35. mezinárodní matematická olympiáda

Po loňském poměrně úspěšném vystoupení jak českého, tak i slovenského družstva na 34. MMO v tureckém Istanbulu jsme letos odjížděli na olympiádu s vědomím, že naše vyhlídky jsou tentokrát poněkud slabší, zvlášť když vítězové III. kola kategorie A nedosáhli v republikovém finále více než 69 % možných bodů. Nicméně dva z našich studentů získali na 35. MMO druhou cenu, dva se museli spokojit s třetí cenou a dva zůstali bez ceny. Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu AV ČR, pedagogickým vedoucím družstva byl doc. *Jaromír Šimša* z brněnské pobočky téhož ústavu.

Výsledky našich žáků:

		Body za úlohu						Body	Cena
Umístění		1	2	3	4	5	6		
78.–87.	Petr Kaňovský	7	7	7	7	0	3	31	II.
193.–204.	Filip Krška	0	7	6	2	3	0	18	
205.–213.	Jan Mach	0	7	5	2	3	0	17	
126.–131.	Libor Mašíček	0	7	7	7	4	0	25	III.
102.–113.	David Pavlica	0	7	7	7	2	5	28	III.
49.–57.	Robert Šámal	0	7	7	7	7	7	35	II.
	Celkem	7	42	39	32	19	15	154	

Vedoucím slovenské delegace byl doc. RNDr. *Tomáš Hecht*, CSc., z MFF UK v Bratislavě a pedagogickým vedoucím bývalý úspěšný reprezentant *Richard Kollár*, nyní student MFF UK v Bratislavě. Že Slovensko jede na MMO se dvěma výrazně lepšími borci, jsme věděli už ze srovnání výsledků obou celostátních kol v Bratislavě a Jevíčku. A to ve slovenském družstvu ještě chyběl vítěz III. kola, který dal přednost účasti na MFO v Pekingu. A tak nakonec mezi slovenskými studenty nejvíce zazářil *Andrej Zlatoš* ze 4. ročníku Gymnázia Grösslingová v Bratislavě, který získal za všechna svá řešení plný počet bodů a zařadil se tak mezi 22 absolutních vítězů 35. MMO.

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
284.–297.	Ivan Cimrák	1	5	0	1	4	0	11	
154.–164.	Patrik Horník	7	7	0	2	6	0	22	III.
268.–283.	Michal Kovár	0	7	0	1	4	0	12	
114.–119.	Peter Macák	3	7	5	7	5	0	27	III.
44.–48.	Martin Niepel	7	7	7	7	7	1	36	II.
1.–22.	Andrej Zlatoš	7	7	7	7	7	7	42	I.
	Celkem	25	40	19	25	33	8	150	

Výběr úloh lze stručně charakterizovat tak, že nebylo téměř z čeho vybírat. Problémová komise, přestože byla vedena velmi zkušeným Kanaďanem čínského původu *Andym Liu*, se patrně rozhodla učinit letošní olympiádu jednou z nejlehčích za posledních 10 let. Výběr 24 úloh, které dostala jury, téměř neobsahoval opravdu obtížné úlohy, jež by pak více rozvrstvily početné pole soutěžících (v naší situaci jsme samozřejmě stáli o úlohy spíše těžší, protože naši dva nejlepší studenti, jak se ostatně potvrdilo, neměli na suverénní vyřešení všech úloh, nicméně jsem přesvědčen, že stejného výsledku by dosáhli i při těžších úlohách; a pro slabší žáky je menší ostuda, když pohoří na těžších úlohách). Navíc jediné dvě úlohy, jež snad odpovídaly náročností mezinárodní olympiádě, byly nakonec staženy po nejasném prohlášení trenéra jedné ze zúčastněných zemí, že podobné či stejné úlohy byly použity během jejich přípravy. Tak se nakonec nejtěžší úlohou 1. dne stala 1. úloha, za kterou jsme získali jen 7 bodů. Druhý den byla bez konkurence poněkud nestandardní úloha 6.

Překvapivě nejlepšího výsledku dosáhli naši studenti ve 2. úloze, která byla geometrická (a přestože to byla úloha natolik jednoduchá, že téměř neodpovídala nárokům na úlohy MMO, a umožňovala jak trigonometrické, tak i nepříliš složité analytické řešení, potěšila i ta skutečnost, že mezi našimi šesti řešeními byla tři velmi pěkná řešení syntetická), zatímco 1. úloha, mezi členy jury všeobecně považovaná za nejlehčí z předložené šestice, dopadla nejhůře, jak již bylo zmíněno.

Že letošní úlohy byly poměrně lehké, je vidět i z počtu bodů nutných pro získání příslušné medaile: První cena se udělovala za 40–42 bodů, druhá za 30–39 a třetí za 19–29 bodů. Žádná z úloh nebyla taková, že by se dalo očekávat nějaké zvlášť elegantní či překvapivé řešení. Proto nebyla udělena ani žádná zvláštní cena.

Suverénně nejlepší byli tentokrát Američané (v čínském družstvu údajně doplatili tři studenti na špatný překlad 6. úlohy do čínštiny) —

všichni získali plný počet bodů. Značný byl letos i počet úspěšných dívek; Rakušanka *Theresia Eisenkölblová* měla dokonce plný počet bodů a nejméně devět dalších defilovalo během slavnostního zakončení ještě před naším nejlepším *Robertem Šámalem*. V íránském družstvu jich byla přesně polovina. Ve výsledkové listině se však dívčí jména obtížně určují.

Neoficiální pořadí první třetiny zúčastněných zemí (olympiády se zúčastnilo 385 žáků z 69 zemí):

	I	II	III	body		I	II	III	body
USA	6	0	0	252	Itálie	0	0	2	102
ČLR	3	3	0	229	Nizozemsko	0	0	2	99
Rusko	3	2	1	224	Lotyšsko	0	0	3	98
Bulharsko	3	2	1	223	Brazílie (5)	0	2	0	95
Maďarsko	1	5	0	221	Gruzie	0	0	2	95
Vietnam	1	5	0	207	Švédsko	0	0	1	92
Velká Británie	2	2	2	206	Řecko	0	0	1	91
Írán	2	2	2	203	Chorvatsko	0	0	2	90
Rumunsko	0	5	1	198	Estonsko (5)	0	0	1	82
Japonsko	1	2	3	180	Norsko	0	1	1	80
Německo	1	2	3	175	Makao	0	1	0	75
Austrálie	0	2	3	173	Litva	0	0	1	73
Korea	0	2	4	170	Finsko	0	0	0	70
Polsko	2	0	3	170	Irsko	0	0	0	68
Tchaj-wan	0	4	1	170	Makedonie (4)	0	0	1	67
Indie	0	3	3	168	Mongolsko	0	1	0	65
Ukrajina	1	1	2	163	Trinidad a Tobago	0	0	0	63
Hongkong	0	2	4	162	Filipíny	0	0	0	53
Francie	1	1	3	161	Chile (2)	0	1	0	52
Argentina	0	3	1	159	Moldavsko	0	0	1	52
Česká republika	0	2	2	154	Portugalsko	0	0	0	52
Slovensko	1	1	2	150	Dánsko (4)	0	0	2	51
Bělorusko	0	1	4	144	Kypr	0	0	0	48
Kanada	1	0	3	143	Slovinsko (5)	0	0	0	47
Izrael	0	1	4	143	Indonésie	0	0	0	46
Kolumbie	0	2	2	136	Bosna a Hercegovina (5)	0	0	1	44
JAR	0	0	3	120	Španělsko	0	0	0	41
Turecko	0	0	4	118	Švýcarsko (3)	0	0	1	35
Nový Zéland	0	0	4	116	Lucembursko (1)	0	1	0	32
Singapur	0	2	0	116	Island (4)	0	0	0	29
Rakousko	1	0	0	114	Mexiko	0	0	0	29
Arménie (5)	0	0	4	110	Kyrgyzstán	0	0	0	24
Thajsko	0	0	3	106	Kuba (1)	0	0	0	12
Belgie	0	0	2	105	Kuvajt (5)	0	0	0	12
Maroko	0	0	2	105					

Příští, 36. MMO se bude konat v roce 1995 v kanadském Torontu. Vzhledem k tomu, že mezi našimi letošními reprezentanty byl jen jeden maturant, mohlo by se nám podařit do příští olympiády připravit docela solidní a zkušené mužstvo, které by se určitě mělo pokusit o návrat do první čtvrtiny, ne-li dokonce do první desítky nejlepších zemí.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť m a n jsou kladná celá čísla a nechť $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou různé prvky množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s následující vlastností: jestliže pro nějaká i, j, $1 \leqq i \leqq j \leqq m$, je $a_i + a_j \leqq n$, pak existuje k, $1 \leqq k \leqq m$, že $a_i + a_j = a_k$. Dokažte, že

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqq \frac{n+1}{2}.$$

(*Francie*)

2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny $|AB| = |AC|$. Dále předpokládejme, že

(i) M je střed úsečky BC a O bod přímky AM takový, že přímky OB a AB jsou navzájem kolmé;
(ii) Q je libovolný bod úsečky BC různý od bodů B a C;
(iii) bod E leží na přímce AB a bod F na přímce AC tak, že E, Q a F jsou tři různé body ležící v přímce.

Dokažte, že $OQ \perp EF$, právě když $|QE| = |QF|$. (*Arménie, Austrálie*)

3. Pro libovolné kladné celé číslo k označme $f(k)$ počet všech prvků množiny $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, v jejichž dvojkovém zápise jsou právě tři jedničky.

(a) Dokažte, že pro každé kladné celé číslo m existuje aspoň jedno kladné celé číslo k takové, že $f(k) = m$.
(b) Určete všechna kladná celá čísla m, pro něž existuje právě jedno k takové, že $f(k) = m$. (*Rumunsko*)

4. Určete všechny uspořádané dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

celé. (*Austrálie*)

5. Nechť S je množina všech reálných čísel větších než -1. Najděte všechny funkce $f \colon \mathsf{S} \to \mathsf{S}$, jež splňují následující dvě podmínky:

(i) $f\big(x + f(y) + xf(y)\big) = y + f(x) + yf(x)$ pro všechna $x, y \in \mathsf{S}$;
(ii) funkce $f(x)/x$ je rostoucí v každém z intervalů $-1 < x < 0$ a $0 < x$.

(*Velká Británie*)

6. Ukažte, že existuje množina A kladných celých čísel s následující vlastností: Pro libovolnou nekonečnou množinu S prvočísel existuje $k \geqq 2$ a dvě kladná celá čísla $m \in \mathsf{A}$, $n \notin \mathsf{A}$, jež jsou součinem k různých prvků množiny S. (*Finsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Uvažujme libovolné dva prvky a_i, a_j takové, že $a_i + a_j \leqq n$. V takovém případě je podle předpokladu $a_i + a_1 = a_{k_1} < \ldots < a_i + a_j = a_{k_j}$ rostoucí posloupnost j prvků uvažované množiny $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, přičemž odpovídající indexy $k_1, \ldots, k_j$ patří do množiny $\{i+1, \ldots, m\}$, takže platí $j \leqq m - i$. Dokázali jsme tak, že jakmile $a_i + a_j \leqq n$, pak $i + j \leqq m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tedy platí $a_i + a_{m+1-i} \geqq n + 1$. Sečtením všech m takových nerovností dostáváme

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \geqq m(n+1)$$

neboli

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqq \frac{n+1}{2}.$$

Jiné řešení. Označme h nejmenší prvek množiny $\mathsf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ a uvažme rozklad množiny A na podmnožiny A_k podle zbytků modulo h, kde $\mathsf{A}_k = \{a \in \mathsf{A}\colon a \equiv k \pmod h\}$, $0 \leqq k \leqq h - 1$. Pokud je množina A_k neprázdná, označme h_k její nejmenší prvek, takže bude $\mathsf{A}_k = \{h_k, h_k + h, \ldots, h_k + j_k h\}$, kde j_k je největší celé číslo takové, že $h_k + j_k h \leqq n$. Protože prvky z A_k tvoří aritmetickou posloupnost, je jejich aritmetický průměr roven průměru nejmenšího a největšího prvku a ten splňuje nerovnosti

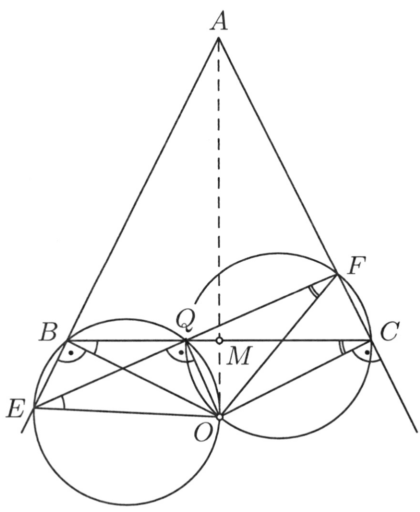
$$\frac{h_k + (h_k + j_k h)}{2} \geqq \frac{h_k + (j_k + 1)h}{2} \geqq \frac{n+1}{2}.$$

Protože výsledná nerovnost platí pro všechny neprázdné množiny A_k, platí stejná nerovnost i pro aritmetický průměr prvků množiny A.

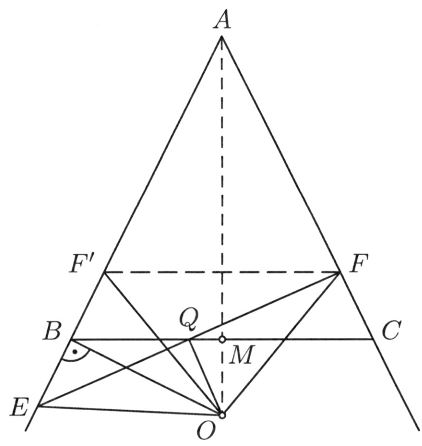
2. Protože trojúhelník ABC je osově souměrný podle osy AO, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že bod Q leží uvnitř úsečky BM, což zřejmě znamená, že bod E musí ležet na polopřímce AB za bodem B. Dodejme, že pro $Q = M$ je tvrzení úlohy zřejmé.

Nechť $OQ \perp EF$. Podle předpokladu je úhel EBO pravý, proto body O, Q, B, E leží na kružnici s průměrem EO. Obdobně dostáváme, že body O, Q, C, F leží na kružnici s průměrem FO. Z rovnosti odpovídajících obvodových úhlů nad společnou tětivou OQ obou kružnic tak plyne (obr. 32) podobnost trojúhelníků $EOF \sim BOC$. Trojúhelník BOC je však rovnoramenný, je tudíž rovnoramenný i trojúhelník EOF a Q jakožto pata jeho výšky půlí základnu EF.

Nechť $|QE| = |QF|$. Opišme kružnice trojúhelníkům EBQ, FCQ a další průsečík obou kružnic označme X. Jelikož trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí $|\sphericalangle EBQ| = 180° - |\sphericalangle QCF|$. Odtud plyne, že shodným tětivám EQ a FQ v každé z obou opsaných kružnic přísluší týž středový úhel. Jsou to tudíž shodné kružnice, a tak je také $|\sphericalangle QEX| = |\sphericalangle QFX|$. Trojúhelník EFX je tudíž rovnoramenný a QX je jeho výška, takže $QX \perp EF$. To však znamená, že EX a FX jsou průměry uvažovaných kružnic, a proto (podle Thaletovy věty) $|\sphericalangle EBX| = |\sphericalangle FCX| = 90°$. Vidíme, že bod X je totožný s bodem O, proto $OQ \perp EF$.



Obr. 32



Obr. 33

Jiné řešení. Předpokládejme opět, že bod Q leží uvnitř úsečky BM a nechť $|QE| = |QF|$. Uvažujme bod F' souměrně sdružený s bodem F podle osy AM (obr. 33). Je tedy $|OF| = |OF'|$, $FF' \parallel BQ$, a protože Q je střed strany EF, je BQ střední příčka trojúhelníku $F'FE$, tudíž $|EB| = |BF'|$, a tak je OB výška *rovnoramenného* trojúhelníku EOF'. Vidíme, že $|EO| = |OF'| = |OF|$, takže i trojúhelník EOF je rovnoramenný a OQ je tím pádem jeho výška, tedy $OQ \perp EF$, jak jsme chtěli dokázat.

K důkazu opačné implikace si stačí uvědomit, že daným bodem Q prochází jediná přímka q kolmá na QO a jediná přímka p taková, že polopřímky AB, AC na ní vytínají shodné úseky QE, QF (takový bod $F \in AC$ musí ležet na obrazu přímky AB ve středové souměrnosti podle Q). A z důkazu první implikace víme, že $p = q$.

Poznámka. Předchozí argument samozřejmě nezávisí na tom, kterou ze dvou implikací dokážeme jako první. Uveďme ještě hezký argument v případě, že jsme nejdříve dokázali implikaci $QO \perp EF \Rightarrow |QE| = |QF|$. Za předpokladu $|QE| = |QF|$ veďme bodem Q kolmici ke QO. Ta protne polopřímky AB, AC v bodech E', F', pro něž tedy rovněž platí $|QE'| = |QF'|$. Bod Q je tak společným středem úseček EF a $E'F'$. Kdyby byly úsečky EF a $E'F'$ různé, byl by $EE'FF'$ rovnoběžník, což není možné, protože AB, AC jsou různoběžky.

3. (a) Podívejme se, jak se mění hodnota funkce f při přechodu od k ke $k+1$. Označme T množinu všech čísel, jejichž dvojkový zápis obsahuje právě tři jedničky. Hodnota $f(k)$ pak udává počet čísel z T v množině $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, zatímco $f(k+1)$ počet čísel z T v množině $\{k+2, \ldots, 2k, 2k+1, 2k+2\}$. Všimněme si, že počet jedniček v dvojkovém zápisu čísel $k+1$ a $2k+2 = 2(k+1)$ je stejný, proto o případné změně hodnoty $f(k+1)$ oproti $f(k)$ rozhoduje jen číslo $2k+1$, tudíž

$$f(k+1) - f(k) = \begin{cases} 1, & \text{když } 2k+1 \in \mathsf{T}, \\ 0, & \text{když } 2k+1 \notin \mathsf{T}. \end{cases} \tag{1}$$

Dvojkový zápis čísla $2k+1$ dostaneme z dvojkového zápisu čísla k přidáním jedničky na konec, proto platí, že

$$f(k+1) - f(k) = 1, \quad \text{právě když dvojkový zápis čísla } k \text{ obsahuje právě dvě jedničky.} \tag{2}$$

Posloupnost $f(1), f(2), \ldots$ začíná nulou, a protože čísel, jejichž dvojkový zápis obsahuje právě dvě jedničky, je nekonečně mnoho, obsahuje uvažovaná posloupnost všechna přirozená čísla.

(b) Z (1) vidíme, že funkce f je po částech konstantní. Má-li tedy funkce f nabýt nějaké hodnoty m pro jediné k, musí jednotkový skok nastat v $k-1$ i v k, což podle (2) nastane, právě když obě čísla k i $k-1$ mají ve svém dvojkovém zápisu právě dvě jedničky. Číslo $k-1$ zřejmě musí být liché, protože jinak by jeho dvojkový zápis končil nulou a k by pak nutně mělo o jedničku víc. Jako liché číslo, jehož dvojkový zápis obsahuje právě dvě jedničky, musí číslo $k-1$ začínat a končit jedničkou, mezi nimiž je skupina nul. Ta však nemůže být prázdná, protože jinak bychom z $(11)_2$ dostali $(100)_2$. Číslo $k-1$ proto musí být tvaru 2^r+1, kde $r \geqq 2$, neboli

$$k = 2^r + 2, \quad r \geqq 2.$$

Obráceně pro každé takové k mají jak k, tak $k-1$ ve svém dvojkovém zápisu právě dvě jedničky. Zbývá vyčíslit příslušnou hodnotu $m = f(k)$.

Pro $k = 2^r$ je $2k = 2^{r+1}$, takže množina $\mathsf{T} \cap \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ je tvořena čísly, jejichž dvojkový zápis začíná jedničkou a na zbývajících r místech má právě dvě jedničky. Pro jejich výběr máme $\binom{r}{2}$ možností, proto

$$f(2^r) = \binom{r}{2}.$$

Protože pro každé $r \geqq 2$ má číslo 2^r ve svém dvojkovém zápisu jednu jedničku a číslo 2^r+1 dvě jedničky, je podle (2)

$$f(2^{r+1}) - f(2^r) = 0 \quad \text{a} \quad f(2^r+2) - f(2^r+1) = 1.$$

Sečtením obou rovností dostáváme

$$m = f(2^r+2) = f(2^r) + 1 = \binom{r}{2} + 1, \quad r \geqq 2.$$

To jsou všechny hledané hodnoty, pro něž má rovnice $f(k) = m$ právě jedno řešení.

Jiné řešení. (a) Označme t funkci, jež je rovna jedné právě pro všechna přirozená čísla, jejichž zápis v dvojkové soustavě obsahuje právě tři jedničky, a jinak je nulová. Z rozdílu množin $\{k+2, \ldots, 2k, 2k+1, 2k+2\}$ a $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ vyplývá, že

$$f(k+1) = f(k) - t(k+1) + t(2k+1) + t(2k+2).$$

Protože dvojkové zápisy čísel n a $2n$ se liší jen přidanou nulou na konci druhého z nich, je $t(2k+2) = t(k+1)$, a proto

$$f(k+1) - f(k) = t(2k+1). \tag{3}$$

Funkce f je tedy neklesající, její přírůstek je nejvýše 1, $f(1) = 0$ a navíc funkce f není shora omezená, protože $f(2^r) = \binom{r}{2}$ (to jsme už zdůvodnili v předchozím řešení). Funkce f tedy nabývá všech nezáporných celočíselných hodnot.

(b) Vzhledem k uvedeným vlastnostem bude mít rovnice $f(k) = m$ jediné řešení k, právě když bude f v hodnotě k rostoucí, tj. když bude platit

$$f(k) - f(k-1) = f(k+1) - f(k) = 1,$$

což nastane, právě když bude

$$t(2k-1) = t(2k+1) = 1.$$

Protože dvojkový zápis lichého čísla $2k - 1 = 2(k-1) + 1$ končí jedničkou, musí mít $2(k-1)$, a tedy i $k-1$ ve svém dvojkovém zápisu právě dvě jedničky. Dvojkový zápis čísla $k-1$ ovšem nemůže končit nulou, neboť pak by číslo $2(k-1)$ končilo dvěma nulami, tudíž dvojkový zápis čísla $2k+1 = 2(k-1)+3$ by celkem obsahoval čtyři jedničky. Vychází tak, že dvojkový zápis čísla $k-1$ je sestaven ze dvou jedniček a případné skupiny nul mezi nimi, tudíž $k-1 = 2^r+1$ neboli $k = 2^r+2$. Pro takové k pak vychází $2k+1 = 2^{r+1}+5$, což je číslo se třemi jedničkami v dvojkové soustavě, právě když $r \geqq 2$.

Pro odpovídající hodnoty $m = f(k)$ tak podle (3) máme

$$\begin{aligned} m = f(2^r+2) &= f(2^r+1) + t(2^{r+1}+3) = \\ &= f(2^r) + t(2^{r+1}+1) + t(2^{r+1}+3) = \\ &= \binom{r}{2} + 1, \quad r \geqq 2, \end{aligned}$$

protože pro $r \geqq 2$ je $t(2^{r+1}+1) = 0$ a $t(2^{r+1}+3) = 1$. Tím je hledaná množina popsána.

4. Všimněme si, že čísla $mn-1$ a m^3 jsou nesoudělná. Číslo $mn-1$ proto dělí n^3+1, právě když $mn-1$ dělí $m^3(n^3+1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1$ neboli $mn-1$ dělí m^3+1. Ačkoli to nebylo na první pohled zjevné, je úloha vůči neznámým m a n symetrická, proto budeme dál bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m \geqq n$.

V případě $m = n$ dostáváme

$$\frac{m^3+1}{mn-1} = \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}.$$

To je číslo celé, právě když $n = 2$.

Nechť je nyní $m > n$. Pokud $n = 1$, má být číslo $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = \dfrac{2}{m-1}$ celé, což nastane jen pro $m = 2$ nebo $m = 3$.

Zbývá rozebrat případ $m > n \geqq 2$. Je však $n^3 + 1 \equiv 1 \pmod{n}$, zatímco $mn - 1 \equiv -1 \pmod{n}$. Proto pro případný celočíselný podíl musí platit

$$\frac{n^3+1}{mn-1} = kn - 1$$

pro vhodné celé k. Pak ovšem

$$kn - 1 < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$$

neboli

$$(k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Odtud plyne, že $k = 1$, a tedy $n^3 + 1 = (mn-1)(n-1)$. Máme tak

$$mn = \frac{n^3+1}{n-1} + 1 = \frac{n^3+n}{n-1} \quad \text{neboli} \quad m = n + 1 + \frac{2}{n-1},$$

což je celé jen pro $n = 2$ nebo $n = 3$. V obou případech vychází $m = 5$.

Úloha má tedy celkem devět řešení $(2,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,5)$ a $(3,5)$, přičemž poslední čtyři jsme získali díky symetrii mezi m, n.

5. Z podmínky (ii) v zadání plyne, že rovnice $f(x) = x$ může mít nejvýše tři řešení, jedno na intervalu $(-1, 0)$, jedno rovné 0 a jedno na intervalu $(0, \infty)$. Dokažme sporem, že rovnice ani v jednom z uvedených intervalů $(-1, 0)$ či $(0, \infty)$ řešení nemá.

Nechť $u \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ je takové, že $f(u) = u$. Dosadíme-li $x = y = u$ do dané funkcionální rovnice, dostaneme $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$. Kvadratická funkce $u^2 + 2u$, jak se lze snadno přesvědčit, zobrazuje každý z intervalů $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$ do sebe. Proto musí platit $u^2 + 2u = u$. Ovšem ani jeden z kořenů 0 a -1 této kvadratické rovnice ve sjednocení obou intervalů neleží. Jediné řešení rovnice $f(x) = x$ tudíž může být $x = 0$.

Dosazením $x = y$ do dané funkcionální rovnice však pro všechna $x \in \mathsf{S}$ dostáváme

$$f\big(x + (x+1)f(x)\big) = x + (1+x)f(x).$$

Proto musí platit $x + (1+x)f(x) = 0$ neboli

$$f(x) = -\frac{x}{x+1}. \tag{1}$$

Ještě ověříme zkouškou, že nalezená funkce vyhovuje zadaným podmínkám. Funkce (1) je evidentně rostoucí na S a pro všechna $x, y \in \mathsf{S}$ splňuje

$$y + (1+y)f(x) = y - \frac{x(1+y)}{x+1} = \frac{y-x}{x+1}$$

a

$$f\big(x + (1+x)f(y)\big) = f\Big(\frac{x-y}{y+1}\Big) = -\frac{\dfrac{x-y}{y+1}}{1 + \dfrac{x-y}{y+1}} = \frac{y-x}{x+1}.$$

6. Nechť A je množina všech přirozených čísel tvaru $x = q_1 q_2 \ldots q_{q_1}$, kde $q_1 < q_2 < \ldots < q_{q_1}$ jsou jakákoli prvočísla v libovolném (tedy prvočíselném) počtu q_1. Jinými slovy

$$\begin{aligned}\mathsf{A} = \{2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, \ldots\} &\cup \{3\cdot 5\cdot 7, 3\cdot 5\cdot 11, \ldots\} \cup \\ &\cup \{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17, \ldots\} \cup \ldots\end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že pro libovolnou nekonečnou množinu prvočísel $\mathsf{S} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, kde $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$, splňuje množina A podmínky úlohy. Stačí zvolit $k = p_1 \geqq 2$, $m = p_1 p_2 \ldots p_k$ a $n = p_2 p_3 \ldots p_{k+1}$.

Jiné řešení. Vytvořme množinu A následovně: Pro každé přirozené $k \geqq 2$ zařadíme do A právě ta přirozená čísla x, pro která $x = p_1 p_2 \ldots p_k$, kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ je k navzájem různých prvočísel, jejichž součet je dělitelný k. Pro libovolnou nekonečnou množinu prvočísel S označme $q = \min \mathsf{S}$. Protože množina S je nekonečná, určitě v ní najdeme q prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_q$ se stejným zbytkem mod q (podle Dirichletova principu stačí v množině S probrat $q(q-1)+1$, nebo dokonce jen $(q-1)^2+1$ čísel, poněvadž žádné další prvočíslo už nemá nulový zbytek mod q).

Nyní stačí vzít $k = q$, $m = p_1 p_2 \ldots p_k$ a $n = q p_1 p_2 \ldots p_{k-1}$. Zřejmě $m \in \mathsf{A}$, protože q čísel se stejným zbytkem mod q má součet dělitelný q, a $n \notin \mathsf{A}$, protože součet $q-1$ čísel se stejným nenulovým zbytkem dělitelný číslem q být nemůže.

Poznámka. Všimněme si, že úloha se týká jen čísel, jež ve svém rozkladu na prvočinitele postrádají vyšší mocninu nějakého prvočísla. Kam budou patřit ostatní složená čísla, nehraje žádnou roli. Je asi zřejmé, že počet možností, jak požadovanou množinu A sestrojit, není omezen.