Přípravná soustředění před 35. MMO

V průběhu 43. ročníku byla uspořádána dvě výběrová soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu. Na první soustředění, které se konalo v dobře známém internátu při gymnáziu v Jevíčku od 10. do 13. května 1994, bylo pozváno všech 12 vítězů celostátního kola kategorie A, z nichž se jeden omluvil.

Soustředění bylo zaměřeno na řešení obtížných úloh v omezeném čase (v soutěžních podmínkách). Po odpolední relaxaci byl proveden detailní rozbor opravených řešení. Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Libor Mašíček	3 G Brno, kpt. Jaroše	69
David Opěla	2 GMK Bílovec, 17. listopadu	67
David Pavlica	3 GMK Bílovec, 17. listopadu	66
Robert Šámal	3 G Praha 5, Zborovská	65
Martin Nečesal	3 G Brno, kpt. Jaroše	60
Petr Kaňovský	3 G Brno, kpt. Jaroše	63
Filip Krška	3 G Brno, kpt. Jaroše	62
Michal Beneš	2 G Praha 5, Zborovská	57
Jan Mach	4 GMK Bílovec, 17. listopadu	56
Michaela Prokešová	3 G Č. Budějovice, Jírovcova	51
Jan Rychtář	3 G Strakonice, Máchova	48

Druhé soustředění bylo už určeno pouze vybraným reprezentantům České republiky na 35. MMO v Hongkongu včetně dvou náhradníků a konalo se opět v Jevíčku od 20. do 24. června 1994. Výsledky jednotlivých studentů ukazuje další tabulka:

Robert Šámal	3 G Praha 5,	30,5
David Pavlica	3 GMK Bílovec, listopadu	28,5
Petr Kaňovský	3 G Brno, Jaroše	25
Libor Mašíček	3 G Brno, Jaroše	22
Filip Krška	3 G Brno, Jaroše	20
Jan Mach	4 GMK Bílovec, listopadu	20
Martin Nečesal	3 G Brno, Jaroše	19
David Opěla	2 GMK Bílovec, listopadu	18

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Švrček* (20. 6. a 21. 6.),
dr. *Miroslav Engliš* (22. 6.),
dr. *Karel Horák* (23. 6.).

Některé úlohy zadané na přípravných soustředěních

1. Nechť AB a CD jsou vzájemně kolmé tětivy téže kružnice k a nechť P_1, P_2, P_3, P_4 označují v cyklickém pořadí obsahy čtyř částí, na něž je kruh s hraniční kružnicí k oběma tětivami rozdělen. Určete, jaké největší a nejmenší hodnoty nabývá výraz
$$\frac{P_1 + P_3}{P_2 + P_4}.$$

2. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že platí
$$\frac{1}{2} f(xy) + \frac{1}{2} f(xz) - f(x) f(yz) \geqq \frac{1}{4}$$
pro libovolná reálná x, y, z.

3. Dokažte, že součet velikostí šesti úhlů, pod nimiž vidíme hrany libovolného čtyřstěnu z jeho libovolného vnitřního bodu, je větší než 540°.

4. Uvažujme tři kružnice vně připsané danému trojúhelníku ABC a trojúhelník $A'B'C'$ takový, že tyto tři kružnice leží uvnitř trojúhelníku $A'B'C'$, přičemž strany trojúhelníku $A'B'C'$ jsou společnými tečnami každých dvou z těchto kružnic. Dokažte, že platí
$$P_{A'B'C'} \geqq 25 P_{ABC},$$
kde P_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ.

5. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je daná funkce a nechť dále pro každá dvě reálná čísla x, y platí
a) $f(2x) = f\big(\sin(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi y)\big) + f\big(\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi y)\big)$,
b) $f(x^2 - y^2) = (x + y) f(x - y) + (x - y) f(x + y)$.
Určete
$$f(1994 + 1994^{1/2} + 1994^{1/3}).$$

6. V trojúhelníku ABC jsou zvoleny body $K \in \overline{BC}$, $L \in \overline{AC}$, $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{LM}$, $R \in \overline{MK}$, $F \in \overline{KL}$. Jestliže Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 a Q značí po řadě obsahy trojúhelníků AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN a ABC, pak platí
$$Q \geqq 8(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6)^{1/6}.$$
Dokažte.

7. Dokažte, že na kružnici se středem v $[0,0]$ a poloměrem 5^{5^5} leží aspoň 5^5 bodů s celočíselnými souřadnicemi.

8. Jsou-li X, Y dva body roviny, pak $z(XY)$ je zobrazení roviny na sebe vzniklé složením osové souměrnosti podle XY a posunutí o vektor $\boldsymbol{XY}$. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$; kdy je $z(AB)\cdot z(BC)\cdot z(CD)\cdot z(DA)$ identita?

9. V rovině jsou dány dva různé body A, B spojené lomenou čarou l. Tětivou budeme rozumět úsečku rovnoběžnou s AB, jejíž oba krajní body leží na l. Dokažte, že pokud neexistuje tětiva délky a ani tětiva délky b, tak neexistuje ani tětiva délky $a+b$.

10. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Zjistěte, ve kterých bodech X dosahuje funkce

$$f(X)=|XA|+|XB|-|XC|$$

svého minima.

11. Dokažte, že pro každé přirozené n začínají čísla 1994^n a 1994^n+2^n vždy stejným dvojčíslím.

12. Na stranách A_1A_2 a A_2A_3 pravidelného $2n$-úhelníku $A_1A_2\dots A_{2n}$ jsou dány body K, N takové, že $|\sphericalangle KA_{n+2}N|=\pi/2n$. Dokažte, že NA_{n+2} je osou úhlu KNA_3.

13. Na povrchu koule jsou dány body A, B, C, A', B', C' takové, že tětivy AA', BB', CC' se protínají v bodě P uvnitř, ale neleží v jedné rovině. Přitom kulové plochy určené body A, B, C, P a A', B', C', P se dotýkají. Dokažte, že $|AA'|=|BB'|=|CC'|$.

14. Nechť mnohočlen p s komplexními koeficienty má stupeň nejvýše 1994 a vesměs různé kořeny. Dokažte, že existují komplexní čísla $a_1,a_2,\dots,a_{1994}$ taková, že $p(z)$ dělí mnohočlen

$$\left(\dots\left((z-a_1)^2-a_2\right)^2-\dots-a_{1993}\right)^2-a_{1994}.$$