59. ročník matematické olympiády na středních školách

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 143–151.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405201

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již čtvrté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 51. MMO v Kazachstánu.

Soutěž se uskutečnila ve dnech 21.–22. 6. 2010 v severomoravském Bílovci. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 20. 6. 2010. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.–2.	Damian Orlef	POL	7 7 7 7 7 0	35
	Martin Vodička	SVK	7 7 7 7 7 0	35
3.	Piotr Suwara	POL	7 6 7 7 0 2	29
4.	Szymon Kanonowicz	POL	6 7 7 7 0 0	27
5.	Jakub Konečný	SVK	7 1 7 7 0 0	22
6.–9.	Martin Bachratý	SVK	7 0 7 7 0 0	21
	Filip Borowiec	POL	7 7 7 0 0 0	21
	Jáchym Sýkora	CZE	7 7 0 0 0 7	21
	Michał Zając	POL	7 7 0 7 0 0	21
10.–11.	Ladislav Bačo	SVK	7 5 7 1 0 0	20
	Miroslav Olšák	CZE	6 0 7 7 0 0	20
12.	Michal Hagara	SVK	7 0 7 0 0 0	14
13.	Marián Horňák	SVK	6 0 0 7 0 0	13
14.	Michał Miśkiewicz	POL	7 0 0 0 0 5	12
15.	*Radek Marciňa*	CZE	7 0 0 1 0 0	8
16.–17.	*Petr Ryšavý*	CZE	7 0 0 0 0 0	7
	Jakub Solovský	CZE	7 0 0 0 0 0	7
18.	*Petr Boroš*	CZE	0 0 0 0 0 0	0

Na výsledku českého družstva se bohužel projevila neúčast dvou reprezentantů, vítěze celostátního kola Davida Klašky a dále Tomáše Zemana.

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili členové úlohové komise z České republiky — dr. *Jaroslav Švrček* a doc. *Jaromír Šimša*. Úlohy koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček*, *Pavel Calábek* a *Martin Panák* za Českou republiku, *Peter Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Jerzy Bednarczuk*, *Andrzej Grzesik* a *Michał Pilipczuk* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} - c &= a, \\ b\sqrt{c} - a &= b, \\ c\sqrt{a} - b &= c. \end{aligned}$$

(*Michal Takács*)

2. V kruhu o poloměru 1 uvažujme libovolných 60 bodů. Dokažte, že na hranici kruhu existuje takový bod, že součet jeho vzdáleností od všech 60 uvažovaných bodů není větší než 80. (*Jaromír Šimša*)

3. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že na šachovnici o rozměrech $p^2 \times p^2$ je možno zvolit p^3 polí tak, že středy žádných čtyř z nich nejsou vrcholy pravoúhelníku se stranami rovnoběžnými s okraji šachovnice.

(*Bartłomiej Bzdęga*)

4. Určete největší celé číslo k, pro něž platí následující tvrzení: Je dáno 2 010 libovolných nedegenerovaných trojúhelníků. Strany každého trojúhelníku jsou obarveny tak, že jedna je modrá, jedna je červená a jedna je bílá. Pro každou barvu zvlášť uspořádáme délky stran. Dostaneme tak posloupnosti

$$\begin{aligned} b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_{2010} &\quad \text{pro délky modrých stran,} \\ r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_{2010} &\quad \text{pro délky červených stran,} \end{aligned}$$

a

$$w_1 \leqq w_2 \leqq \ldots \leqq w_{2010} \quad \text{pro délky bílých stran.}$$

Pak existuje k indexů j takových, že lze zkonstruovat nedegenerovaný trojúhelník se stranami délek b_j, r_j, w_j. Dokažte. (*Michal Rolínek*)

5. Nechť x, y, z jsou libovolná kladná reálná čísla, pro něž platí $x + y + z \geqq 6$. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}.$$

(*Ján Mazák*)

6. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, pro který platí

$$|AB| + |CD| = \sqrt{2} \cdot |AC| \quad \text{a} \quad |BC| + |DA| = \sqrt{2} \cdot |BD|.$$

Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník. (*Jaromír Šimša*)

Řešení úloh

1. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = \max\{a, b, c\}$. Z první rovnice soustavy dostaneme

$$c\bigl(\sqrt{b} - 1\bigr) \leqq a\bigl(\sqrt{b} - 1\bigr) = c, \quad \text{tedy} \quad b \leqq 4.$$

Podobně máme z druhé rovnice soustavy

$$b\bigl(\sqrt{c} - 1\bigr) = a \geqq b, \quad \text{tedy} \quad c \geqq 4.$$

Použitím těchto nerovností dohromady s třetí rovnicí dostaneme

$$4 \leqq c \leqq c\bigl(\sqrt{c} - 1\bigr) \leqq c\bigl(\sqrt{a} - 1\bigr) = b \leqq 4,$$

odkud plyne $a = b = c = 4$.

Odpověď. Jediným řešením soustavy je trojice $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

2. Do hraniční kružnice vepišme rovnostranný trojúhelník PQR. Jestliže dokážeme, že libovolný bod X nalézající se v kruhu splňuje nerovnost

$$|PX| + |QX| + |RX| \leqq 4, \tag{1}$$

dostaneme sečtením nerovností (1) pro $X = X_k$, $1 \leqq k \leqq 60$,

$$\sum_{k=1}^{60} |PX_k| + \sum_{k=1}^{60} |QX_k| + \sum_{k=1}^{60} |RX_k| \leqq 4 \cdot 60 = 240.$$

Z toho plyne, že aspoň jedna suma na levé straně je menší nebo rovna $240 : 3 = 80$, tedy aspoň jeden z bodů P, Q, R má požadovanou vlastnost.

S ohledem na symetrii stačí (1) dokázat pro případ, kdy X leží ve výseči PSQ, kde S označuje střed kruhu. Ukážeme, že v takovém případě platí

$$|PX| + |QX| \leqq 2, \tag{2}$$

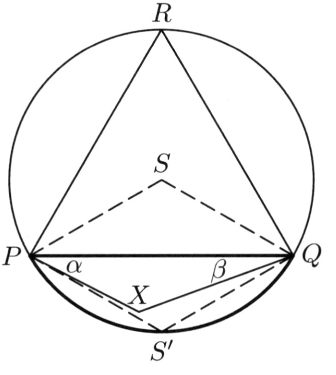
což dohromady s triviální nerovností $|RX| \leqq 2$ dává (1).

Označme S' střed kratšího oblouku PQ (obr. 49). Čtyřúhelník $PS'QS$ je zřejmě kosočtverec, stačí tedy nerovnost (2) dokázat pro body X v úseči $PS'Q$ (ohraničené úsečkou PQ a obloukem $PS'Q$).

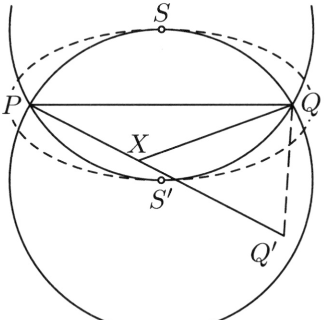
Jestliže $\alpha = |\sphericalangle XPQ|$, $\beta = |\sphericalangle XQP|$, pak $\alpha + \beta \leqq 60°$ a ze sinové věty v trojúhelníku PQX máme

$$|PX| + |QX| = \frac{|PQ|(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \leqq \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, \qquad \text{neboť} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} \leqq 30°.$$

Tím jsme dokázali (2).[1]



Obr. 49



Obr. 50

Poznámka. Ve druhé části řešení lze postupovat i takto: Pro libovolný bod X v uvedené úseči uvažujme takový bod Q' na polopřímce PX mimo úsečku PX, že $|XQ'| = |XQ|$. Protože úhel QXQ' má nejvýše $60°$, máme

[1] Pro úplnost je potřeba dodat, že pokud bod X leží na úsečce PQ, tj. trojúhelník PQX neexistuje, a nelze tedy použít sinovou větu, je $|PX| + |QX| = \sqrt{3} < 2$.

$|\sphericalangle XQQ'| = |\sphericalangle XQ'Q| \geqq 60°$, takže Q' leží v kruhu, který je obrazem daného kruhu v osové souměrnosti podle PQ (obr. 50). Proto

$$|PX| + |XQ| = |PX| + |XQ'| = |PQ'| \leqq 2.$$

Další možností je využít skutečnost, že výseč PSQ leží v oblasti ohraničené elipsou s ohnisky P a Q, která je množinou všech bodů X splňujících $|PX| + |XQ| \leqq |PS'| + |QS'| = |PS| + |QS| = 2$.

3. Označme p^2 řádků šachovnice dvojicemi (a, b), kde $a, b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Každý řádek tak bude označen jinou dvojicí.[2] Podobně označme takovými dvojicemi i všech p^2 sloupců.

Políčko ležící v řádku (a, b) a v sloupci (c, d) budeme nazývat *pěkné*, právě když

$$ac \equiv b + d \pmod{p}. \tag{1}$$

Ke každé dvojici (a, b) existuje zřejmě právě p dvojic (c, d) splňujících (1).[3] V každém řádku je tudíž p pěkných políček a na celé šachovnici jich je p^3.

Stačí dokázat, že žádná čtyři pěkná políčka nemají vlastnost popsanou v zadání. Předpokládejme sporem, že čtyři políčka ležící na průniku řádků $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ se sloupci $(c_1, d_1) \neq (c_2, d_2)$ jsou všechna pěkná. Potom

$$a_i c_j \equiv b_i + d_j \pmod{p} \qquad \text{pro libovolná } i, j \in \{1, 2\}. \tag{2}$$

Odečtením dvou kongruencí (2) s daným i (v jedné položíme $j = 2$, ve druhé $j = 1$) získáme

$$a_i(c_2 - c_1) \equiv d_2 - d_1 \pmod{p} \qquad \text{pro } i \in \{1, 2\} \tag{3}$$

a po odečtení obou kongruencí (3) vyjde

$$(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Proto $a_1 = a_2$ nebo $c_1 = c_2$. Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $c_1 = c_2$. Potom z (3) plyne $d_1 = d_2$, a tedy $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$, což je spor.

[2] Například můžeme označit prvních p řádků dvojicemi tvaru $(0, 0)$, $(0, 1)$, …, $(0, p-1)$, dalších p řádků $(1, 0)$, $(1, 1)$, …, $(1, p-1)$, atd., až posledních p řádků dvojicemi $(p-1, 0)$, $(p-1, 1)$, …, $(p-1, p-1)$. Ve skutečnosti však v našem řešení vůbec nezáleží na pořadí, v němž řádky označíme.

[3] Ke každému c existuje právě jedno d splňující (1) a c můžeme zvolit p způsoby.

Poznámka. Řádky (a, b) odpovídají bodům afinní roviny F^2, kde F je pole o p prvcích, sloupce (c, d) přímkám této roviny o rovnicích $cx - y - d = 0$ (jde o všechny přímky, jež nejsou rovnoběžné s osou y). Pole je pěkné, právě když bod odpovídající jeho řádku leží na přímce odpovídající jeho sloupci. Dvěma různými body nemohou procházet dvě různé přímky.

4. Dokážeme, že hledaná největší hodnota je $k = 1$.

Nejdříve ukážeme, že $b_{2010}, r_{2010}, w_{2010}$ jsou vždy stranami trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti nechť $w_{2010} \geqq r_{2010} \geqq b_{2010}$. Stačí dokázat, že $b_{2010} + r_{2010} > w_{2010}$. Podle zadání existuje trojúhelník se stranami délek w, b, r, které mají postupně bílou, modrou a červenou barvu, přičemž $w_{2010} = w$. Z trojúhelníkové nerovnosti máme $b + r > w$ a vzhledem k danému uspořádání platí $b_{2010} \geqq b$ a $r_{2010} \geqq r$. Odtud už přímo plyne

$$b_{2010} + r_{2010} \geqq b + r > w = w_{2010}.$$

Zbývá sestrojit posloupnost takových trojúhelníků, že w_j, b_j, r_j nejsou pro žádné $j < 2\,010$ délkami stran trojúhelníku. Pro každé $j = 1, 2, \ldots, 2\,010$ uvažme trojúhelník T_j, který má

- ▷ modrou stranu s délkou $2j$,
- ▷ červenou stranu s délkou j pro $j \leqq 2\,009$ a s délkou $4\,020$ pro $j = 2\,010$,
- ▷ bílou stranu s délkou $j + 1$ pro $j \leqq 2\,008$, s délkou $4\,020$ pro $j = 2\,009$ a s délkou 1 pro $j = 2\,010$.

Protože

$$\begin{aligned}
(j+1) + j > 2j &> (j+1) - j = 1 && \text{pro } j \leqq 2\,008,\\
2j + j > 4\,020 &> 2j - j = j && \text{pro } j = 2\,009,\\
4\,020 + 1 > 2j &> 4\,020 - 1 = 4\,019 && \text{pro } j = 2\,010,
\end{aligned}$$

strany každého trojúhelníku T_j splňují trojúhelníkové nerovnosti. Navíc $w_j = j$, $r_j = j$ a $b_j = 2j$ pro $1 \leqq j \leqq 2\,009$. Odtud

$$w_j + r_j = j + j = 2j = b_j,$$

tedy w_j, b_j a r_j nejsou stranami trojúhelníku pro žádné $1 \leqq j \leqq 2\,009$.

5. Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice kladných čísel $x^2/14$, $x/(y^2 + z + 1)$ a $2(y^2 + z + 1)/49$ máme

$$\frac{1}{14}x^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{2}{49}(y^2 + z + 1) \geqq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{7^3}} = \frac{3}{7}x.$$

Cyklickou záměnou $x \to y \to z \to x$ odvodíme dvě podobné nerovnosti a sečtením všech tří nerovností po úpravě dostaneme

$$L = \frac{11}{98}(x^2+y^2+z^2) + \frac{x}{y^2+z+1} + \frac{y}{z^2+x+1} + \frac{z}{x^2+y+1} + \frac{6}{49} \geqq$$
$$\geqq \frac{19}{49}(x+y+z).$$

Z Cauchyovy nerovnosti (anebo z jednoduché úpravy na součet tří čtverců) plyne

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geqq 12.$$

Dohromady tak dostáváme

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 + \frac{x}{y^2+z+1} + \frac{y}{z^2+x+1} + \frac{z}{x^2+y+1} &= \\ = \frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2) + L - \frac{6}{49} &\geqq \\ \geqq \frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2) + \frac{19}{49}(x+y+z) - \frac{6}{49} &\geqq \\ \geqq \frac{87}{98}\cdot 12 + \frac{19}{49}\cdot 6 - \frac{6}{49} = \frac{90}{7}. \end{aligned}$$

Závěr. Nejmenší možná hodnota daného výrazu je $\frac{90}{7}$ a získáme ji pro $x = y = z = 2$.

6. Dané tvrzení triviálně plyne z následujícího poznatku:
Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$(|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 \geqq 2|AC|^2 + 2|BD|^2$$

s rovností, právě když je $ABCD$ rovnoběžník.

Označme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{DA}$. Jestliže umocníme na druhou trojúhelníkové nerovnosti

$$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{c}| \geqq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|, \qquad |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{d}| \geqq |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}|, \tag{1}$$

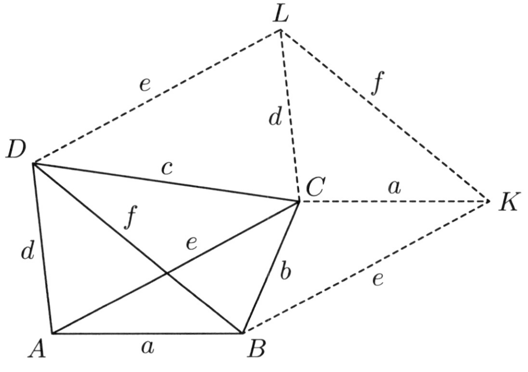
sečteme je a přepíšeme výrazy pomocí skalárního součinu, dostaneme

$$\begin{aligned} &(|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 \geqq \\ &\quad \geqq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|^2 + |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + |\boldsymbol{d}|^2 - 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} - 2\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} = \\ &\quad = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}|^2 - 2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \\ &\quad = 2|AC|^2 - 2\,\boldsymbol{DB}\cdot\boldsymbol{BD} = 2|AC|^2 + 2|BD|^2. \end{aligned}$$

Tím je uvedená nerovnost dokázána. Pokud v ní platí rovnost, musejí rovnosti nastat i v (1), což je možné jedině v případě, kdy $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{d}$. Obě dvojice protilehlých stran čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tedy rovnoběžné, což je možné jedině pro rovnoběžník.

Naopak, jestliže $ABCD$ je rovnoběžník, je $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$ a dokazovaná nerovnost se změní ve známou *rovnoběžníkovou rovnost* (k jejímu důkazu stačí v našem řešení nahradit nerovnosti v (1) rovnostmi).

Jiné řešení. Odlišným způsobem dokážeme úvodní tvrzení předchozího řešení. Strany čtyřúhelníku $ABCD$ označme obvyklým způsobem. Dále nechť $|AC| = e$, $|BD| = f$. Trojúhelníky ABC, ADC doplňme na rovnoběžníky $ABKC$, $ADLC$ (obr. 51).



Obr. 51

Úsečka AC je shodná a rovnoběžná s úsečkami BK a DL, takže $BKLD$ je rovnoběžník a podle rovnoběžníkové rovnosti máme

$$2e^2 + 2f^2 = 2|BK|^2 + 2|BD|^2 = |BL|^2 + |DK|^2.$$

Odtud už s využitím trojúhelníkových nerovností $|BL| \leqq b + d$, $|DK| \leqq a + c$ plyne

$$2e^2 + 2f^2 \leqq (b + d)^2 + (a + c)^2.$$

Rovnost nastane, právě když nastane v použitých trojúhelníkových nerovnostech, tedy právě když body B, C, L leží na jedné přímce a zároveň body D, C, K leží na jedné přímce, což je zřejmě splněno jedině tehdy, je-li $ABCD$ rovnoběžník.

Poznámka. Podmínkám zadání vyhovují (navzájem nepodobné) rovnoběžníky $ABCD$ splňující

$$|AB| = 1, \ |BC| = t \quad \text{a} \quad \cos|\sphericalangle ABC| = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad \left(1 \leqq t \leqq 1 + \sqrt{2}\right).$$

Jiné řešení. (Podle *Jáchyma Sýkory.*) Užitím vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ z prvního řešení zapíšeme umocněné rovnosti ze zadání ve tvaru

$$\begin{aligned} 2|AC|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})^2 = (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{c}|)^2, \\ 2|BD|^2 &= (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{a})^2 = (|\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{d}|)^2. \end{aligned}$$

Po sečtení těchto dvou rovností a úpravách dostaneme

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})^2 - 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) = 2(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{d}|),$$

odkud vzhledem k rovnosti $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ vychází

$$(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + (|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{d}| + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) = 0.$$

Podle Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti jsou ovšem sčítanci v obou závorkách nezáporní, takže se musejí rovnat nule. To znamená, že jak úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, tak úhel mezi vektory $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ má velikost $180°$, tudíž zkoumaný čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.