59. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 63–100.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405193

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1,\\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1,\\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

(*Radek Horenský*)

A – I – 2

Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC, CD a označme po řadě R, S její průsečíky s přímkami AB, AD. Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí. (*Leo Boček*)

A – I – 3

Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíselný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat? (*Peter Novotný*)

A – I – 4

V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60°. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 5

V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n-tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geqq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese. (*Dag Hrubý*)

A – I – 6

Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a,c]+[b,c]}{a+b} = \frac{p^2+1}{p^2+2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

A – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x-y^2} &= z-1,\\ \sqrt{y-z^2} &= x-1,\\ \sqrt{z-x^2} &= y-1.\end{aligned}$$

(*Radek Horenský*)

A – S – 2

Najděte všechny možné hodnoty podílu

$$\frac{r+\varrho}{a+b},$$

kde r je poloměr kružnice opsané a ϱ poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek a a b. (*Tomáš Jurík*)

A – S – 3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 33$. V jednom kroku zvolíme několik čísel napsaných na tabuli (aspoň dvě), jejichž součin je druhou mocninou

přirozeného čísla, zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných z nich není druhou mocninou. Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat? (*Peter Novotný*)

A – II – 1

Dokažte, že rovnice $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnými parametry p, q má v oboru reálných čísel čtyři řešení, právě když platí $p + |q| + 2 < 0$.
(*Jaromír Šimša*)

A – II – 2

Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. (*Jaroslav Švrček*)

A – II – 3

Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m - 1$ a m dělí $2n - 1$. (*Tomáš Szaniszlo*)

A – II – 4

V libovolném trojúhelníku ABC označme O střed kružnice vepsané, P střed kružnice připsané ke straně BC a D průsečík osy úhlu CAB se stranou BC. Dokažte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnicí připsanou ke straně BC rozumíme takovou kružnici, která se dotýká jednak strany BC, jednak obou polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.) (*Pavel Leischner*)

A – III – 1

Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(*Martin Panák*)

A – III – 2

Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

A – III – 3

Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?

b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany.

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

A – III – 4

Je dána kružnice k s tětivou AC, jež není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný kružnici k. Určete množinu průsečíků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům.

(*Pavel Leischner*)

A – III – 5

Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli některá dvě čísla, jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla, obě zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných dvou z nich není druhou mocninou. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je týmž číslem.) Dokažte, že na tabuli zůstane aspoň 16 čísel. (*Peter Novotný*)

A – III – 6

Najděte minimum výrazu

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c},$$

kde proměnné a, b, c jsou libovolná celá čísla větší než 1 a $[x,y]$ označuje nejmenší společný násobek čísel x, y. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 1

Levé strany daných rovnic mají (jako odmocniny) nezáporné hodnoty, proto z pravých stran plynou po řadě nerovnosti $z \geqq 1$, $x \geqq 1$ a $y \geqq 1$.

Odmocnin v rovnicích se zbavíme jejich umocněním:

$$x^2 - y = (z-1)^2, \quad y^2 - z = (x-1)^2, \quad z^2 - x = (y-1)^2,$$

umocněné rovnice sečteme a výsledek upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) &= (z-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2,\\ (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &= (z^2 + x^2 + y^2) - 2(z + x + y) + 3,\\ x + y + z &= 3.\end{aligned}$$

Protože však z odvoyených nerovností $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ a $z \geqq 1$ sečtením plyne $x + y + z \geqq 3$, může být rovnost $x + y + z = 3$ splněna jedině tak, že $x = y = z = 1$. Zkouškou dosazením se přesvědčíme, že trojice $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je skutečně řešením (a to jediným, jak plyne z našeho postupu).

Dodejme, že pokud si nerovností $x, y, z \geqq 1$ předem nepovšimneme, avšak vztah $x + y + z = 3$ po sečtení umocněných rovnic odvodíme, můžeme pak určenou hodnotu součtu $x+y+z$ uplatnit při sečtení původních (neumocněných) rovnic, a získat tak rovnici

$$\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = 0$$

s jasným důsledkem: každá z odmocnin musí být rovna nule.

Jiné řešení. Protože pro trojice (x, y, z), (y, z, x) a (z, x, y) vyjde soustava zadaných rovnic nastejno, stačí hledat pouze taková řešení (x, y, z), v nichž je první složka maximální, tj. platí $x \geqq y$ a $x \geqq z$.[1] Stejně jako v původním řešení si uvědomme, že $x, y, z \geqq 1$ (dále nám postačí pouze fakt, že $x, y, z \geqq 0$).[2]

Z předpokládané nerovnosti $x \geqq z$ plyne pro pravé strany první a druhé nerovnice srovnání $x - 1 \geqq z - 1$, takže stejnou nerovnost musí

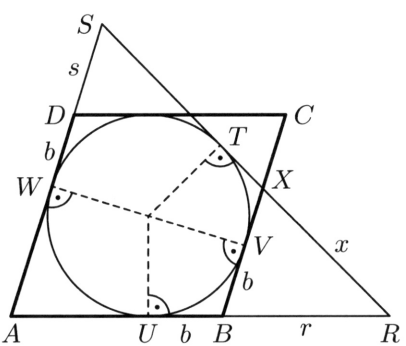
[1] Nerovnost $y \geqq z$ ovšem předem zaručit nemůžeme. Pořadí neznámých x, y, z totiž nemůžeme měnit libovolně, ale pouze *cyklicky*.

[2] Nezápornost využijeme k ekvivalencím typu $a^2 \geqq b^2 \Leftrightarrow a \geqq b$.

splňovat i odmocniny na levých stranách, tedy i příslušní odmocněnci: $y^2 - z \geqq x^2 - y$ neboli $x^2 - y^2 \leqq y - z$. Levá strana té poslední je nezáporná (díky předpokladu $x \geqq y$), takže je taková i pravá strana: $y - z \geqq 0$ neboli $y \geqq z$. To ještě upravíme na nerovnost $y - 1 \geqq z - 1$ mezi pravými stranami první a třetí rovnice, takže podle jejich levých stran dostaneme $z^2 - x \geqq x^2 - y$ neboli $z^2 - x^2 \geqq x - y$. Odtud a z předpokladu $x \geqq y$ máme $z^2 - x^2 \geqq 0$ neboli $z \geqq x$. Dohromady tak platí $x \geqq y \geqq z \geqq x$, musí tedy být $x = y = z$. Tehdy se zadaná soustava redukuje na jedinou rovnici $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$. Je snadné ukázat, že její jediné řešení v oboru reálných čísel je $x = 1$.

A – I – 2

Nechť U, V, W, T jsou body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, DA a s uvažovanou tečnou RS, jejíž průsečík se stranou BC pojmenujeme X (obr. 22). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné délky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ proměnné délky závislé na volbě tečny RS. Naším cílem je ukázat, že zadaný součin $r \cdot s = |BR| \cdot |DS|$ má stálou hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 22

Trojúhelníky ARS, BRX jsou stejnolehlé podle středu R, neboť jejich strany AS a BX leží na rovnoběžných přímkách. Navíc kružnice vepsaná prvnímu trojúhelníku ARS je připsána straně BX druhého trojúhelníku BRX. Protože body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdružené podle středu strany, na které oba body leží, můžeme usoudit, že poměru $|SW| : |AR|$ v trojúhelníku ARS odpovídá poměr $|BV| : |BR|$ v trojúhelníku BRX. To vede k rovnosti, kterou v zavedeném označení

zapíšeme jako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkud} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tím je důkaz hotov a úloha vyřešena.

Jiné řešení. Užijeme stejné označení jako v předchozím řešení. Označme ještě $|RX| = x$ a vyjádřeme délky stran obou stejnolehlých trojúhelníků ARS, BRX na základě triviálního poznatku o rovnosti úseků tečen z daného bodu k dané kružnici. Pro trojúhelník ARS je to snadné: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojúhelníku BRX předně máme $|BR| = r$ a délku třetí strany BX vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} |BX| = |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ = b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ARS a BRX tedy platí úměra

$$(a + r) : (2b + r + s) : (a + s) = r : x : (2b + r - x).$$

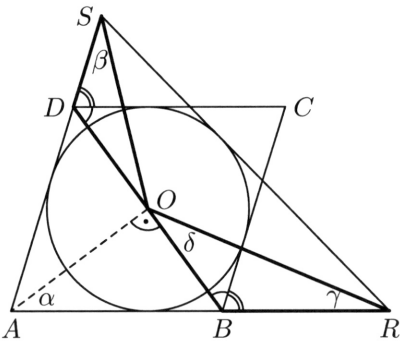
Odtud je možné eliminovat x a pak objevit závislost $rs = ab$. Místo takového postupu si však povšimněme, že obvod druhého trojúhelníku nezávisí na x, proto porovnáme poměry obvodu k první straně (na x nezávislé) v každém z obou trojúhelníků:

$$\begin{aligned} \frac{(a + r) + (2b + r + s) + (a + s)}{a + r} &= \frac{r + x + (2b + r - x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b + s)}{a + r} &= 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs &= ab. \end{aligned}$$

Potřebná rovnost je dokázána.

Jiné řešení. Překvapivě jednoduchý důkaz tvrzení úlohy podala studentka *Lenka Polcerová* z Gymnázia Křenová v Brně, když ukázala, že jsou podobné trojúhelníky ODS a RBO, kde O je střed kružnice vepsané kosočtverci $ABCD$ (obr. 23). Z této podobnosti totiž plyne úměra

$|DS| : |DO| = |BO| : |BR|$ neboli $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO|$, což je konstantní hodnota (na volbě tečny nezávislá).



Obr. 23

Protože zmíněné trojúhelníky ODS a RBO se zřejmě shodují ve vnitřních úhlech při vrcholech D a B, stačí k důkazu jejich podobnosti ověřit shodnost úhlů $\beta = |\sphericalangle OSD|$ a $\delta = |\sphericalangle ROB|$. Zavedeme-li ještě úhly $\alpha = |\sphericalangle BAO|$ a $\gamma = |\sphericalangle ARO|$, pak z faktu, že kružnice vepsaná kosočtverci $ABCD$ je zároveň vepsána trojúhelníku ARS, plyne, že vnitřní úhly tohoto trojúhelníku jsou 2α, 2β, 2γ, takže platí $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Protože úhel AOB je pravý, vnitřní úhly trojúhelníku AOR mají velikost α, γ, $\delta + 90°$, takže $\alpha + \gamma + \delta = 90°$. Porovnáním obou uvedených rovností pro součet tří úhlů dostáváme kýženou rovnost $\beta = \delta$ a celý důkaz je hotov.

A – I – 3

Na tabuli zřejmě budou stále jen čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budou napsána pořád, a to každé jedenkrát, protože nemají žádného dělitele různého od 1 a množina M ani neobsahuje žádný jejich násobek (takže nikdy nemohou z tabule zmizet ani se objevit v dalším exempláři).

Vysvětlíme nyní, proč na tabuli budou kromě uvedených pěti prvočísel napsána vždy ještě některá dvě další čísla. Součin S všech čísel zapsaných na tabuli je na počátku roven

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \qquad (1)$$

V každém kroku zvolíme nějakou dvojici čísel (x, y) s vlastností $x \mid y$, tedy čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme je jedním číslem $y/x = k$.

Součin všech čísel na tabuli se přitom změní z dosavadní hodnoty S na novou hodnotu S/a^2, neboť dva činitelé x, y o součinu $xy = ka^2$ přejdou v jeden nový činitel k (a ostatní činitelé se nezmění). Je jasné, že při změně $S \to S/a^2$ se exponent libovolného prvočinitele p z rozkladu čísla S buďto zachová (pokud $p \nmid a$), nebo sníží o sudé číslo (rovné exponentu p v rozkladu čísla a^2). V žádném případě se tedy nezmění *parita* (sudost či lichost) exponentu žádného z prvočinitelů. Proto každé z prvočísel, které mělo na počátku v rozkladu (1) *lichý* exponent, bude mít lichý exponent v rozkladu měnícího se S i po libovolném počtu kroků. Taková jsou (kromě 17, 19, 23, 29 a 31) rovněž prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budou stále zastoupena (ne nezbytně čtyři různá) čísla, která jsou těmito jednotlivými čtyřmi prvočísly dělitelná. Nemůže to být ovšem jediné číslo (neboť $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musí být aspoň dvě čísla, například 10 a 33 (nebo 11 a 30 či 15 a 22, jiné možnosti při celkovém počtu sedmi čísel na tabuli neexistují). Tak jsme dokázali, že na tabuli bude skutečně vždy napsáno nejméně 7 čísel.

Zbývá popsat nějakou posloupnost kroků, po níž na tabuli 7 čísel zůstane. Existuje mnoho možností, můžeme například dát „stranou“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a se zbylými čísly provést následující kroky:

$$32,16 \to 2, \quad 30,15 \to 2, \quad 28,14 \to 2, \quad 26,13 \to 2, \quad 24,12 \to 2,$$
$$22,11 \to 2, \quad 27,9 \to 3, \quad 21,7 \to 3, \quad 18,6 \to 3, \quad 25,5 \to 5,$$
$$20,4 \to 5, \quad 8,2 \to 4, \quad 5,5 \to 1, \quad 4,2 \to 2, \quad 3,3 \to 1,$$
$$3,3 \to 1, \quad 2,2 \to 1, \quad 2,2 \to 1, \quad 2,2 \to 1.$$

Po těchto krocích už je na tabuli (kromě sedmi čísel stranou) už jen 7 jedniček, které všechny odstraníme šesti kroky $1,1 \to 1$ a posledním krokem např. $10,1 \to 10$.

A – I – 4

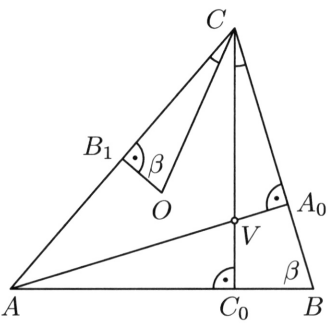
Nejprve ukážeme, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC platí

$$\gamma = 60^\circ \iff |CO| = |CV|. \tag{1}$$

K tomu uvážíme trojúhelníky CVA_0 a COB_1, kde A_0 je pata výšky z vrcholu A a B_1 je střed strany AC (obr. 24). Z pravoúhlého trojúhelníku ACA_0 plyne

$$\gamma = 60^\circ \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Poslední je rovnost délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků CVA_0 a COB_1, jejichž vyznačené vnitřní úhly VCA_0 a OCB_1 mají shodnou velikost $90° - \beta$. (Pro úhel CVA_0 to plyne z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0, kde C_0 je pata výšky z vrcholu C na stranu AB, pro úhel OCB_1 to plyne z rovnoramenného trojúhelníku ACO, který má u hlavního vrcholu O úhel 2β díky větě o obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici.) Proto je shodnost odvěsen CA_0, CB_1 ekvivalentní se shodností přepon CO a CV, což dokazuje (1).



Obr. 24

Nyní zapojíme do úvah střed S kružnice vepsané. Ze zmíněné shodnosti úhlů VCA_0 a OCB_1 plyne, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC je polopřímka CS nejen osou úhlu ACB, ale také osou úhlu OCV. Tato osa je v případě $\gamma = 60°$, kdy jak víme $|CO| = |CV|$, osou základny OV rovnoramenného trojúhelníku OVC (body O a V jsou různé, neboť podle zadání úlohy je trojúhelník ABC různostranný), takže střed S na ose úsečky OV skutečně leží. Stejně tak tomu je i v případech $\alpha = 60°$, resp. $\beta = 60°$.

Připusťme nyní, že střed S leží na ose úsečky OV, avšak žádný z úhlů α, β, γ není $60°$. Podle (1) tudíž platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Podívejme se znovu na trojúhelník OVC, v němž tedy osa CS vnitřního úhlu OCV nesplývá s osou protější strany OV, takže jejich jediný společný bod S leží na kružnici trojúhelníku OVC opsané. Jinak řečeno, bod C leží na kružnici opsané trojúhelníku OVS. Ze stejných důvodů na této kružnici leží i body A a B, takže se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC, která však nikdy svým středem O neprochází. Tak jsme dostali spor, který ukazuje, že připuštěná situace nemůže nastat. Tím je řešení celé úlohy u konce.

Poznámka 1. Z druhé části řešení vyplývá tento poznatek: má-li úhel γ (ostroúhlého) trojúhelníku ABC velikost $60°$, leží vrcholy A a B na jedné kružnici s průsečíkem výšek, středem opsané kružnice i středem vepsané kružnice. To ostatně plyne i z vyjádření jednotlivých úhlů v trojúhelníku.

Poznámka 2. Klíčovou ekvivalenci (1) z podaného řešení lze rovněž dokázat trigonometricky. Platí totiž vzorce

$$|CO| = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{2}$$

podle kterých jsou úsečky CO a CV shodné, právě když je úhel γ řešením rovnice $2\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma$, která je zřejmě ekvivalentní s rovnicí $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, jež má v intervalu $(0°, 90°)$ jediné řešení $\gamma = 60°$. První ze vzorců (2) plyne z tzv. rozšířené sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, druhý vzorec ve (2) dostaneme dvojím vyjádřením délky $|CA_0| = b\cos\gamma = |CV|\sin\beta$, kam ze sinové věty dosadíme $\sin\beta = (b/c)\sin\gamma$.

Poznámka 3. Ekvivalenci (1) z podaného řešení můžeme dokázat i bez velkého počítání: průsečík výšek daného trojúhelníku totiž vždy leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí trojúhelníku opsanou podle přímky AB (v našem případě). Vzhledem k tomu, že taková kružnice je zároveň obrazem kružnice opsané v posunutí o vektor $\boldsymbol{CV}$, závisí velikost $|CV|$ v dané opsané kružnici jen na velikosti tětivy AB (či odpovídajícím obvodovém úhlu), a nikoliv na poloze bodu C. Proto rovnost $|CV| = r = |CO|$ nastane, právě když zmíněná sdružená kružnice prochází středem O kružnice trojúhelníku opsané, tj. právě když příslušná strana leží proti (obvodovému) úhlu velikosti $60°$.

A – I – 5

Pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ označme r_k počet ryb v kádi poté, co si k-tý rybář odnese svůj díl. Tyto počty jsou podle zadání určeny počáteční hodnotou r_0 a rekurentními vztahy

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Zapišme je ve výhodném tvaru

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{kde } q = \frac{n-1}{n} \text{ a } d = \frac{1-n}{n}. \tag{1}$$

Rekurentní rovnice $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ (kde q, d jsou konstanty) je poměrně obvyklá v řadě aplikací. Odvodíme proto nejprve, jaké přímé vyjádření má každý člen r_k takové posloupnosti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ při obecných q, d a dané počáteční hodnotě r_0. Teprve poté se vrátíme k naší úloze a do výsledku dosadíme hodnoty q, d připsané v (1).

Všimněme si předně, že v případě $q = 1$ dostáváme rovnici $r_{k+1} = r_k + d$, podle které je zkoumaná posloupnost aritmetická s diferencí d, takže její obecný člen má vyjádření $r_k = r_0 + kd$. V případě $q \neq 1$ z rekurentní rovnice postupně dostaneme

$$
\begin{aligned}
r_1 &= qr_0 + d, \\
r_2 &= qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2 r_0 + (q+1)d, \\
r_3 &= qr_2 + d = q(q^2 r_0 + (q+1)d) + d = q^3 r_0 + (q^2 + q + 1)d, \\
r_4 &= qr_3 + d = q(q^3 r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4 r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Takto nacházíme vyjádření

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + q + 1)d.$$

Uplatníme-li známý vzorec pro součet k členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$, dojdeme k závěru, že pro každé $k \geqq 0$ je člen r_k dán přímým vzorcem

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q - 1} = q^k \Big(r_0 + \frac{d}{q-1} \Big) - \frac{d}{q-1}.$$

V našem konkrétním případě platí

$$\frac{d}{q-1} = \frac{\dfrac{1-n}{n}}{\dfrac{n-1}{n} - 1} = n - 1,$$

odkud nacházíme vyjádření jednotlivých hodnot r_k ve tvaru

$$r_k = \frac{(n-1)^k (r_0 + n - 1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, n).$$

Vzhledem k nesoudělnosti dvojice čísel $(n-1)^k, n^k$ jsou takové hodnoty r_k celočíselné, právě když je číslo $r_0 + n - 1$ dělitelné všemi zastoupenými

mocninami n^k, z nichž nejvyšší je mocnina n^n. Hledaná nutná i postačující podmínka má proto tvar: pro některé celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$ neboli $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocí tohoto parametru j pak mají všechny členy r_k vyjádření

$$r_k = j \cdot (n-1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, n). \tag{2}$$

Zbývá zjistit nejmenší celé $j \geqq 1$, při kterém jsou všechna čísla r_k daná vztahy (2) kladná. Protože tato čísla zřejmě tvoří klesající posloupnost, nejmenší z nich je číslo $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, což je při $n \geqq 3$ číslo kladné již při $j = 1$ (tehdy $r_0 = n^n - n + 1$), zatímco při $n = 2$ to platí až při $j = 2$ (tehdy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpověď: Hledaný nejmenší počet ryb je $r_0 = 7$ pro $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pro každé $n \geqq 3$.

Jiné řešení. Posloupnost $r_0, r_1, \ldots, r_n$ můžeme počítat i „odzadu", tj. pomocí posledního členu r_n vyjadřovat členy předchozí. S využitím rekurentního vztahu

$$r_k = q r_{k+1} + 1, \quad \text{kde} \quad q = \frac{n}{n-1}$$

(kvocient q má nyní převrácenou hodnotu oproti hodnotě v původním řešení), postupně pro $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
r_{n-1} &= q r_n + 1, \\
r_{n-2} &= q r_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1, \\
r_{n-3} &= q r_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1, \\
r_{n-4} &= q r_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Podobně jako v původním řešení (sčítání členů geometrické posloupnosti a následné dosazení kvocientu q zde vynecháme) tak dospějeme ke vzorcům

$$r_{n-k} = \frac{n^k (r_n + n - 1)}{(n-1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Protože čísla n^k a $(n-1)^k$ jsou nesoudělná, hodnoty r_{n-k} jsou vesměs celočíselné, právě když $(n-1)^n \mid r_n + n - 1$, neboli $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čemuž odpovídá (podle vzorce (3) pro $k = n$) počáteční hodnota

$r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak jsme došli ke stejnému závěru jako při původním postupu.

Poznámka. Nalezení vzorců pro členy r_k se při obou postupech značně zjednoduší, když si všimneme, že pozměněná posloupnost tvořená čísly $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická.

A – I – 6

V zadané rovnici bude výhodné přejít od nejmenších společných násobků k největším společným dělitelům, a to pomocí známého vztahu $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. Označme proto $u = (a, c)$, $v = (b, c)$ a levou stranu rovnice přepišme takto:

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{ac/u + bc/v}{a + b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right) \cdot \frac{c}{a + b}.$$

Zadanou rovnici lze proto (po vynásobení zlomkem $(a + b)/c$) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b). \tag{1}$$

Porovnejme odhady velikosti výrazů v (1). Protože $p^2 > 0$, pro zlomek na pravé straně (1) zřejmě platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} < 1,$$

takže v důsledku (1) musí být

$$\frac{a + b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a + b. \tag{2}$$

Díky levé nerovnosti nemohou být obě přirozená čísla u, v větší než 1, neboť z nerovností $u \geqq 2$ a $v \geqq 2$ bychom dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leqq \frac{a + b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je tedy rovno jedné. Pravá nerovnost v (2) však vylučuje případ $u = v = 1$. Číslu 1 se tudíž rovná právě jedno z čísel u, v. S ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $u = 1$ a $v \geqq 2$.

Protože číslo v jsme zavedli vztahem $v = (b, c)$, je zlomek b/v roven některému přirozenému číslu b_1. Dosadíme nyní hodnoty $u = 1$ a $b = b_1 v$ do (1) a vzniklou rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné a:

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2+1}{p^2+2} \cdot (a + b_1 v), \\ (p^2+2)(a+b_1) &= (p^2+1)(a+b_1 v), \\ a &= b_1((p^2+1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Kdyby platilo $v \geqq 3$, dostali bychom z poslední rovnosti odhad

$$a \geqq (p^2+1)v - p^2 - 2 \geqq 3(p^2+1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je ve sporu s nerovností $a \leqq 2p^2$ danou oborem, ve kterém podle zadání úlohy mají hodnoty a, b, c ležet. Platí tedy opačná nerovnost $v < 3$, která spolu s předpokladem $v \geqq 2$ vede k závěru, že nutně $v = 2$. Rovnice (3) tak přechází v rovnici

$$a = b_1(2(p^2+1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

kterou v zadaném oboru hodnot a, množině $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, snadno vyřešíme.

Protože je tedy $a \leqq 2p^2$, je $b_1 \leqq 2$. Přitom z podmínek $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ plyne, že c je sudé číslo s číslem a nesoudělné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak plyne, že $b_1 = 1$ a p je *liché* prvočíslo. Je tudíž $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pro číslo c to znamená následující zpřesnění: *c je sudé číslo, které není násobkem daného prvočísla p.*

Která $c \in \{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$ takovou podmínku splňují a kolik jich je? Jak už víme, pro $p = 2$ žádné takové c neexistuje. Pro liché p pak ze všech p^2 možných sudých čísel $c = 2, 4, 6, \ldots, 2p^2$ vyloučíme všechny násobky čísla p, tedy právě p čísel $2p, 4p, \ldots, 2p^2$; vyhovujících hodnot je proto právě $p^2 - p$. Takový je tedy počet všech hledaných trojic $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozebraném případě, kdy $u = 1$ a $v \geqq 2$.

Ve druhém možném případě, kdy naopak $v = 1$ a $u \geqq 2$, existuje s ohledem na symetrii stejný počet $p^2 - p$ vyhovujících trojic, které jsou tentokrát všechny tvaru $(2, p^2, c)$. (Popis vyhovujících trojic zahrneme i do odpovědi, přestože to zadání úlohy nevyžaduje.)

Odpověď: V případě $p = 2$ žádné vyhovující trojice neexistují, v případě lichého prvočísla p je jich právě $2(p^2 - p)$ a všechny jsou tvaru

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{nebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

kde $c \in \{1, 2, \ldots, 2p^2\}$ je libovolné sudé číslo, které není násobkem p.

Jiné řešení. Definujme přirozená čísla u, v, m, n vztahy $u = (a, c)$, $v = (b, c)$, $a = mu$ a $b = nv$. Pak $[a, c] = mc$, $[b, c] = nc$ a po dosazení do zadané rovnice po malé úpravě včetně zkrácení číslem c dostaneme

$$(p^2 + 2)(m + n) = (p^2 + 1)(mu + nv).$$

Díky nesoudělnosti čísel $p^2 + 1$ a $p^2 + 2$ existuje přirozené číslo k takové, že

$$m + n = k(p^2 + 1) \quad \text{a} \quad mu + nv = k(p^2 + 2). \tag{1}$$

Vyřešme nyní soustavu rovnic (1) pro neznámé m a n, pokládaje u a v za parametry. Zřejmě $u \neq v$, předpokládejme tedy dále, že $u > v$ (případ $u < v$ se díky symetrii rozebere stejně). Soustava (1) má jediné řešení

$$m = \frac{k\big(p^2 + 2 - v(p^2 + 1)\big)}{u - v} \quad \text{a} \quad n = \frac{k\big(u(p^2 + 1) - p^2 - 2\big)}{u - v}.$$

Z nerovností $u - v > 0$ a $m > 0$ plyne $p^2 + 2 - v(p^2 + 1) > 0$ neboli

$$v < \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1} = 1 + \frac{1}{p^2 + 1} < 2,$$

takže nutně platí $v = 1$ a vzorce pro m, n přejdou do tvaru

$$m = \frac{k}{u - 1} \quad \text{a} \quad n = \frac{k\big(u(p^2 + 1) - p^2 - 2\big)}{u - 1} = m\big(u(p^2 + 1) - p^2 - 2\big).$$

Kdyby pro číslo $u > 1$ platilo $u \geqq 3$, měli bychom z poslední rovnosti

$$n \geqq u(p^2 + 1) - p^2 - 2 \geqq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

což je ve sporu s tím, že $n = nv = b \leqq 2p^2$. Je tedy nutně $u = 2$ a vzorce pro m, n získávají definitivní podobu

$$m = k \quad \text{a} \quad n = kp^2,$$

tudíž (s ohledem na nerovnost $n \leqq 2p^2$) musí být buď $k = 1$, nebo $k = 2$.

Je-li $k = 1$, máme $a = mu = 2$, $b = nv = p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (2, c) = 2$ a $(b, c) = (p^2, c) = 1$. Taková čísla c existují, jen když je prvočíslo p liché, a v zadaném intervalu jich je právě $p^2 - p$.

Je-li $k = 2$, máme $a = 4$ a $b = 2p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (4, c) = 2$ a $(b, c) = (2p^2, c) = 1$. Žádné takové c (které by bylo sudé i liché) zřejmě neexistuje.

V případě $u < v$ s ohledem na symetrii existuje rovněž $p^2 - p$ vyhovujících trojic, takže jejich celkový počet je $2(p^2 - p)$ (je-li ovšem $p = 2$, žádná zkoumaná trojice neexistuje).

A – S – 1

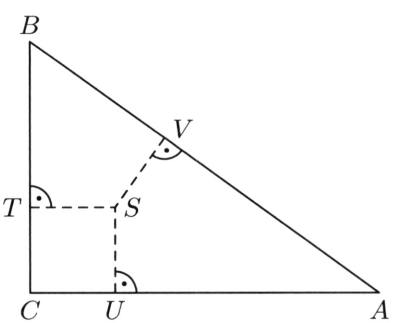
Hodnoty odmocnin jsou vždy nezáporné a odmocňované hodnoty také, proto neznámé x, y, z musejí splňovat podmínky $x, y, z \geqq 1$, $x \geqq y^2$, $y \geqq z^2$ a $z \geqq x^2$. Z posledních tří nerovností máme $\max\{x, y, z\} \geqq \geqq \max\{y^2, z^2, x^2\}$, opačná (neostrá) nerovnost platí díky tomu, že $t \leqq t^2$ pro každé $t \geqq 1$. Proto $\max\{x, y, z\} = \max\{y^2, z^2, x^2\} = 1$, tedy $x = y = z = 1$ a obě strany všech tří rovnic soustavy jsou rovny nule (to je zároveň zkouška).

Obměna postupu: namísto úvahy o maximech můžeme po zjištění z první věty řešení pokračovat následovně: platí $x \geqq y^2 \geqq y \geqq z^2 \geqq \geqq z \geqq x^2$, nerovnost mezi krajními výrazy $x \geqq x^2$ již znamená $x = 1$, takže i hodnoty y, z z uvedeného řetězce šesti členů jsou rovny 1.

Závěr. Soustava má jediné řešení $x = y = z = 1$.

A – S – 2

Pro délky úseků stran obecného trojúhelníku ABC k bodům dotyku vepsané kružnice (označeným podle obr. 25) platí vzorce



Obr. 25

$$|AU| = |AV| = \frac{b+c-a}{2}, \qquad |BV| = |BT| = \frac{a+c-b}{2},$$
$$|CT| = |CU| = \frac{a+b-c}{2},$$

které lze snadno získat vyřešením soustavy rovnic

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C, T, U spolu se středem S vepsané kružnice jsou obecně vrcholy deltoidu, který je v případě pravého úhlu ACB čtvercem o straně $\varrho = |SU| = |SV|$. Porovnání s výše uvedenými vzorci pro délky úseků CT, CU vede ke vztahu

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2};$$

podle Thaletovy věty v takovém pravoúhlém trojúhelníku navíc platí $r = \frac{1}{2}c$. Dohromady dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Zkoumaný podíl $(r+\varrho)/(a+b)$ má proto v libovolném pravoúhlém trojúhelníku jedinou možnou hodnotu, rovnou číslu $\frac{1}{2}$.

Uvedený postup lze obměnit zejména tak, že namísto obecných vzorců pro úseky stran vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z nichž plyne $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, tudíž

$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b-\varrho) + (a-\varrho),$$

odkud je již závěr nasnadě.

Jiné řešení. Pro obsah P obecného trojúhelníku ABC platí vzorec

$$2P = \varrho(a+b+c);$$

k jeho odvození stačí sečíst obsahy trojúhelníků ABS, ACS a BCS se shodnou výškou ϱ ke stranám původního trojúhelníku. V případě $\gamma = 90°$ je ovšem $2P = ab$ a kromě toho, jak už jsme zmínili výše, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pythagorovou větou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+c^2+2ab}{2(a+b+c)} = \frac{ac+bc+a^2+b^2+2ab}{2(a+b+c)} =$$
$$= \frac{(a+b)c+(a+b)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2},$$

a docházíme tak ke stejnému závěru jako v původním řešení.

A – S – 3

Součin všech čísel zapsaných na tabuli je roven

$$S = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$

Přítomnost lichých exponentů znamená, že S není druhou mocninou. Proto nemůžeme smazat v prvním kroku všechna napsaná čísla, prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 dokonce nesmažeme nikdy. Ze všech ostatních čísel, která se účastnit úprav mohou, vznikne vždy neprázdný soubor čísel, takže na tabuli bude pořád alespoň $5 + 1 = 6$ čísel. Ukažme, že 6 je hledaný nejmenší počet popisem jednoho (z řady možných) postupů.

Kvůli lichým exponentům u prvočísel 2, 3, 5 a 11 vyčleníme nejdříve například skupinu čísel $\mathsf{A} = \{2, 9, 11, 22, 25\}$ a všechna ostatní čísla různá od 17, 19, 23, 29 a 31 zařadíme do skupiny

$$\mathsf{B} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33\}.$$

V prvním kroku vybereme všechna čísla z A a nahradíme je číslem

$$n = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Protože součin všech čísel z B je $2^{31-2} \cdot 3^{15-2} \cdot 5^{7-2} \cdot 7^4 \cdot 11^{3-2} \cdot 13^2 = 2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2$, vybereme v druhém kroku číslo n spolu se všemi čísly z B a nahradíme je číslem

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2)} = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Pak už zůstane na tabuli pouze šest čísel, což je, jak jsme vysvětlili, nejmenší možný počet.

A – II – 1

Ze zadání je patrné, že číslo 0 není řešením dané rovnice, ať jsou parametry p, q jakékoliv. Zbavme se proto absolutní hodnoty v rovnici konstatováním, že všechna její řešení jsou *kladné* kořeny rovnice

$$x^2 + px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 + (p - q)x + 1 = 0, \tag{1}$$

spolu se *zápornými* kořeny rovnice

$$x^2 - px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 - (p + q)x + 1 = 0. \tag{2}$$

Protože každá kvadratická rovnice má nejvýše dva kořeny, zkoumaná situace celkového počtu čtyř řešení nastane, právě když rovnice (1) bude mít dva *různé kladné* kořeny a zároveň rovnice (2) bude mít dva *různé záporné* kořeny. Rozborem těchto podmínek se nyní budeme zabývat.

Předně je jasné, že oba diskriminanty $(p-q)^2-4$ a $(p+q)^2-4$ rovnic (1) a (2) musejí mít kladné hodnoty, což vede na nutné podmínky

$$(p-q)^2 > 4 \quad \text{a} \quad (p+q)^2 > 4. \tag{3}$$

Jsou-li splněny, stačí zkoumat otázku, kdy *menší* kořen rovnice (1) je *kladný* a zároveň *větší* kořen rovnice (2) *záporný*. Podle vzorců pro kořeny kvadratické rovnice to lze zapsat nerovnostmi

$$\frac{q-p-\sqrt{(p-q)^2-4}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2-4}}{2} < 0. \tag{4}$$

(Znaménka pro menší, resp. větší kořen jsme vybrali na základě toho, že jmenovatelé obou zlomků se rovnají *kladnému* číslu 2.) Z první nerovnosti zapsané v ekvivalentním tvaru

$$q-p > \sqrt{(p-q)^2-4} \tag{5}$$

plyne $q-p>0$, takže první nerovnost v (3) lze zpřesnit na $q-p>2$. Pak už nerovnost (5) zřejmě platí, neboť

$$q-p = \sqrt{(p-q)^2} > \sqrt{(p-q)^2-4}.$$

Tak jsme ukázali, že rovnice (1) má dva různé kladné kořeny, právě když platí $q-p>2$, což je první z podmínek

$$p-q+2<0, \quad p+q+2<0. \tag{6}$$

Stejným postupem ověříme, že druhá podmínka v (6) vyjadřuje existenci dvou různých záporných kořenů rovnice (2). Stačí upravit druhou nerovnost z (4) do tvaru

$$\sqrt{(p+q)^2-4} < -(p+q) \quad \text{(odkud plyne } p+q<0\text{)}$$

a pro záporné číslo $p+q$ tak získat konečnou podmínku ve tvaru $p+q<$ <-2, což je druhá z nerovností (6), které tak přesně vymezují zkoumanou situaci.

K dokončení celého řešení zbývá zdůvodnit ekvivalenci

$$(p-q+2<0 \ \wedge \ p+q+2<0) \ \Leftrightarrow \ p+|q|+2<0.$$

To je snadné, protože ze zřejmé rovnosti $|q| = \max\{-q, q\}$ plyne

$$p+|q|+2 = \max\{p-q+2, p+q+2\}$$

a maximum ze dvou reálných čísel je záporné, právě když jsou obě záporná.

Jiné řešení. Nejprve postupujme shodně s původním řešením až do odvození nerovností (3), které, připomeňme, zaručují existenci dvou různých reálných kořenů rovnice (1), resp. rovnice (2). Označíme je po řadě $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ a zapíšeme jejich vztah ke koeficientům rovnic, vyjádřený známými Viètovými vzorci

$$x_1+x_2 = -(p-q), \quad x_1x_2 = 1, \quad x_3+x_4 = p+q, \quad x_3x_4 = 1. \qquad (7)$$

Z rovnosti $x_1x_2 = 1$ plyne, že kořeny $x_{1,2}$ mají stejné znaménko. Jsou tedy kladné, právě když je kladný jejich součet, který je ovšem podle první rovnosti v (7) roven $-(p-q)$. Získanou nerovnost $p-q<0$ lze spolu s podmínkou $(p-q)^2>4$ vyjádřit jedinou nerovností $p-q<-2$ (neboli $p-q+2<0$), která je tudíž kritériem toho, kdy rovnice (1) má dva různé kladné kořeny. Podobně pro existenci dvou záporných kořenů rovnice (2) dostaneme kritérium $p+q+2<0$. Závěrečný převod obou nerovností na jednu ekvivalentní nerovnost s absolutní hodnotou zdůvodníme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozích postupech přejdeme k rovnicím (1) a (2), které jsou obě téhož typu $x^2+rx+1=0$. Existenci dvou různých kladných či záporných kořenů takové rovnice nyní posoudíme úvahou o příslušné kvadratické funkci $f(x) = x^2+rx+1$ s parametrem r, jejímž grafem je parabola rozevřená vzhůru. Proto má funkce f dva různé nulové body, řekněme u a v, právě když má alespoň jednu zápornou hodnotu, navíc takové hodnoty se nabývají právě v bodech, které leží mezi u a v. Všimněme si ještě, že bez ohledu na hodnotu parametru r pro případné nulové body u, v funkce f platí $uv = f(0) = 1$, takže to jsou dvě navzájem převrácená čísla, jež jsou zároveň kladná či zároveň záporná. Jsou tedy obě kladná (resp. záporná), právě když mezi nimi leží číslo 1 (resp. číslo -1). Pro první případ tak dostáváme jedinou podmínku $f(1)<0$

(neboli $2+r<0$), pro druhý případ jedinou podmínku $f(-1)<0$ (neboli $2-r<0$). Zbývá dodat, že v rovnici (1) je $r=p-q$ a v rovnici (2) je $r=-(p+q)$, takže znovu dostáváme dvojici nerovností (6).

A – II – 2

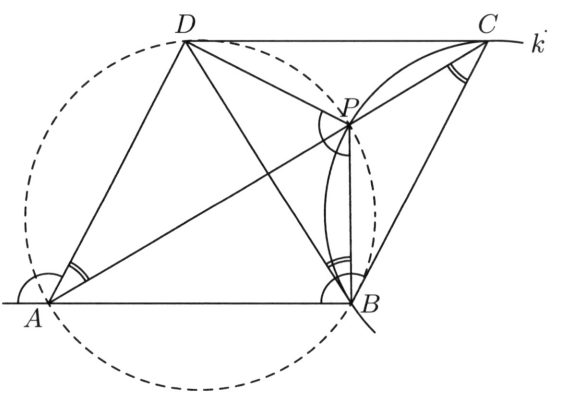
Pro lepší přehlednost zmiňme úvodem zřejmé vlastnosti obecného rovnoběžníku $ABCD$, které v řešení využijeme: součet úhlů BAD a ABC je úhel přímý, zatímco úhly DAC a ACB jsou shodné, stejně jako strany AB a CD.

Podle zadání úlohy přímka BD odděluje body A a P, přičemž platí

$$|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle BPD|=|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle ABC|=180^\circ,$$

čtyřúhelníku $ABPD$ lze tudíž opsat kružnici (obr. 26). V ní jsou proto shodné obvodové úhly DBP a DAP, z čehož vyplývá

$$|\sphericalangle DBP|=|\sphericalangle DAP|=|\sphericalangle DAC|=|\sphericalangle ACB|=|\sphericalangle BCP|.$$



Obr. 26

Protože přímka BP odděluje body C a D, lze uplatnit větu o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BP kružnice k opsané trojúhelníku BCP: Z odvozené shodnosti úhlů BCP a DBP vyplývá, že přímka BD je tečnou ke kružnici k (s bodem dotyku B). Po tomto zjištění již snadno dokážeme obě požadované implikace.

(i) Je-li přímka CD tečnou ke kružnici k, ze symetrie obou tečen CD a BD plyne $|CD| = |BD|$ neboli $|AB| = |BD|$.

(ii) Platí-li naopak $|AB| = |BD|$ neboli $|CD| = |BD|$, leží bod D na ose tětivy BC kružnice k, takže její tečnou je nejen přímka BD, ale i souměrně sdružená přímka CD.

A – II – 3

Hledáme právě ty dvojice celých kladných čísel m a n, pro něž existují celá kladná čísla k a l taková, že

$$2m - 1 = kn \quad \text{a} \quad 2n - 1 = lm. \tag{1}$$

Pohlédněme na čísla k, l jako na parametry a řešme soustavu lineárních rovnic (1) pro neznámé m, n. Když například k dvojnásobku první rovnice přičteme k-násobek druhé rovnice, eliminujeme tím neznámou n a po úpravě dostaneme první z rovnic

$$(4 - kl)m = k + 2 \quad \text{a} \quad (4 - kl)n = l + 2; \tag{2}$$

druhou rovnici získáme analogicky. Protože pravé strany rovnic (2) jsou kladné, plyne z tvaru levých stran podmínka $4 - kl > 0$ neboli $kl < 4$. To je pro celá kladná čísla k, l natolik omezující, že jednotlivé možné případy $kl = 1$, $kl = 2$ a $kl = 3$ snadno postupně rozebereme.

V případě $kl = 1$ musí být $k = l = 1$ a z rovnic (2), které přejdou do tvaru $3m = 3$ a $3n = 3$, nacházíme první vyhovující dvojici $m = n = 1$.

Případ $kl = 2$ vůbec rozebírat nemusíme, protože podle levých stran rovnic (1) vidíme, že čísla k, l, m, n z pravých stran musí být (v každém, nejen v tomto případě) lichá.

V případě $kl = 3$ je nutně $\{k, l\} = \{1, 3\}$, což po dosazení do rovnic (2) dává řešení $m = 5$ a $n = 3$, nebo naopak $m = 3$ a $n = 5$.

Závěr. Všechny hledané dvojice (m, n) jsou $(1, 1)$, $(3, 5)$ a $(5, 3)$.

Jiná řešení. Nerovnostní úvahy vedoucí k úplnému vyřešení úlohy můžeme různými způsoby obměňovat. Podívejme se tedy, jakými cestami se lze od výchozích předpokladů $m \mid 2n - 1$ a $n \mid 2m - 1$ ubírat.

První postup. Kdyby neplatilo $m = 2n - 1$ ani $n = 2m - 1$, byla by čísla $2n - 1$ a $2m - 1$ alespoň dvojnásobky po řadě čísel m a n, tudíž by platily nerovnosti $2n - 1 \geqq 2m$ a $2m - 1 \geqq 2n$. Ty se však navzájem vylučují, neboť znamenají $2n > 2m$, resp. $2m > 2n$. Proto musí platit

aspoň jedna z rovností $m = 2n - 1$ či $n = 2m - 1$. Je-li $m = 2n - 1$, pak $2m - 1 = 4n - 3$ a zbylá podmínka $n \mid 2m - 1$ tak přechází do tvaru $n \mid 4n - 3$ neboli $n \mid 3$. To splňují pouze čísla $n = 1$ a $n = 3$, kterým podle vzorce $m = 2n - 1$ odpovídají po řadě hodnoty $m = 1$ a $m = 5$. Druhý případ, kdy $n = 2m - 1$, se od prvního liší jen záměnou rolí m a n, takže při něm dostaneme ještě třetí vyhovující dvojici $m = 3$ a $n = 5$.

Druhý postup. S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že platí $m \leqq n$, z čehož plyne $2m - 1 \leqq 2n - 1 < 2n$. Číslo $2m - 1$ je tak násobkem čísla n menším než $2n$, musí to tudíž být samo číslo n. Tak jsme odvodili rovnost $2m - 1 = n$. Zbytek úvah je už stejný jako při prvním postupu.

Třetí postup. Všimněme si, že číslo $2m + 2n - 1$ je dělitelné každým z obou čísel m a n, která jsou navíc nesoudělná, neboť např. číslo m je dělitel čísla $2n - 1$, jež je s číslem n zřejmě nesoudělné. Proto je číslo $2m + 2n - 1$ dělitelné i součinem mn, takže platí nerovnost $mn \leqq 2m + 2n - 1$ neboli $(m - 2)(n - 2) \leqq 3$. Odtud vyplývá, že obě čísla m, n nemohou být větší než 3; s ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $m \leqq 3$. Pro $m = 1$ z podmínky $n \mid 2m - 1$ plyne $n = 1$, pro $m = 2$ je podmínka $m \mid 2n - 1$ nesplnitelná, pro $m = 3$ máme podmínky $3 \mid 2n - 1$ a $n \mid 5$, které splňuje jedině $n = 5$.

A – II – 4

Označme obvyklým způsobem délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Pro poloměry ϱ, ϱ_a kružnice vepsané, resp. připsané straně BC trojúhelníku ABC o obsahu S platí známé vzorce

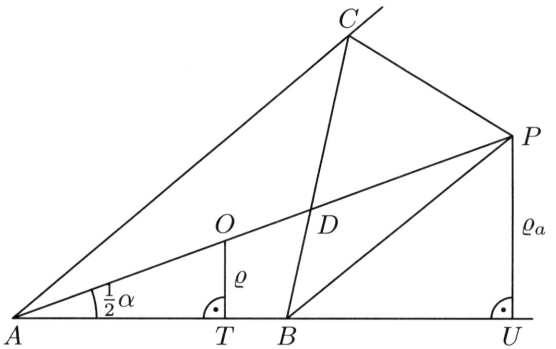
$$\varrho = \frac{2S}{a+b+c} \quad \text{a} \quad \varrho_a = \frac{2S}{b+c-a}.$$

(K jejich odvození stačí uvážit rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvážit, že ϱ, resp. ϱ_a je společná výška zastoupené trojice trojúhelníků ke stranám původního trojúhelníku.)

Protože středy O, P leží na ose vnitřního úhlu BAC, jsou ϱ, ϱ_a odvěsnami protilehlými k úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravoúhlých trojúhelníků s přeponami AO, resp. AP (obr. 27), takže platí $\varrho = |AO| \sin \frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin \frac{1}{2}\alpha$. Dohromady dostáváme vyjádření pravé strany dokazované rovnosti ve tvaru

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} =$$

$$= \frac{\big((a+b+c) + (b+c-a)\big) \sin \frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S}.$$



Obr. 27

Na druhé straně je obsah S součtem obsahů trojúhelníků ABD a ACD, které vyjádříme pomocí délek jejich stran z vrcholu A a sinu jimi sevřeného (shodného) úhlu $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtud snadno obdržíme vyjádření

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{S},$$

z něhož vidíme, že obě strany dokazované rovnosti mají stejnou hodnotu. Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že díky vzorci $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ lze získaný výsledek zapsat ve tvaru

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Jiné řešení. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pro body T, U dotyku polopřímky AB s vepsanou, resp. připsanou kružnicí.[3] Vzhledem k rovnostem $|AT| = |AO|\cos\frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP|\cos\frac{1}{2}\alpha$ dostaneme následující vyjádření pravé strany dokazované rovnosti:

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{|AO|+|AP|}{|AP|}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{|AT|+|AU|}{|AU|}\cdot\frac{1}{|AO|} =$$
$$= \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c}\cdot\frac{1}{|AO|}.$$

[3] Tyto rovnosti jsou dobře známé a snadno plynou z rovností délek úseků tečen od vrcholů trojúhelníku k bodům dotyku s příslušnou kružnicí.

Vidíme, že k dokončení důkazu požadované rovnosti stačí ukázat, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Z vlastností osy úhlu však víme, že bod D dělí stranu BC v poměru délek stran AB a AC, tedy $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobně ovšem bod O osy úhlu ACD dělí protější stranu AD trojúhelníku ACD v poměru

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtud

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO|+|OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Jiné řešení. Uvedeme trigonometrický postup založený na užití sinové věty v trojúhelnících ABO, ABD a ABP.[4] Je zřejmé, že tyto trojúhelníky mají u vrcholu B po řadě úhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90° + \frac{1}{2}\beta$, zatímco u vrcholů O, D, P mají po řadě úhly $90° + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Proto sinová věta přináší rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

když jsme dvakrát využili vzorec $\sin(90° + \delta) = \cos\delta$. Po dosazení do dokazované rovnosti tak docházíme k ekvivalentní úloze dokázat pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC rovnost

$$\frac{2\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Po uplatnění vzorce $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ a následném vynásobení obou stran nenulovým výrazem $\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ přecházíme k úkolu ověřit jednodušší rovnost

$$\sin\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right) = \cos\frac{1}{2}\gamma\cdot\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma\cdot\sin\frac{1}{2}\beta.$$

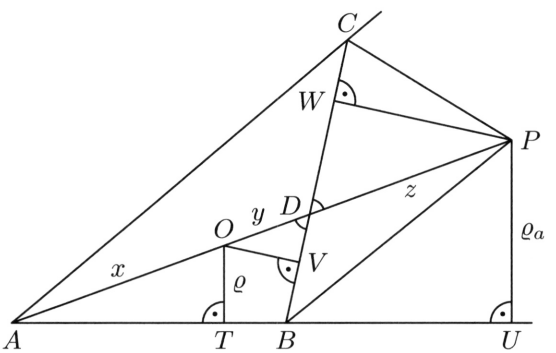
[4] Se stejným úspěchem lze využít i trojici trojúhelníků ACO, ACD a ACP.

To je už docela snadné: výraz napravo je totiž roven $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnost typu $\sin\delta = \cos\varepsilon$ je zaručena, platí-li $\delta + \varepsilon = 90°$. V našem případě je ovšem $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, tudíž

$$\delta + \varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°$$

a celý důkaz je tak hotov.

Jiné řešení. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podle obr. 28 označme body dotyku T, U, V, W vepsané a připsané kružnice s přímkami AB, BC. Podle věty *uu* jsou dvojice trojúhelníků AOT, APU



Obr. 28

a DOV, DPW podobné, přitom v obou případech je koeficient podobnosti roven poměru poloměrů obou kružnic. Odtud pro přepony zmíněných čtyř trojúhelníků plyne úměra[5]

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{z}. \tag{1}$$

Protože $x+y+z > z$, a tedy rovněž $x > y$, uvedeným dvěma zlomkům se rovná i třetí zlomek sestavený z (kladných) rozdílů čitatelů a jmenovatelů. Platí tedy

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{x-y}{(x+y+z)-z} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y} - 1.$$

[5] Její platnost je zaručena i v případě $D = V = W$, kdy druhý pár podobných trojúhelníků degeneruje na dvojici úseček — poloměrů zkoumaných kružnic.

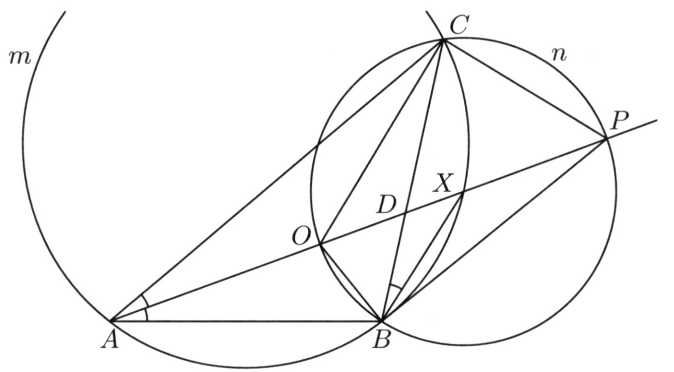
Odtud po vydělení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

a po převodu druhého zlomku z pravé strany na levou již obdržíme dokazovanou rovnost, neboť

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Jiné řešení. Body A, O, D, P leží na ose úhlu BAC. Body O, P navíc leží na vnitřní a vnější ose úhlu ABC, které jsou na sebe kolmé, takže úhly OBP a OCP jsou pravé. Body O, B, P, C proto leží na kružnici n, jejíž střed X je středem úsečky OP (obr. 29), takže zároveň platí $|AP| + |AO| = 2|AX|$. Vzhledem k mocnosti bodu A ke kružnici n



Obr. 29

tak dostáváme

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{|AP| + |AO|}{|AP||AO|} = \frac{2|AX|}{|AX|^2 - |BX|^2}.$$

Odtud plyne, že místo vztahu

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}$$

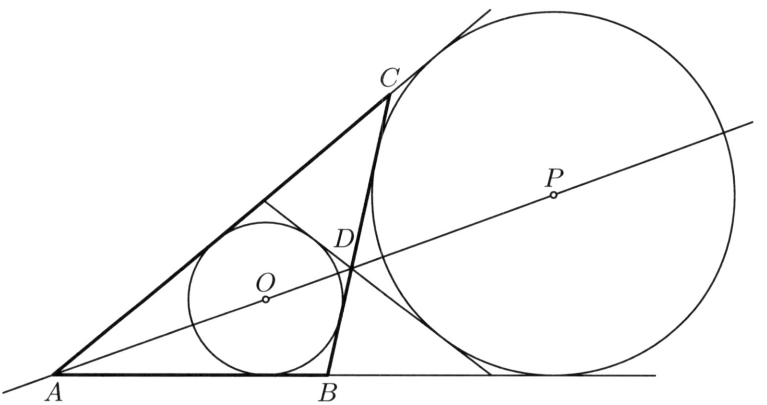
stačí dokázat rovnost $|AD| \cdot |AX| = |AX|^2 - |BX|^2$ neboli $|BX|^2 = |AX|(|AX| - |AD|) = |AX| \cdot |DX|$. Poslední rovnost však plyne z podobnosti trojúhelníků AXB a BXD, které se shodují ve společném vnitřním

úhlu u vrcholu X a v odpovídajících úhlech při vrcholech A, B, jež jsou zároveň obvodovými úhly příslušnými oblouku CX kružnice m.

Jiné řešení. Obě kružnice jsou stejnolehlé podle středů A i D. Obě stejnolehlosti mají až na znaménko stejné koeficienty a zobrazují bod O na bod P (obr. 30). Odtud

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|} \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP| - |AD|}{|AD| - |AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslední rovnosti dostáváme $2|AP||AO| = |AD|(|AP| + |AO|)$ a po vydělení nenulovým součinem $|AP| \cdot |AO| \cdot |AD|$ vyjde vztah, který jsme chtěli dokázat.



Obr. 30

A – III – 1

Z rovnice plyne, že b^2 je sudé číslo větší než 4^a, tudíž b je sudé číslo větší než sudé číslo 2^a. Musí proto platit $b \geqq 2^a + 2$, odkud

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geqq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

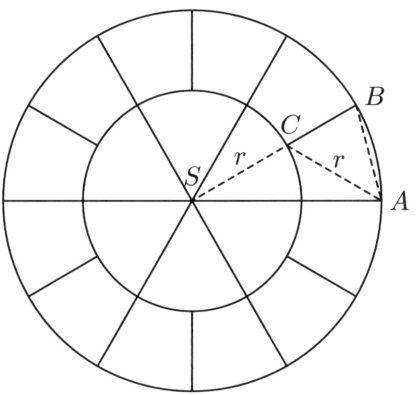
Porovnáním krajních výrazů dostaneme $a^2 \geqq 2^a$, což znamená, že $a \leqq 4$. Dokážeme totiž indukcí, že opačná nerovnost $a^2 < 2^a$ platí pro každé celé $a \geqq 5$. Pro $a = 5$ je to tak ($25 < 32$); platí-li $a^2 < 2^a$ pro některé $a \geqq 5$, pak po vynásobení dvěma dostaneme $2a^2 < 2^{a+1}$, takže kýžená nerovnost $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je důsledkem nerovnosti $(a+1)^2 < 2a^2$, která je

zřejmá, neboť je ekvivalentní s nerovností $1 < a(a-2)$, jež platí triviálně, ať je $a \geqq 5$ jakékoliv. Tím je důkaz indukcí hotov.

Ukázali jsme, že v každé hledané dvojici (a, b) musí platit $a \leqq 4$. Postupným dosazením hodnot $a = 1, 2, 3, 4$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ zjistíme, že úloha má právě dvě řešení, a to $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$.

A – III – 2

Označme $r = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ a celý terč o daném poloměru $r\sqrt{3}$ rozdělme na 18 částí. Prvních šest částí budou shodné výseče o středovém úhlu 60° v kruhu o poloměru r uprostřed terče. Zbylé mezikruží rozdělíme na 12 shodných „mezivýsečí“ o středovém úhlu 30° (obr. 31).



Obr. 31

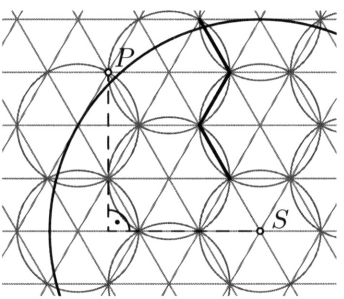
Označme podle obrázku S střed terče a A, B, C vrcholy jedné ze zmíněných mezivýsečí. Protože kružnice ohraničující tyto části mají poloměry r a $r\sqrt{3}$ a protože $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zřejmě trojúhelník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navíc je AC nejdelší stranou v trojúhelníku ABC, který má vnitřní úhly 45°, 75° a 60°. Proto je maximální vzdálenost dvou bodů jedné mezivýseče rovna r stejně jako maximální vzdálenost dvou bodů každé ze 6 výsečí středového kruhu o poloměru r. Podle Dirichletova principu některé dva z 19 zásahů leží ve stejné z 18 vytvořených částí, takže jejich vzdálenost je nejvýše r. Důkaz je hotov, protože platí $4\sqrt{3} < 7$ (neboli $48 < 49$).

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Zemana* z Gymnázia J. Keplera v Praze 6.) Uvažujme v rovině síť rovnostranných trojúhelníků o straně $a = \sqrt{12}$,

jejímž vrcholem je i střed S uvažovaného terče. Kromě kruhu $(S;a)$ budeme uvažovat i šest kruhů o poloměru a se středy ve vrcholech sítě ve vzdálenosti $a\sqrt{3}$ od S a dalších 12 kruhů téhož poloměru se středy ve vrcholech sítě ve vzdálenostech střídavě $3a$ a $2a\sqrt{3}$ od středu S (obr. 32). Označme P jeden z bodů sítě, který už neleží uvnitř útvaru složeného z uvedených devatenácti kruhů a přitom má od středu S nejmenší vzdálenost. Podle Pythagorovy věty je (obr. 32)

$$|PS|^2 = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \left(3\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 13a^2 > 12^2.$$

Bod P už tedy leží vně terče.



Obr. 32

Pokud tedy všechny zásahy neleží ve středním kruhu $(S;a)$ (pak není co dokazovat), snadno pomocí vhodného otočení celé sítě okolo středu S dosáhneme toho, že některý ze zásahů bude ležet na vyznačené lomené čáře. V tom případě buď v jednom z obou kruhů, v jejichž průniku leží i příslušná úsečka lomené čáry, leží nějaký další zásah (a to ve vzdálenosti menší než $2a$), anebo už žádný další zásah ani v jednom z obou kruhů neleží. To ovšem znamená, že všech 18 zbývajících zásahů musí ležet ve zbývajících 17 kruzích, a tak podle Dirichletova principu v jednom z nich leží aspoň dva zásahy. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Uvažujme tvrzení: *Je-li v kruhu o poloměru $r\sqrt{3}$ vybráno N bodů, je vzdálenost některých dvou z nich nejvýše r.* Kdybychom chtěli takové tvrzení dokázat porovnáním součtu obsahů N shodných kruhů o průměru r s obsahem kruhu o průměru $r\big(1+2\sqrt{3}\big)$, podaří se nám to, právě když bude platit

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2\big(1+2\sqrt{3}\big)^2}{4} \quad \text{neboli} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19{,}9.$$

V situaci dané úlohy, kdy je odhad r vzdálenosti dvou bodů zaměněn větší hodnotou $r_1 = r \cdot 7/4\sqrt{3}$, má podobná podmínka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi\left(r_1 + 2r\sqrt{3}\right)^2}{4}, \quad \text{po dosazení} \quad N > \left(1 + \frac{24}{7}\right)^2 \doteq 19{,}6.$$

Proto nelze takto jednoduchým postupem k řešení úlohy dospět.

A – III – 3

a) Označme a, b, c, d (proměnné) počty unesených členů stran A, B, C, D. Počáteční čtveřice $(a, b, c, d) = (31, 28, 23, 19)$ je podle parity čísel typu (l, s, l, l), kde l, s označují lichá, resp. sudá číslo. Protože při každé přeregistraci se parita všech čísel a, b, c, d změní (tři z nich se totiž zmenší o 1 a čtvrté zvětší o 3), čtveřice typu (l, s, l, l) přejde ve čtveřici (s, l, s, s) a ta pak zase zpět ve čtveřici (l, s, l, l). Dostaneme-li tedy nakonec čtveřici se třemi nulami, musí být tato čtveřice typu (s, l, s, s), takže všichni unesení tehdy budou členy strany B.

Následující tabulka změn hodnot a, b, c, d ukazuje, že se všichni unesení mohou opravdu stát členy strany B:

a:	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	...	0
b:	28	27	26	25	24	23	26	29	32	35	...	101
c:	23	22	25	24	27	26	25	24	23	22	...	0
d:	19	22	21	24	23	26	25	24	23	22	...	0

b) Ukážeme, že hledané čtveřice (a, b, c, d) jsou právě ty, ve kterých *některá tři čísla dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek.*

Z rovnosti $a+b+c+d = 101$ plyne, že tři z čísel a, b, c, d mají stejnou paritu a čtvrté paritu opačnou. S ohledem na symetrii hledejme výchozí čtveřice (a, b, c, d) za předpokladu

$$a \equiv b \equiv c \not\equiv d \pmod 2$$

a podle řešení části a) zkoumejme, kdy se všichni členové mohou stát členy strany D. Z toho, jak se mění počty a, b, c, d při každé přeregistraci (tři se zmenší o 1 a jedno zvětší o 3), plyne, že rozdíly $a - b$, $a - c$, $b - c$ nemění své zbytky při dělení čtyřmi. Má-li nakonec platit $a = b = c = 0$, musí být uvedené tři rozdíly už na počátku dělitelné čtyřmi, takže výchozí počty a, b, c musí splňovat podmínku

$$a \equiv b \equiv c \pmod 4. \tag{1}$$

Ukažme, že podmínka (1) je pro splnění kýženého cíle $a = b = c = 0$ i postačující. Zřejmě stačí ukázat, že výchozí čtveřici (a, b, c, d) splňující podmínku (1) lze po několika krocích změnit na čtveřici typu (e, e, e, f), pak už totiž stačí opakovat úpravu $(e, e, e, f) \to (e-1, e-1, e-1, f+3)$.

Mějme tedy čtveřici celých kladných čísel (a, b, c, d) se součtem 101, která splňuje podmínku (1), a předpokládejme, že ještě neplatí $a = b = c$. Ukažme, jak v tomto případě povolenými kroky zvětšit hodnotu d (o 1 nebo 2). Protože vždy $d \leqq 101$, lze takové zvětšení zopakovat jen několikrát, pak již dosáhneme vytčeného cíle.

Proceduru zvětšení d jistě stačí popsat v případě, kdy $a \geqq b \geqq c$ a $a > c$, tedy $a - c \geqq 4$ díky podmínce (1).[6] Poraďme Rumburakovi dvojici kroků

$$(a, b, c, d) \to (a-1, b-1, c+3, d-1) \to (a-2, b-2, c+2, d+2),$$

která zvyšuje hodnotu d o 2. Tuto dvojici kroků nelze provést pouze v případě $b = 1$, kdy ovšem z (1) a nerovnosti $b \geqq c$ plyne rovněž $c = 1$. Na takovou čtveřici $(a, 1, 1, d)$, kde $a \geqq 5$ a $d \geqq 2$ (nemůže být ještě $d = 1$, protože d má odlišnou paritu), použije Rumburak trojici kroků

$$(a, 1, 1, d) \to (a-1, 4, 0, d-1) \to (a-2, 3, 3, d-2) \to (a-3, 2, 2, d+1),$$

která zvyšuje hodnotu d o 1.

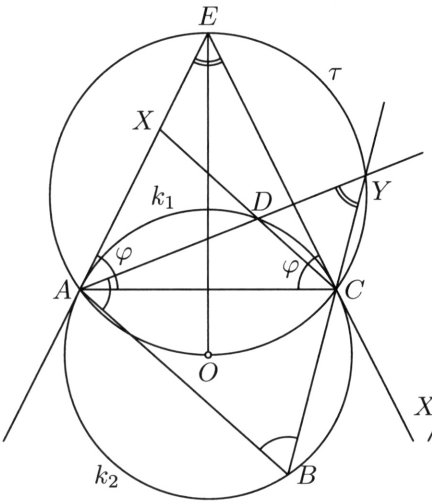
Tvrzení o tvaru všech vyhovujících čtveřic z první věty řešení b) je tak dokázáno.

A – III – 4

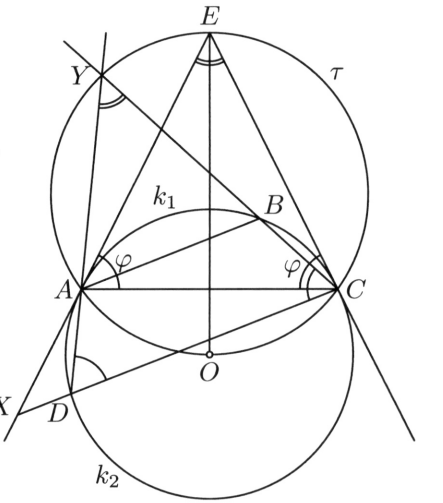
Budeme dále uvažovat jen takové lichoběžníky $ABCD$, ve kterých platí $AB \parallel CD$, u ostatních průsečík (rovnoběžných) přímek BC a AD neexistuje.

Označme O střed kružnice k, E průsečík jejích tečen vedených body A, C (obr. 33). Jak víme, body A, C leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem OE a jsou podle tohoto průměru souměrně sdruženy. Společnou velikost ostrých úhlů při základně AC rovnoramenného trojúhelníku ACE označme φ. Konečně vnitřky kratšího a delšího oblouku AC kružnice k označme k_1, resp. k_2.

[6] Zdůrazněme, že nevylučujeme rovnost $c = 0$. Ke čtveřici s nulovým prvkem nás totiž dovede v další větě popsaná dvojice kroků v případě, kdy $b = 2$.



Obr. 33



Obr. 34

a) Zvolme na tečně AE libovolný bod X, $X \neq A$. Kružnice k zřejmě protne úsečku XC ve vnitřním bodě D, právě když bod X je buď vnitřním bodem úsečky AE, anebo vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce AE. Oba případy (obr. 33 a obr. 34) nyní posoudíme samostatně.

V prvním případě platí $D \in k_1$ a $B \in k_2$, takže podle věty o úsekovém úhlu je úhel ABC roven ostrému úhlu φ. Stejnou velikost má i úhel BAD, protože každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný. Bod Y, průsečík různoběžných polopřímek BC a AD, tedy leží v polorovině ACE. Z rovnoramenných trojúhelníků ABY a ACE proto plyne, že úhly AYC a AEC jsou shodné (mají velikost $\pi - 2\varphi$). Podle věty o obvodovém úhlu leží bod Y na oblouku AEC kružnice τ, přesněji uvnitř kratšího z jejích oblouků CE, neboť polopřímka AD leží v úhlu CAE.

Ve druhém případě je úvaha analogická a zapíšeme ji stručně: $D \in k_2$, $B \in k_1$, $|\sphericalangle ADC| = \varphi = |\sphericalangle BCD|$, průsečík Y různoběžných polopřímek CB a DA leží v polorovině ACE, a protože $|\sphericalangle AYC| = |\sphericalangle AEC|$, leží bod Y na kružnici τ, a to uvnitř jejího kratšího oblouku AE.

b) Ukážeme nyní, že naopak každý vnitřní bod Y kratších oblouků CE a AE kružnice τ je průsečíkem přímek BC a AD některého z uvažovaných lichoběžníků $ABCD$. Opět rozlišíme dva případy podle toho, na kterém z obou oblouků bod Y leží.

Je-li Y vnitřní bod oblouku CE, lze zřejmě sestrojit body $D \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby body A, D, Y resp. B, C, Y ležely v uvedeném pořadí

v přímce. Z $D \in k_1$ plyne existence průsečíku X polopřímky CD s vnitřkem úsečky AE (bod D pak odpovídá bodu X podle konstrukce ze zadání úlohy). Zbývá objasnit, proč $AB \parallel CD$. Protože body O a Y leží na různých obloucích AC kružnice τ a přitom $|AO| = |CO|$, je polopřímka YO osou úhlu AYC, takže přímky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ jsou souměrně sdružené podle přímky YO, která je (triviálně) osou souměrnosti kružnice k, neboť prochází jejím středem. Proto podle této osy musí být souměrně sdruženy i průsečíky obou zmíněných přímek $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicí k, tedy (díky určenému pořadí bodů) jednak body A a B, jednak body D a C. Obě úsečky AB a CD jsou proto kolmé na přímku OY, a jsou tudíž rovnoběžné.

Je-li Y vnitřní bod oblouku AE, sestrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby v přímce ležely body v pořadí D, A, Y, resp. C, B, Y. Polopřímka CD protne přímku AE v potřebném bodě X (protože $D \neq A$, bude jistě $X \neq A$), pokud platí $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD| < \pi$. To ověříme tak, že užijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu v kružnici k, podle které $|\sphericalangle ECD| = \pi - |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAY|$, a protože $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle AYC|$, je součet $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD|$ roven součtu dvou úhlů v trojúhelníku ACY. Ze sdruženosti přímek $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podle osy OY úhlu AYC pak opět plyne požadovaná rovnoběžnost $AB \parallel CD$.

Závěr. Hledanou množinou je sjednocení vnitřků kratších oblouků CE a AE Thaletovy kružnice τ.

A – III – 5

V jednom kroku nahrazujeme dvě čísla a, b jedním přirozeným číslem $\sqrt{ab}$. Protože pro libovolná $a \leqq b$ platí $a \leqq \sqrt{ab} \leqq b$, je zřejmé, že na tabuli budou stále zapsána pouze čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 33\}$. Je-li přitom číslo a prvočíslem nebo součinem několika různých prvočísel, musí tato prvočísla být obsažena i v rozkladu čísla $\sqrt{ab}$, takže $\sqrt{ab} = ka$ neboli $b = k^2 a$ pro některé přirozené k. Je-li $k = 1$, musí být číslo a na tabuli zapsáno vícekrát. Je-li $k \geqq 2$, a tedy $b = k^2 a \geqq 4a$, musí platit $4a \leqq 33$, a proto z $b = k^2 a \in \mathsf{M}$ plyne i $4a \in \mathsf{M}$. Na tabuli tudíž zůstanou až do konce jednak všechna prvočísla, která dělí právě jedno z čísel množiny M, jednak všechna ta $a \in \mathsf{M}$, která jsou součinem několika různých prvočísel a zároveň splňují podmínku $4a > 33$ neboli $a \geqq 9$. V souhrnu jde celkem o 15 nesmazatelných čísel

$$10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33.$$

Ukážeme, že kromě nich bude na tabuli vždy zastoupeno aspoň jedno z čísel množiny $\mathsf{S} = \{6, 12, 18, 24\}$ (na začátku tam jsou všechna). Zvolíme-li v jednom kroku čísla a a b, kde např. $a \in \mathsf{S}$, a nahradíme je číslem $n = \sqrt{ab}$, musí být i číslo n násobkem šesti, který díky odhadům $a \leqq 24$ a $b \leqq 33$ splňuje nerovnost $n \leqq \sqrt{24 \cdot 33} = 6\sqrt{22} < 30$, takže bude platit $n \in \mathsf{S}$. Na tabuli po libovolném počtu kroků tudíž zůstane 15 výše zapsaných čísel a aspoň jedno číslo z S, tedy alespoň 16 čísel, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Počtu 16 čísel na tabuli lze například dosáhnout 17 kroky, popsanými níže tak, že mazaná čísla v každém řádku jsou šedá, zatímco nově vzniklé číslo je připsáno na konci dalšího řádku:

1–6, 7, 8–27, 28, 29–33;
1–6, 8–13, 14, 15–27, 29–33, 14;
1–4, 5, 6, 8–13, 15–19, 20, 21–27, 29–33, 14;
1–3, 4, 6, 8–13, 15–19, 21–24, 25, 26, 27, 29–33, 14, 10;
1–3, 6, 8, 9, 10, 11–13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11–13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11, 13, 15–19, 21–23, 24, 26, 29–33, 14, 10, 18;
1–3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 18, 19, 21–23, 26, 29–33, 14, 10, 18, 12;
1, 2, 3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 19, 21–23, 26, 29–33, 14, 10, 12, 18;
1, 3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 19, 21–23, 26, 29–31, 32, 33, 14, 10, 12, 6;
1, 3, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 32, 33, 14, 10, 12, 6, 16;
1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 12, 6, 16;
3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 12, 6, 4;
9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 4, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 6, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6.

A – III – 6

S ohledem na symetrii stačí uvažovat trojice (a, b, c), ve kterých $a \geqq b \geqq c$. Pro „nejmenší“ z nich $(2, 2, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 3, 3)$ a $(4, 2, 2)$ má daný výraz hodnoty 2, 3/2, 17/8, 7/2, resp. 11/4. Ukážeme-li, že pro všechny ostatní trojice (a, b, c), které již splňují podmínku $a + b + c \geqq 9$, platí nerovnost

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{3}{2},$$

bude to znamenat, že hledaná nejmenší hodnota je rovna 3/2. Vypsanou nerovnost ekvivalentně upravme:

$$(a+b+c)^2 - 2([a,b]+[b,c]+[c,a]) \geqq 3(a+b+c),$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab-[a,b])+2(bc-[b,c])+2(ca-[c,a]) \geqq 3(a+b+c).$$

Protože zřejmě platí $xy \geqq [x,y]$ pro libovolná x, y, zanedbáme nezáporné dvojnásobky v levé straně poslední nerovnosti a dokážeme (silnější) nerovnost

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 3(a+b+c). \tag{1}$$

Z předpokladu $a+b+c \geqq 9$ a Cauchyovy nerovnosti $3(a^2+b^2+c^2) \geqq$ $\geqq (a+b+c)^2$ plyne

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3(a+b+c)\cdot\frac{a+b+c}{9} \geqq 3(a+b+c),$$

a důkaz je hotov.

Poznámky. Místo Cauchyovy nerovnosti jsme mohli přepsat (1) do tvaru

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\left(c-\frac{3}{2}\right)^2 \geqq \frac{27}{4}$$

a tuto nerovnost zdůvodnit umocněním zřejmých nerovností

$$a-\frac{3}{2} \geqq \frac{5}{2}, \quad b-\frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad c-\frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2},$$

neboť uvažujeme už jen trojice, ve kterých $a \geqq 4$, $b \geqq c \geqq 2$.

Postup z řešení vede rovněž k výsledku, že pro libovolná celá čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{a+b+c}{6}.$$