frac{1}{3}(1-13x)$	-4	-17	-30	-43	-56
y	55	42	29	16	3

Zkouška ukáže, že všech pět dvojic $\boxed{1 \mid 55}$, $\boxed{4 \mid 42}$, $\boxed{7 \mid 29}$, $\boxed{10 \mid 16}$, $\boxed{13 \mid 3}$ jsou řešení úlohy.

Jiné řešení. Odvodíme opět rovnici

$$13x + 3y = 178. \tag{3}$$

Každé její celočíselné řešení x, y má tu vlastnost, že x se dá vyjádřit v jednom z tvarů $3z$, $3z + 1$, $3z + 2$, kde z je vhodné číslo celé. Snadno vyloučíme tvar $3z$ (178 není násobek 3) a tvar $3z + 2$ ($178 - 26 = 152$ také není násobek 3). Je tedy

$$x = 3z + 1$$

a z (3) plyne

$$y = 55 - 13z.$$

Sestavíme tabulku:

z	5	4	3	2	1	0	-1
y	-10	3	16	29	42	55	68
x	16	13	10	7	4	1	-2

Pro $z > 5$ je $y < 0$, pro $z < 0$ je $x < 0$. Pět zarámovaných sloupců udává tedy jako předtím všecka řešení úlohy.