51. mezinárodní matematická olympiáda

Padesátý první ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 2. do 14. července 2010 v Kazachstánu. Olympiády se zúčastnilo 522 soutěžících z 98 zemí, méně než v předchozím roce.

České družstvo tvořili tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Miroslav Olšák* z Gymnázia Buďánka v Praze, *Petr Ryšavý* z Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze, *Jáchym Sýkora* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Kazachstán je devátou největší zemí na světě (co se týče rozlohy) a organizátoři to dali účastníkům pocítit. Vedoucí jednotlivých národních družstev zahajovali program v městě Almaty (dříve Alma-Ata, do roku 1997 hlavní město Kazachstánu). Po výběru úloh a jejich překladu do národních jazyků následoval asi tisícikilometrový letecký přesun do současného hlavního města Astany. Tam proběhlo 5. července v Paláci nezávislosti slavnostní zahájení olympiády, kterého se zúčastnil i kazašský ministr školství a vědy *Zhanseit Tuimebayev*. Zahájení bylo velkolepé, ve stylu nám dobře známých estrád. Na pódiu se vystřídalo několik folklórních souborů oblečených v bohatých kazašských krojích, místní „folklór-metalová“ kapela a zpěvák se „zlatým hlasem“. Nechyběla společná píseň všech vystoupivších na závěr. Po zahájení následoval pro vedoucí delegací půlhodinový přesun do hotelu. Pro soutěžící byl přesun osmihodinový (v autobusech), a to do dětského tábora Baldauren, ležícího v pěkném prostředí národního parku, asi 250 km od Astany. Již o půlnoci před soutěží se dostala většina řešitelů do svých pokojů, ti průbojnější pak dostali i večeři. Aby po takto náročném dni soutěžící náhodou nezaspali, zajistili organizátoři následujícího (prvního soutěžního) dne operativně budíček na půl sedmou, což se setkalo s velkým ohlasem.

V Baldaurenu se konala i vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy. O bezpečnost soutěžících bylo výborně postaráno, tábor střežila policie a nikdo nesměl tam ani ven (k řešitelům nesměli ani pedagogičtí vedoucí, kteří byli ubytováni odděleně). Také podmínky měli řešitelé v podstatě stejné: všem byly odebrány vlastní rýsovací potřeby a každý z účastníků dostal od organizátorů pravítko a kružítko. Pravda, některá kružítka měla místo tradiční konstrukce s jednou špicí a jednou tuhou špice dvě, což někteří řešitelé nelibě nesli. Mnohým proto byla tato novátorská kružítka vyměněna za klasická. O těchto věcech se jury dozvídala na začátku obou soutěžních dní v době vyhrazené na otázky soutěžících (na jiných mezinárodních olympiádách bývá zvykem, že soutěžící pokládají zejména otázky související s textem soutěžních úloh).

Na této olympiádě došlo rovněž k výměně v čele Poradního výboru (Advisory Board) mezinárodní matematické olympiády, což je orgán, který zajišťuje fungování mezinárodní olympiády, zvláště pak jedná s těmi zeměmi, které mají o případné uspořádání této soutěže zájem. Kromě výměny řadových členů výboru nastala změna i v osobě předsedy: dlouholetého předsedu *Józsefa Pelikana* z Maďarska nahradil ruský matematik *Nazar Agachanov.*

Dva dny před ukončením olympiády vedoucí i účastníci společně navštívili „dostihové" závodiště. Nicméně hlavním programem nebyly dostihy, ale vystoupení kazašské artistické skupiny, která na koních předváděla neuvěřitelné dovednosti. Zvláště srdce obdivovatelů krásy koní zaplesalo a zážitek z tohoto vystoupení dal zapomenout na předchozí příhody.

Slavnostní zakončení olympiády se neslo v podobném duchu jako zahájení, dostavil se však i kazašský premiér *Karim Massimov.* Na závěr byla slavnostně předána vlajka Mezinárodní matematické olympiády zástupcům hostitelské země příští olympiády. Ta proběhne v Amsterdamu v Nizozemí.

Ačkoliv české družstvo získalo v tomto roce celkem 84 bodů, což je jen o tři body méně než v roce předchozím, v celkovém pořadí zemí to stačilo jen na 48. místo (proti čtyřicátému místu na 50. MMO), což nás i tak řadí do první poloviny soutěžního pole. V individuálním hodnocení dosáhli studenti David Klaška a Miroslav Olšák shodným bodovým ziskem na bronzové medaile, Radek Marciňa, Jáchym Sýkora a Tomáš Zeman získali čestná uznání udělovaná za alespoň jednu bezchybně vyřešenou úlohu. Všichni tři vyřešili bezchybně dokonce dvě úlohy, na bronzovou medaili jim však bohužel ještě jeden bod chyběl.

V tradičně sledovaném česko-slovenském duelu jsme tentokrát našim východním bratrům podlehli (umístili se na děleném 39. místě). Zejména stojí za zmínku výkon talentovaného Martina Vodičky z Košic, který coby patnáctiletý získal zlatou medaili.

Závěrem lze říci, že organizátoři vložili do pořádání olympiády nemalé úsilí a ještě více finančních prostředků, což bylo patrno doslova na každém kroku. Buď jak buď, tato olympiáda zanechala u všech účastníků hluboké zážitky, na které budou dlouho vzpomínat.

V následujícím přehledu můžete zjistit celkové absolutní pořadí jednotlivých účastníků českého a slovenského družstva:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
175.–187.	David Klaška	7	1	0	3	7	0	18	III.
267.–313.	Radek Marciňa	7	0	0	7	0	0	14	HM
175.–187.	Miroslav Olšák	7	2	0	2	7	0	18	III.
446.–461.	Petr Ryšavý	6	0	0	0	0	0	6	
267.–313.	Jáchym Sýkora	7	0	0	7	0	0	14	HM
267.–313.	Tomáš Zeman	7	0	0	7	0	0	14	HM
	Celkem	41	3	0	26	14	0	84	

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
200.–226.	Ladislav Bačo	7	2	0	7	0	0	16	III.
314.–337.	Martin Bachratý	7	3	0	3	0	0	13	HM
227.–266.	Michal Hagara	7	0	0	7	1	0	15	III.
352.–366.	Marián Horňák	7	1	0	3	0	0	11	HM
367.–386.	Jakub Konečný	7	0	0	3	0	0	10	HM
42.–47.	Martin Vodička	7	1	0	7	6	6	27	I.
	Celkem	42	7	0	30	7	6	92	

V následující tabulce uvádíme neoficiální pořadí jednotlivých zemí.

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	197
Rusko	4	2	0	169
USA	3	3	0	168
Korea	4	2	0	156
Kazachstán	3	2	0	148
Thajsko	1	5	0	148
Japonsko	2	3	0	141
Turecko	1	3	2	139
Německo	1	3	2	138
Srbsko	1	3	2	135
Itálie	1	3	2	133
Vietnam	1	4	1	133
Kanada	2	1	2	129
Maďarsko	2	2	1	129
Austrálie	1	3	1	128
Írán	0	4	2	127
Rumunsko	2	1	2	127
Peru	1	3	1	124
Tchaj-wan	1	3	1	123
Hongkong	1	2	3	121
Bulharsko	1	2	3	118
Singapur	0	4	1	117
Ukrajina	1	2	3	117
Polsko	2	1	1	116
Velká Británie	1	1	2	114
Uzbekistán	0	4	1	112
Belgie	0	2	3	110
Ázerbájdžán	0	3	2	109
Nový Zéland	0	2	4	106
Francie	0	3	1	105
Indonésie	0	1	4	105
Chorvatsko	0	2	3	103
Mexiko	0	1	4	102
Gruzie	0	2	2	101
Brazílie	0	2	1	99
Indie	0	2	1	98
Řecko	0	2	0	95
Nizozemsko	0	0	5	94
Argentina	0	1	2	92
Litva	0	1	3	92
Moldavsko	0	1	3	92
Slovensko	1	0	2	92
Švýcarsko	0	0	3	92
Turkmenistán	0	1	2	91
Dánsko	1	0	2	90
Španělsko	0	1	2	89
Rakousko	1	0	1	87
Česká republika	0	0	2	84

	I	II	III	body
Bělorusko	0	0	2	80
Mongolsko	0	0	2	79
Slovinsko	0	0	2	78
Srí Lanka	0	0	1	78
Izrael (5)	0	1	1	76
Malajsie	0	1	1	75
Portugalsko	0	0	1	75
Tádžikistán	0	1	0	73
Lotyšsko	0	0	2	72
JAR	0	0	2	69
Makedonie	0	1	0	69
Bolívie	0	0	0	64
Arménie	0	0	1	63
Kypr	0	0	1	62
Estonsko	0	0	0	61
Kyrgyzstán	0	1	1	61
Kolumbie (4)	0	0	3	60
Kambodža	0	0	0	58
Maroko	0	0	1	55
Saudská Arábie	0	0	2	55
Bangladéš (5)	0	0	1	54
Pobřeží slonoviny (5)	0	1	0	54
Island	0	0	0	53
Finsko	0	0	1	52
Švédsko	0	0	0	52
Filipíny (3)	0	1	0	45
Norsko	0	0	0	41
Ekvádor	0	0	1	39
Trinidad a Tobago (5)	0	1	0	37
Portoriko (2)	1	0	0	34
Kostarika (3)	0	0	1	32
Panama (2)	0	0	2	32
Lucembursko (3)	0	0	0	31
Tunisko (2)	0	1	0	31
Sýrie	0	0	0	29
Nigérie (5)	0	0	1	27
Kuba (1)	0	1	0	26
Paraguay (4)	0	0	0	26
Salvádor (3)	0	0	0	25
Honduras (1)	0	1	0	21
Pákistán (5)	0	0	0	19
Irsko	0	0	0	18
Venezuela (2)	0	0	0	16
Guatemala (2)	0	0	0	12
Albánie (4)	0	0	0	11
Bosna a Hercegovina (4)	0	0	0	8
Černá Hora (4)	0	0	0	7
Kuvajt (5)	0	0	0	2

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\bigl(\lfloor x\rfloor y\bigr) = f(x)\bigl\lfloor f(y)\bigr\rfloor$$

pro libovolná reálná x, y. (Symbol $\lfloor z\rfloor$ značí největší celé číslo nepřevyšující z.) (*Francie*)

2. Nechť I je střed kružnice vepsané a k kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Nechť přímka AI protíná kružnici k v bodě D ($D \neq A$). Dále nechť na oblouku BDC je dán bod E a na straně BC bod F tak, že platí

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|.$$

Konečně nechť G je středem úsečky IF. Dokažte, že průsečík přímek DG a EI leží na kružnici k. (*Hongkong*)

3. Nechť $\mathbb{N}$ je množina všech celých kladných čísel. Určete všechny funkce $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná celá kladná m, n je číslo

$$\bigl(g(m)+n\bigr)\bigl(m+g(n)\bigr)$$

druhou mocninou celého kladného čísla. (*USA*)

4. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Přímky AP, BP a CP protínají kružnici k opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K, L a M (různých od A, B, C). Tečna ke kružnici k v bodě C protíná přímku AB v bodě S. Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML. (*Polsko*)

5. V každé ze šesti schránek B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 a B_6 je na počátku jedna mince. Se schránkami můžeme provádět následující dvě operace:

1) Vybrat neprázdnou schránku B_j, kde $1 \leqq j \leqq 5$, odebrat z ní jednu minci a přidat dvě mince do schránky B_{j+1}.
2) Vybrat neprázdnou schránku B_k, kde $1 \leqq k \leqq 4$, odebrat z ní jednu minci a navzájem vyměnit obsahy (případně prázdných) schránek B_{k+1} a B_{k+2}.

Rozhodněte, zda je možné pomocí konečného počtu těchto operací dosáhnout toho, aby schránky B_1, B_2, B_3, B_4 a B_5 byly prázdné a schránka B_6 obsahovala právě $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Připomínáme, že $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.) (*Nizozemsko*)

6. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ kladných reálných čísel. Nechť s je kladné celé číslo takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \colon 1 \leqq k \leqq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá N a l ($l \leqq s$) taková, že $a_n = a_l + a_{n-l}$ pro všechna $n \geqq N$. *(Írán)*

Řešení soutěžních úloh

1. Dosazením $x = 0$ do dané rovnosti po úpravě dostaneme

$$f(0) \cdot (1 - \lfloor f(y) \rfloor) = 0. \tag{1}$$

Rozebereme dva případy.

Jestliže $f(0) \neq 0$, pak z (1) plyne $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Danou rovnost tak můžeme přepsat do tvaru

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}$$

a po dosazení $y = 0$ získáme $f(x) = f(0)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy konstantní a vzhledem k rovnosti $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ to musí být konstanta z intervalu $\langle 1, 2)$. Snadno ověříme, že všechny funkce $f(x) = c$ pro $1 \leqq$ $\leqq c < 2$ vyhovují.

Předpokládejme dále, že $f(0) = 0$. Dosazením $x = a$, $y = a$, přičemž $0 < a < 1$, dostaneme

$$0 = f(0) = f(\lfloor a \rfloor a) = f(a) \lfloor f(a) \rfloor.$$

Jestliže $f(a) \neq 0$, je $\lfloor f(a) \rfloor = 0$, a po dosazení $x = 1$, $y = a$ do dané rovnosti vyjde $f(a) = f(1) \lfloor f(a) \rfloor = 0$, což je spor. Je tudíž $f(a) = 0$ pro všechna $0 \leqq a < 1$.

Nechť z je libovolné reálné číslo. Zřejmě existuje celé číslo m takové, že $0 \leqq z/m < 1$.[1] Dosazením $x = m$, $y = z/m$ do původní rovnosti s využitím předchozího poznatku pro každé $z \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$f(z) = f\left(m \cdot \frac{z}{m}\right) = f\left(\lfloor m \rfloor \cdot \frac{z}{m}\right) = f(m) \cdot \left\lfloor f\left(\frac{z}{m}\right) \right\rfloor = 0.$$

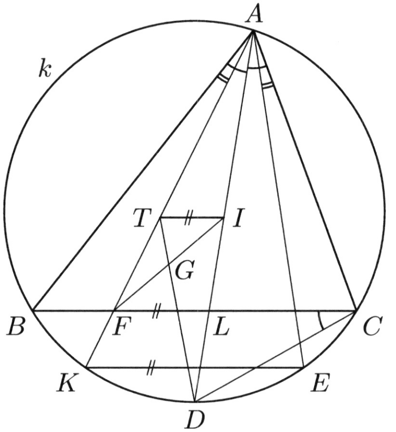
Je tedy $f(x) = 0$ a snadno se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje.

Závěr. Vyhovují jen konstantní funkce $f(x) = c$, přičemž $c = 0$ nebo $c \in \langle 1, 2)$.

---

[1] Stačí m zvolit se stejným znaménkem jako z a v absolutní hodnotě větší než z.

2. Průsečík přímky AF s kružnicí k (různý od A) označme K, průsečík přímek AI a BC označme L. Podle zadání $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAE|$, proto mají tětivy BK, CE kružnice k stejnou délku a platí $BC \parallel KE$ (obr. 52).



Obr. 52

Označme T průsečík přímek DG a AF. Podle Menelaovy věty pro trojúhelník AFI a přímku DG máme

$$\frac{|AT|}{|TF|} \cdot \frac{|FG|}{|GI|} \cdot \frac{|ID|}{|DA|} = 1,$$

odkud vzhledem k rovnosti $|FG| = |GI|$ po úpravě plyne

$$\frac{|AT|}{|TF|} = \frac{|DA|}{|ID|}. \tag{1}$$

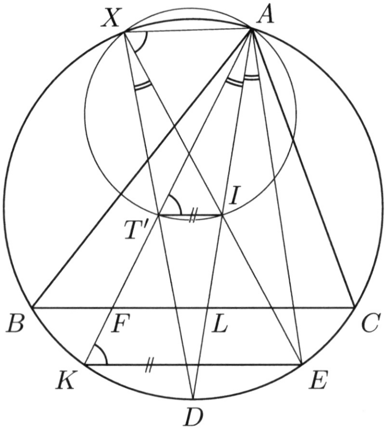
Protože CI je osou úhlu trojúhelníku ALC, dělí jeho stranu AL v poměru $|AI| : |IL| = |CA| : |LC|$. Trojúhelníky ADC a CDL jsou podobné, neboť se shodují ve společném úhlu při vrcholu D a z rovnosti obvodových úhlů plyne $|\sphericalangle DCL| = |\sphericalangle DAB| = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DAC|$. Je tedy $|CA| : |LC| = |DA| : |DC|$. Je známo, že $|DC| = |ID|$.[2] Podle (1) tak máme

$$\frac{|AI|}{|IL|} = \frac{|CA|}{|LC|} = \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DA|}{|ID|} = \frac{|AT|}{|TF|},$$

[2] To plyne např. z toho, že trojúhelník CID má při vrcholu C i při vrcholu I vnitřní úhel velikosti $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$, takže je rovnoramenný.

což znamená, že $TI \parallel FL$. Odtud vzhledem k rovnoběžnosti $BC \parallel KE$ plyne $TI \parallel KE$.

Průsečík přímky EI s kružnicí k (různý od E) označme X a průsečík přímek DX a AF označme T' (obr. 53). Protože AD je osou úhlu BAC a úhly BAF, CAE mají podle zadání stejnou velikost, je



Obr. 53

také $|\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle DAE|$. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou DE máme $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DXE|$, proto

$$|\sphericalangle T'AI| = |\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DXE| = |\sphericalangle T'XI|,$$

a tak body T', I, A, X leží na jedné kružnici. Z obvodových úhlů nad tětivami IA a EA potom plyne

$$|\sphericalangle AT'I| = |\sphericalangle AXI| = |\sphericalangle AXE| = |\sphericalangle AKE|,$$

odkud $T'I \parallel KE$.

Rovnoběžka s přímkou KE procházející bodem I však může protínat přímku AF jen v jednom bodě. Proto je $T = T'$, přímka DG je totožná s DT' a bod X leží na přímkách DG, EI i na kružnici k, čímž je úloha vyřešena.

3. Všechny funkce tvaru $g(n) = n + c$, kde c je nezáporné celé číslo, vyhovují, protože tehdy $\bigl(g(m)+n\bigr)\bigl(m+g(n)\bigr) = (m+n+c)^2$. Dokážeme, že žádná jiná funkce nevyhovuje. Použijeme při tom následující tvrzení:

Jestliže p je prvočíslo, k, l jsou přirozené čísla a $p \mid g(k) - g(l)$, pak $p \mid k - l$.

Předpokládejme nejprve, že $p^2 \mid g(k) - g(l)$. Potom $g(l) = g(k) + p^2 a$ pro nějaké celé číslo a. Vezměme dostatečně velké přirozené číslo d (takové, že $pd > \max\{g(k), g(l)\}$), které není násobkem p, a položme $n = pd - g(k)$. Čísla

$$n + g(k) = pd \quad \text{a} \quad n + g(l) = pd + (g(l) - g(k)) = p(d + pa)$$

jsou obě násobkem p, ale nejsou dělitelná p^2. Podle zadání jsou obě čísla $(g(k) + n)(g(n) + k)$ i $(g(l) + n)(g(n) + l)$ čtverce, a protože jsou to násobky p, musejí být dělitelná číslem p^2. Odtud plyne, že oba činitelé $g(n) + k$, $g(n) + l$ musejí být násobky p, tedy

$$p \mid (g(n) + k) - (g(n) + l) = k - l.$$

Zbývá případ, kdy $p \mid g(k) - g(l)$ a zároveň $p^2 \nmid g(k) - g(l)$. Vezměme stejné d a položme $n = p^3 d - g(k)$. Potom je $g(k) + n = p^3 d$ dělitelné číslem p^3 (ne však p^4) a $g(l) + n = p^3 d + (g(l) - g(k))$ je dělitelné číslem p (ne však p^2). Analogicky proto dostáváme, že čísla $g(n) + k$, $g(n) + l$ musejí být násobky p a $p \mid k - l$. Tím je naše úvodní tvrzení dokázáno.

Vraťme se k zadané úloze. Předpokládejme, že $g(k) = g(l)$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$. Podle uvedeného tvrzení je potom $k - l$ dělitelné libovolným prvočíslem, což je možné jedině v případě $k = l$. Funkce g je tudíž prostá.

Podívejme se nyní na čísla $g(k)$ a $g(k+1)$. Protože číslo $(k+1) - k = 1$ není dělitelné žádným prvočíslem, nemůže mít podle uvedeného tvrzení žádného prvočinitele ani číslo $g(k + 1) - g(k)$, takže

$$|g(k + 1) - g(k)| = 1.$$

Označme $g(2) - g(1) = q \in \{-1, 1\}$. Dokážeme matematickou indukcí, že $g(n) = g(1) + (n - 1)q$. Pro $n = 1, 2$ to triviálně platí. Podle indukčního předpokladu pak pro $n > 1$ máme

$$g(n + 1) = g(n) \pm q = g(1) + (n - 1)q \pm q = \begin{cases} g(1) + nq, \\ g(1) + (n - 2)q. \end{cases}$$

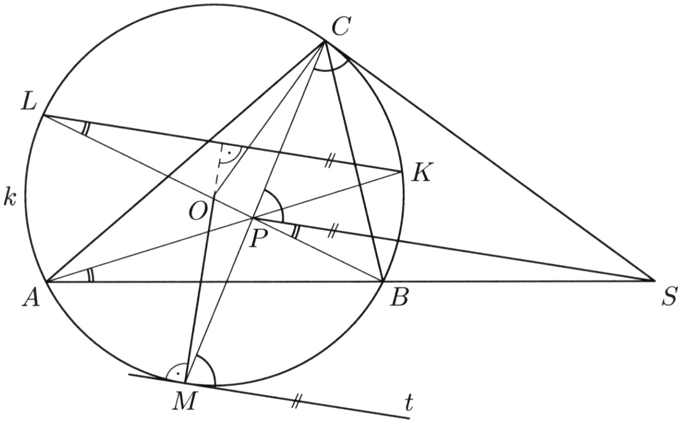
Protože $g(n + 1) \neq g(n - 1) = g(1) + (n - 2)q$, je jedinou možností $g(n + 1) = g(1) + nq$ a důkaz indukcí je hotov.

Je tedy $g(n) = g(1) + (n - 1)q$. Určitě však $q \neq -1$, jinak bychom totiž pro $n \geqq g(1) + 1$ dostali $g(n) \leqq 0$, což není možné. Je tedy $q = 1$ a $g(n) = g(1) + n - 1 = n + c$, přičemž $c = g(1) - 1 \geqq 0$.

4. Bez újmy na obecnosti nechť bod S leží na polopřímce AB. Z mocnosti bodu S ke kružnici k plyne $|SB| \cdot |SA| = |SC|^2 = |SP|^2$, odkud vychází $|SB| : |SP| = |SP| : |SA|$. Trojúhelníky SBP, SPA jsou tedy podobné (úhel při vrcholu S mají společný a odpovídající strany svírající tento úhel mají délky ve stejném poměru). Z této podobnosti a z vlastností obvodových úhlů nad tětivou BK (obr. 54) máme dohromady[3]

$$|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle SAP| = |\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle BLK|,$$

což znamená rovnoběžnost přímek LK, PS.



Obr. 54

Označme O střed kružnice k. Tečny t a CS kružnice k vedené krajními body tětivy MC zřejmě svírají s MC úhly stejných velikostí[4] (obr. 54). Stejnou velikost má však i úhel CPS, neboť trojúhelník CPS je podle zadání rovnoramenný. Ze souhlasných úhlů tak dostáváme $PS \parallel t$. Dohromady máme

$$LK \parallel PS \parallel t \perp OM.$$

Tětiva LK je tedy kolmá na poloměr OM kružnice k, z čehož už přímo plyne $|ML| = |MK|$.

[3] Rovnost $|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle SAP|$ můžeme odůvodnit i takto: Protože $|SB| \cdot |SA| = |SP|^2$, z mocnosti bodu S ke kružnici opsané trojúhelníku ABP plyne, že SP je tečnou této kružnice. Rovnost úhlů SPB a SAP je tedy rovností úsekového a obvodového úhlu, jež oba přísluší tětivě BP této kružnice.

[4] Jsou to doplňky do $90°$ k úhlům při základně rovnoramenného trojúhelníku MCO.

5. Odpověď na otázku ze zadání je „Ano“. Ukážeme, jak postupovat, abychom dosáhli ve schránkách požadovaného počtu mincí. Pro jednoduchost budeme každou konkrétní situaci, tj. kolik se právě nalézá mincí v jednotlivých schránkách, označovat šesticí čísel (každé z čísel bude odpovídat počtu mincí v příslušné schránce).

Na začátku tedy máme šestici $(1,1,1,1,1,1)$ (v každé schránce je jedna mince). Posloupností dovolených operací chceme dosáhnout šestice $\left(0,0,0,0,0,2010^{2010^{2010}}\right)$. Nejdříve připomeňme, co přesně s mincemi dovolené operace činí. První operací vybereme ze schránky jednu minci, tu „rozdvojíme“ a obě vzniklé mince dáme do schránky vpravo. Při druhé operaci vybereme ze schránky jednu minci, tu „zahodíme“ a vyměníme obsah dvou schránek nalézajících se bezprostředně vpravo od schránky, z níž jsme minci vybrali.

Postupovat můžeme například následovně. Nejdříve použijeme první operaci na 5. schránku (v 5. schránce tedy jedna mince ubyde a do 6. dvě přibydou):

$$(1,1,1,1,1,1) \to (1,1,1,1,0,3).$$

Nyní použijeme druhou operaci na 4. schránku, odebereme tedy minci ze 4. schránky a vyměníme mince mezi 5. a 6. schránkou:

$$(1,1,1,1,0,3) \to (1,1,1,0,3,0).$$

Totéž postupně zopakujeme pro 3., 2. a 1. schránku (ubereme minci a vyměníme obsah schránek napravo):

$$(1,1,1,0,3,0) \to (1,1,0,3,0,0) \to (1,0,3,0,0,0) \to (0,3,0,0,0,0).$$

Tak se nám podařilo vyprázdnit všechny schránky až na jednu, kde zůstaly tři mince. Protože chceme do jediné schránky dostat „obrovský“ počet mincí, ukážeme nyní, jak dosáhnout většího počtu mincí v jediné neprázdné schránce (necháváme na čtenáři, aby ověřil, že jde o dovolené operace):

$$\begin{gathered}(0,3,0,0,0,0) \to (0,2,2,0,0,0) \to (0,2,1,2,0,0) \to (0,2,0,4,0,0) \to \\ \to (0,1,4,0,0,0) \to (0,1,3,2,0,0) \to (0,1,3,1,2,0) \to (0,1,3,0,4,0) \to \\ \to (0,1,2,4,0,0) \to (0,1,2,3,2,0) \to (0,1,2,2,4,0) \to (0,1,2,1,6,0) \to \\ \to (0,1,2,0,8,0) \to (0,1,1,8,0,0) \to (0,1,1,7,2,0) \to (0,1,1,6,4,0) \to \\ \to (0,1,1,5,6,0) \to (0,1,1,4,8,0) \to (0,1,1,3,10,0) \to \\ \to (0,1,1,2,12,0) \to (0,1,1,1,14,0) \to (0,1,1,0,16,0) \to \\ \to (0,1,0,16,0,0) \to (0,0,16,0,0,0).\end{gathered}$$

Podařilo se nám tedy trojku zvětšit na číslo 16. Všimněme si přitom posloupnosti šestic od 5. po 23. Ze šestice $(0,1,4,0,0,0)$ jsme dostali šestici $(0,1,0,16,0,0)$ a přitom jsme vůbec nezasahovali do první, druhé ani šesté schránky (počty mincí se v nich neměnily). Dostali jsme tak vlastně z trojice $(4,0,0)$ trojici $(0,16,0)=(0,2^4,0)$. Něco takového lze udělat obecně: Jestliže a je kladné celé číslo, dovedeme z trojice $(a,0,0)$ (tedy ze tří po sobě jdoucích schránek bez zasahování do ostatních) vytvořit trojici $(0,2^a,0)$, a to následujícími kroky (posloupnost operací, kdy jen všechny mince z jedné schránky pomocí první operace „rozdvojujeme“ do sousední schránky vpravo, zapíšeme jako jeden krok, který znázorníme znakem „$\Rightarrow$“):

$$
\begin{gathered}
(a,0,0) \rightarrow (a-1,2,0) \Rightarrow (a-1,0,4) \rightarrow (a-2,4,0) \Rightarrow \\
\Rightarrow (a-2,0,8) \rightarrow (a-3,8,0) \Rightarrow (a-3,0,16) \rightarrow (a-4,16,0) \Rightarrow \\
\Rightarrow (a-4,0,32) \rightarrow (a-5,32,0) \Rightarrow \ \ldots \ \rightarrow (a-(a-1),2^{a-1},0) \Rightarrow \\
\Rightarrow (a-(a-1),0,2^a) \rightarrow (a-a,2^a,0) = (0,2^a,0).
\end{gathered}
$$

Vraťme se k šestici $(0,0,16,0,0,0)$, jíž jsme dostali v předchozím odstavci. Budeme pokračovat dál, přičemž posloupnost kroků, kdy z nějaké trojice $(a,0,0)$ vyrobíme trojici $(0,2^a,0)$, budeme zkráceně označovat „$\rightsquigarrow$“:

$$
\begin{gathered}
(0,0,16,0,0,0) \rightarrow (0,0,15,2,0,0) \rightsquigarrow (0,0,15,0,2^2,0) \rightarrow \\
\rightarrow (0,0,14,2^2,0,0) \rightsquigarrow (0,0,14,0,2^{2^2},0) \rightarrow (0,0,13,2^{2^2},0,0) \rightsquigarrow \\
\rightsquigarrow (0,0,13,0,2^{2^{2^2}},0) \rightarrow (0,0,12,2^{2^{2^2}},0,0) \rightsquigarrow \ \ldots \ \rightarrow \\
\rightarrow (0,0,0,2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}}}}}}}}},0,0).
\end{gathered}
$$

Ve čtvrté schránce už máme obrovské číslo, které pro zjednodušení dalšího zápisu označíme P_{16}. Toto číslo je už větší než číslo $2010^{2010^{2010}}$ ze zadání. Je totiž

$$
P_1 = 2, \ \ P_2 = 2^2 = 4, \ \ P_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16, \ \ P_4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65\,536
$$

a už následující číslo $P_5 = 2^{65\,536}$ má 19 729 číslic. Mnoho číslic však má i číslo $2\,010^{2010^{2010}}$, které pro zjednodušení označíme A. Dokázat, že P_{16} je větší než A, musíme proto jinak. Formální důkaz může vypadat následovně:

$$A = 2\,010^{2010^{2010}} < 2\,048^{2010^{2010}} = (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11\cdot 2010^{2010}} <$$
$$< 2^{2010\cdot 2010^{2010}} = 2^{2010^{2011}} < 2^{2048^{2011}} = 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11\cdot 2011}} =$$
$$= 2^{2^{22\,121}} < 2^{2^{32\,768}} = 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{16}}} = 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} = P_6 < P_{16}.$$

Všechny uvedené nerovnosti jsou zřejmé. Zbývá už jen dokončit přeměnu šestice $(0,0,0,P_{16},0,0)$ na šestici $(0,0,0,0,0,A)$. K tomu stačí mnohokrát použít na čtvrtou schránku druhou operaci, přičemž budeme stále „měnit“ obsahy prázdné páté a šesté schránky, takže se kromě snižování počtu mincí ve čtvrté schránce nebude nic dít. Budeme to dělat až do okamžiku, kdy dostaneme šestici $(0,0,0,A/4,0,0)$ (zřejmě číslo A je dělitelné čtyřmi a $A/4 < A < P_{16}$, takže takovouto šestici lze opravdu dostat). Nakonec už jen opakovaně použijeme první operaci nejdříve na čtvrtou a poté na pátou schránku, až dostaneme

$$(0,0,0,A/4,0,0) \Rightarrow (0,0,0,0,A/2,0) \Rightarrow (0,0,0,0,0,A).$$

Tím je úloha vyřešena.

6. (Podle *Martina Vodičky* z Košic.) Podle zadání pro libovolné $n > s$ platí $a_n = a_i + a_j$, přičemž $i \leqq j = n - i$. Ukážeme nejprve, že lze najít dokonce takový rozklad, v němž $i \leqq s$. Kdyby totiž bylo $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$, kde $i_1 > s$, bylo by podle zadání $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{j_2}$, přičemž $i_2 + j_2 = i_1$, tedy $i_2 < i_1$, a navíc zřejmě $a_{j_2+j_1} \geqq a_{j_2} + a_{j_1}$, protože $j_2 + j_1 > i_1 > s$. To znamená, že

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_2} + a_{j_2} + a_{j_1} \leqq a_{i_2} + a_{j_2+j_1},$$

ale protože $n = i_2 + (j_2 + j_1)$, platí $a_n \geqq a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$, tedy nutně $a_n = a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$. Kdyby pořád ještě bylo $i_2 > s$, mohli bychom celou úvahu zopakovat a najít $i_3 < i_2$ takové, že $a_n = a_{i_3} + a_{j_3+j_2+j_1}$ atd. Protože proces „zmenšování“ nemůže probíhat donekonečna, najdeme tak index $i = i_r \leqq s$ takový, že $a_n = a_{i_r} + a_{j_r+\ldots+j_1}$.

Je jasné, že pokud $j > s$, $i_1, \ldots, i_r \leqq s$, $n = j + i_1 + \ldots + i_r$, pak

$$a_n \geqq a_j + a_{i_1} + \ldots + a_{i_r}, \tag{1}$$

neboť

$$a_j + a_{i_1} \leqq a_{j+i_1},$$
$$a_{j+i_1} + a_{i_2} \leqq a_{j+i_1+i_2},$$
$$\vdots$$
$$a_{j+i_1+\ldots+i_{r-1}} + a_{i_r} \leqq a_{j+i_1+\ldots+i_r} = a_n.$$

Vezměme nyní takový index $i \in \{1, \ldots, s\}$, pro nějž je hodnota a_i/i maximální (jestliže je takových více, vezmeme libovolný z nich), a označme ho l. Ukážeme, že toto l má spolu s vhodným N vlastnost požadovanou zadáním úlohy.

Zapišme číslo a_n (pro libovolné $n > s$) s opakovaným využitím úvodního tvrzení ve tvaru

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{j_2} = \ldots = a_{i_1} + \ldots + a_{i_r} + a_{j_r}, \qquad (2)$$

přičemž $i_1, \ldots, i_r \leqq s$, $j_r > s$ a a_{j_r} už se dá rozložit na součet dvou členů posloupnosti s oběma indexy nejvýše rovnými s. (S rozkladem na součet tedy skončíme právě o jeden krok dřív, než dostaneme všechny indexy nejvýše rovné s. Připouštíme i možnost $r = 0$ neboli $j_r = n$, což by znamenalo, že už první rozklad $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$ splňoval $i_1 \leqq j_1 \leqq s$.)

Jestliže se v součtu (2) mezi hodnotami $\{i_1, \ldots, i_r\}$ nalézá některý index i aspoň l-krát, nahradíme l jeho výskytů i výskyty indexu l. Dostaneme tak množinu indexů $\{i'_1, \ldots, i'_{r'}\}$, přičemž zřejmě $i'_1 + \ldots + i'_{r'} = i_1 + \ldots + i_r$. Protože $a_l/l \geqq a_i/i$, máme $i \cdot a_l \geqq l \cdot a_i$, takže

$$a_n = a_{i_1} + \ldots + a_{i_r} + a_{j_r} \leqq a_{i'_1} + \ldots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}.$$

Podle (1) však platí i opačná nerovnost, proto

$$a_n = a_{i'_1} + \ldots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

přičemž aspoň jeden z indexů $i'_1, \ldots, i'_{r'}$ je roven l.

Samozřejmě pro dostatečně velké n se v součtu (2) nějaký index musí nacházet aspoň l-krát; stačí vzít například $n > s^2(l-1) + 2s = N$.[5] Pro každé $n > N$ proto umíme a_n zapsat ve tvaru (po přeuspořádání indexů)

$$a_n = a_l + a_{i'_2} + \ldots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}. \qquad (3)$$

Podle (1) (jestliže n nahradíme hodnotou $n - l$) však máme

$$a_{n-l} \geqq a_{i'_2} + \ldots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

odkud podle (3) plyne $a_n \leqq a_l + a_{n-l}$. Ze zadání triviálně platí $a_n \geqq a_l + a_{n-l}$, takže musí být $a_n = a_l + a_{n-l}$.

---

[5] Různých indexů je jen s, zároveň $j_r \leqq 2s$, a kdyby i bylo všech po $l - 1$, měli bychom $n = i_1 + \ldots + i_r + j_r \leqq (1 + 2 + \ldots + s)(l-1) + 2s \leqq s^2(l-1) + 2s < n$, což je spor.