58. ročník matematické olympiády na středních školách

3. středoevropská matematická olympiáda

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011. pp. 173–190.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405182

3. středoevropská matematická olympiáda

Třetí ročník Středoevropské matematické olympiády se uskutečnil 24.–29. září 2009 v polské Poznani za účasti 59 studentů z deseti zemí středoevropského regionu: z České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska.

České družstvo tvořili *Petr Boroš* a *Simona Domesová* z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Miroslav Olšák* z Gymnázia Buďánka v Praze, *Petr Ryšavý* z Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze a *Bohuslav Zmek* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Vedoucím družstva byl Mgr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Vlastní soutěž probíhala v prostorách Fakulty matematiky a informatiky Univerzity Adama Mickiewicze, a to ve dvou dnech: v sobotu 26. září byla na programu soutěž jednotlivců, v neděli 27. září se pak konala soutěž družstev. V soutěži jednotlivců řešili žáci v průběhu pěti hodin čtyři úlohy, v týmové soutěži pak každé národní družstvo mělo stejný čas na řešení osmi úloh. Příklady do soutěže vybírala z návrhů jednotlivých účastnických států mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých národních delegací.

Absolutním vítězem mezi jednotlivci se stal maďarský student *Bertalan Bodor*, který jako jediný vyřešil všechny čtyři úlohy. V týmové soutěži dominovalo družstvo Polska. Česká výprava byla úspěšná, Bohuslav Zmek získal stříbrnou medaili, zbylí členové družstva až na Petra Boroše pak vybojovali medaili bronzovou. V soutěži družstev obsadil český tým pěkné páté místo.

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	Body	Cena
52.–55.	Petr Boroš	0	0	0	1	1	
27.–35.	Simona Domesová	0	0	8	1	9	bronz
36.–39.	Radek Marciňa	0	0	8	0	8	bronz
27.–35.	Miroslav Olšák	0	0	8	1	9	bronz
27.–35.	Petr Ryšavý	0	0	8	1	9	bronz
8.–12.	Bohuslav Zmek	5	1	8	1	15	stříbro
	Celkem	5	1	40	5	51	

Přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO (číslo v závorce označuje menší počet účastníků).

	I	II	III	body
Maďarsko	3	1	2	100
Polsko	2	3	1	86
Německo	1	2	2	75
Chorvátsko	–	2	3	59
Slovinsko (5)	–	2	3	54
Česká republika	–	1	4	51
Slovensko	1	1	–	48
Rakousko	–	1	2	39
Litva	–	–	1	17
Švýcarsko	–	–	1	16

Nejvíc se tak dařilo družstvům z Polska a Maďarska — Polsko vyhrálo soutěž družstev a v soutěži jednotlivců získalo dvě zlaté medaile, Maďarsko bylo v soutěži družstev druhé a v soutěži jednotlivců získalo tři zlaté medaile. Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	7	8	Body
1.	Polsko	8	6	8	8	8	8	6	8	60
2.	Maďarsko	6	5	8	8	8	4	8	8	55
3.	Německo	8	4	8	8	8	8	0	8	52
4.	Chorvatsko	8	5	8	5	8	2	8	8	52
5.	*Česká republika*	8	6	8	8	8	3	1	0	42
6.	Slovinsko	8	2	8	0	8	0	2	8	36
7.–8.	Rakousko	8	3	4	3	2	0	8	6	34
	Slovensko	7	3	8	6	8	0	1	1	34
9.	Švýcarsko	0	2	4	8	8	0	0	8	30
10.	Litva	8	2	4	0	5	0	1	4	24

V pondělí po soutěži studenti navštívili lanové centrum a mnohým z nich zůstane tato atrakce nesmazatelně vryta do paměti. Po této fyzicky náročnější aktivitě následovalo večer slavnostní zakončení soutěže, které proběhlo v historické budově univerzity v centru Poznaně.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\bigl(xf(y)\bigr) + f\bigl(f(x) + f(y)\bigr) = yf(x) + f\bigl(x + f(y)\bigr)$$

pro libovolná reálná x, y. ($\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel.) (*Slovinsko*)

2. Mějme $n \geqq 3$ různých barev. Nechť $f(n)$ je největší přirozené číslo s následující vlastností: každou stranu a každou úhlopříčku konvexního $f(n)$-úhelníku můžeme obarvit jednou z n barev tak, že

- ▷ použijeme aspoň dvě barvy,
- ▷ libovolné tři vrcholy mnohoúhelníku jsou spojeny buď úsečkami stejné barvy, nebo navzájem různých barev.

Dokažte, že $f(n) \leqq (n-1)^2$ a že rovnost v této nerovnosti nastává v nekonečně mnoha případech. (*Slovinsko*)

3. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD, které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD. Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H. Ukažte, že $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle DHG|$. (*Maďarsko*)

4. Určete všechna přirozená $k \geqq 2$ taková, že pro žádnou dvojici (m,n) různých kladných celých čísel, nepřevyšujících k, *není* číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ dělitelné číslem k. (*Švýcarsko*)

Soutěž družstev

5. Nechť reálná čísla x, y, z splňují podmínku $x^2+y^2+z^2+9 = 4(x+y+z)$. Dokažte, že

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27,$$

a určete, kdy nastává rovnost. (*Slovensko*)

6. Nechť a, b, c jsou reálná čísla taková, že pro každé dvě z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

existuje právě jedno reálné číslo, které je jejich společným řešením. Určete všechny možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$. (*Slovensko*)

7. Na tabuli jsou napsána čísla $0, 1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 2$). V každém kroku vymažeme číslo, které je aritmetickým průměrem dvou různých čísel, která ještě na tabuli zůstala. Tyto kroky opakujeme tak dlouho, až už žádné další číslo na tabuli nemůžeme smazat. Buď $g(n)$ nejmenší možný počet čísel, která na tabuli mohou zůstat. Pro každé n určete $g(n)$.

(*Polsko*)

8. Každé políčko hrací desky $2\,009 \times 2\,009$ obarvíme jednou z n barev (nemusíme použít každou z nich). Barvu nazveme *souvislou*, jestliže existuje buď jediné políčko dané barvy, nebo libovolná dvě políčka jsou vzájemně dosažitelná posloupností tahů šachové dámy takových, že každý z nich začíná i končí na políčku dané barvy (šachová dáma se po hrací desce může pohybovat vertikálně, horizontálně a diagonálně). Určete největší n takové, že pro libovolné obarvení bude alespoň jedna barva použitá na hrací desce souvislá. (*Polsko*)

9. Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$ a E označuje průsečík jeho úhlopříček. Kružnice opsaná trojúhelníku ACD protíná přímku BA v bodě $K \neq A$, přímku BD v bodě $P \neq D$ a přímku BC v bodě $L \neq C$. Přímka EP protíná kružnici opsanou trojúhelníku CEL v bodech E a M. Dokažte, že trojúhelníky KLM a CAP jsou shodné.

(*Slovinsko*)

10. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$, v němž $|CD| = |DA|$. Body E a F leží po řadě na úsečkách AB a BC tak, že $|\sphericalangle ADC| = 2|\sphericalangle EDF|$. Úsečka DK je výškou a DM těžnicí trojúhelníku DEF. Nechť L je obraz bodu K ve středové souměrnosti podle bodu M. Dokažte, že přímky DM a BL jsou rovnoběžné. (*Polsko*)

11. Nalezněte všechny dvojice (m, n) celých čísel, které splňují rovnici

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

(*Chorvatsko*)

12. Najděte všechna řešení rovnice

$$2^x + 2\,009 = 3^y 5^z$$

v množině nezáporných celých čísel. (*Litva*)

Řešení úloh

1. Konstantní funkce $f(x) = 0$ zřejmě vyhovuje. Předpokládejme dále, že existuje $a \in \mathbb{R}$, pro něž $f(a) \neq 0$. Dokážeme, že funkce f je pak prostá.

Nechť $f(y_1) = f(y_2)$ pro nějaká $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Postupným dosazením $y = y_1$, $y = y_2$ do dané rovnice a odečtením vzniklých rovností dostaneme $y_1 f(x) = y_2 f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Po dosazení $x = a$ můžeme nenulové $f(a)$ vykrátit, takže $y_1 = y_2$ a f je vskutku prostá.

Dosazením $x = 0$, $y = 1$ do dané rovnice získáme

$$f(0) + f\big(f(0) + f(1)\big) = f(0) + f\big(f(1)\big),$$

tedy $f\big(f(0) + f(1)\big) = f\big(f(1)\big)$ a vzhledem k prostotě f odtud plyne $f(0) + f(1) = f(1)$ neboli $f(0) = 0$.

Volbou $y = 0$ následně z dané rovnice dostaneme $f\big(f(x)\big) = f(x)$, odkud opět díky prostotě funkce f plyne $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. I tato funkce vyhovuje, o čemž se dosazením snadno přesvědčíme.

Jedinými řešeními jsou tedy funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

2. Uvažujme mnohoúhelník, jehož všechny strany i úhlopříčky jsou obarveny popsaným způsobem, můžeme ho tedy považovat za úplný graf. Jeho hrany jsou obarveny n barvami tak, že každý trojúhelník (neboli úplný podgraf s třemi vrcholy, tzv. 3-klika) je buď jednobarevný, anebo trojbarevný. Navíc celý graf není jednobarevný.

Uvedená podmínka pro trojúhelníky je vlastně ekvivalentní s následující podmínkou: Všechny hrany grafu lze rozdělit do několika (alespoň dvou) jednobarevných klik (úplných podgrafů), přičemž kliky téže barvy jsou vrcholově disjunktní (za kliku považujeme i podgraf tvořený dvěma vrcholy neboli jedinou hranou). Otázkou už zůstává jen to, jak velké takové kliky mohou být a kolik nejvíce jich bude jedné barvy.

Kdyby některá z těchto jednobarevných klik (řekněme modrá) měla aspoň n vrcholů, musel by mimo ni existovat vrchol v, který by byl s každým vrcholem modré kliky spojen jinou než modrou barvou, což však není možné, protože kromě modré barvy máme k dispozici už jen $n - 1$ barev. Proto každá jednobarevná klika má nejvýše $n - 1$ vrcholů.

Jeden vrchol leží nejvýše v n různých klikách (různé barvy) a každá z nich má nejvýše $n - 2$ dalších vrcholů. Tento vrchol má tedy nejvýše $n(n-2)$ sousedů. Graf má tudíž nejvýše $f(n) \leqq n(n-2) + 1 = (n-1)^2$ vrcholů.

V druhé části řešení najdeme požadované obarvení hran úplného grafu s $(n-1)^2$ vrcholy n barvami pro nějaké vhodné n.

Z našeho odvození odhadů pro $f(n)$ plyne, že v hledaném „maximálním" případě bude každý vrchol právě v n klikách (všech) různých barev, každá klika bude mít $n-1$ vrcholů a od každé barvy jich bude právě $n-1$. Odtud plyne, že každé dvě kliky různých barev budou muset mít společný vrchol (kupř. každý vrchol dané modré kliky je v jiné žluté klice, takže to jsou v souhrnu všechny žluté kliky). Budeme-li proto chápat jednobarevné kliky jako „přímky" o $n-1$ bodech (příslušných vrcholech grafu), pak každé dvě z těchto „přímek" budou mít vzájemnou polohu jako rovnoběžky či různoběžky v rovině — podle toho, zda půjde o kliky stejné barvy či dvou různých barev.

Nabízí se tak možnost umístit všechny body jedné kliky na přímku jedné barvy. Body kliky jiné barvy budou na přímce nejen jiné barvy, ale i jiného směru tak, aby průsečík těchto dvou přímek představoval společný vrchol obou klik. Dvě kliky téže barvy pak můžeme reprezentovat rovnoběžkami.

Protože vrcholů je dohromady $(n-1)^2$, zkusíme je rozmístit do čtverce (vrcholy grafu tak budou všechny body s celočíselnými souřadnicemi (i,j), kde $i,j \in \mathsf{M}_n = \{0,1,\ldots,n-2\}$) a pospojovat přímkami různých směrů. Na každé přímce by mělo ležet právě $n-1$ vrcholů grafu. Takových ideálních přímek sice moc nenajdeme, ale pomůžeme si tím, že budeme s mřížovými body počítat modulo $(n-1)$.

Nejprve vrcholy pospojujeme $n-1$ svislými přímkami první barvy a dále $n-1$ vodorovnými přímkami druhé barvy. Mezi přímky třetí barvy zařadíme hlavní úhlopříčku s body (k,k) $(k \in \mathsf{M}_n)$ a dále přímky s ní rovnoběžné, tj. $(n-1)$-tice bodů $(a+k \pmod{n-1}), k)$ $(k \in \mathsf{M}_n)$, kde a postupně volíme z množiny $\mathsf{M}_n \setminus \{0\}$ (pro $a=0$ dostáváme ovšem hlavní úhlopříčku). To jsou vlastně všechny „přímky" se směrnicí 1, které jakmile „vyběhnou" vpravo ze čtverce ve výšce k, vrátí se zleva do čtverce pod stejným úhlem ve výšce $k+1$.

Podobně budeme postupovat i dále: kliky další barvy budou tvořit $(n-1)$-tice vrcholů všech $n-1$ rovnoběžných přímek se směrnicí 2 vycházejících postupně z vrcholů $(0,0),(0,1),\ldots,(0,n-2)$ (princip kongruence teď uplatníme nejen vodorovně, ale i vertikálně, tedy na obě souřadnice): na každé z uvedených přímek pak budou ležet vrcholy se souřadnicemi $(a+k, 2k) \pmod{n-1}$, kde $k \in \mathsf{M}_n$, $a \in \mathsf{M}_n$. Stejný postup zopakujeme i pro další směrnice $\lambda \in \{3,4,\ldots,n-2\}$; jednotlivé přímky budou obsahovat vrcholy se souřadnicemi $(a+k, \lambda k)$ $\pmod{n-1}$.

Popsanou konstrukcí jsme získali $n(n-1)$ přímek n různých směrů.

Přitom jsme v každé klice („přímce“) obarvili $\binom{n-1}{2}$ hran, celkem tedy

$$n(n-1)\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)^2(n-2)}{2} = \binom{(n-1)^2}{2}$$

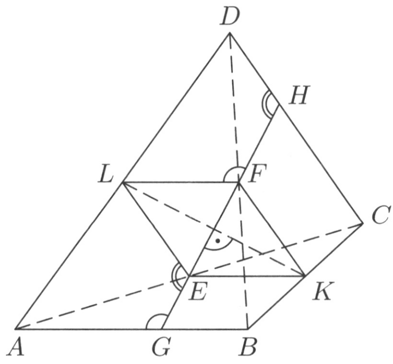
hran. To však je přesně počet hran úplného grafu s $(n-1)^2$ vrcholy.

Zbývá už jen zvolit n tak, aby průnikem dvou klik různé barvy byl právě jeden vrchol. K tomu stačí, aby $p = n - 1$ bylo prvočíslo, neboť pak má kongruence

$$(a+k, \lambda k) \equiv (b+l, \mu l) \pmod p \quad \text{resp.} \quad (a, k) \equiv (b+l, \mu l) \pmod p$$

pro daná čísla $a, b, \lambda, \mu \in \mathsf{M}_n$ právě jedno řešení. A protože prvočísel je nekonečně mnoho, našli jsme nekonečně mnoho různých n, pro něž $f(n) = (n-1)^2$. Tím je úloha vyřešena.

3. Označme K, L středy stran BC, DA. Z vlastností středních příček trojúhelníků ABC, ABD plyne $EK \parallel AB \parallel LF$, přičemž $|EK| = |LF| = \frac{1}{2}|AB|$ (obr. 72). Podobně platí $FK \parallel CD \parallel LE$, přičemž $|FK| = |LE| = \frac{1}{2}|CD|$. A protože $|AB| = |CD|$, je $EKFL$ kosočtverec nebo čtverec. To ovšem znamená, že trojúhelník FEK je rovnoramenný

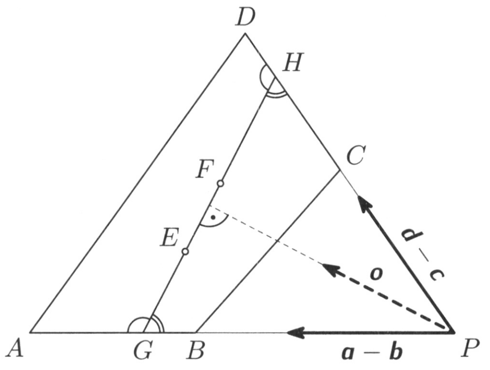


Obr. 72

(se základnou FE), přičemž z rovnoběžnosti příček v uvedených trojúhelnících plyne

$$|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle LFH| = |\sphericalangle LEG| = |\sphericalangle DHG|.$$

Jiné řešení. Za počátek soustavy souřadnic zvolme průsečík P přímek AB a CD (obr. 73). Polohové vektory bodů A, B, C, D označme postupně



Obr. 73

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Potom směrové vektory přímek AB, CD jsou $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$, a protože podle zadání mají stejnou velikost, směrový vektor osy úhlu mezi nimi je

$$\boldsymbol{o}=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})}{2}.$$

Středy E, F úhlopříček AC, BD mají polohové vektory $\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{f}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$. Z rovnosti $|AB|=|CD|$ plyne

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})^2=\big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})\big)\cdot\big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})\big)=\\&=4\Big(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{2}-\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}}{2}\Big)\cdot\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})}{2}=4(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{o}\end{aligned}$$

(všechna uvedená násobení a druhé mocniny vektorů jsou *skalární* součiny). Osa úhlu sevřeného přímkami AB a CD je tedy kolmá na přímku EF, takže trojúhelník GHP je rovnoramenný se základnou GH. Protože body A a D leží v téže polorovině určené přímkou GH, jsou úhly AGH a DHG shodné (buď jsou oba vnitřními úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku, anebo jsou jejich doplňky do 180°).

4. Podmínka v zadání je ekvivalentní s prostotou funkce

$$f(m)=m^{m-1}\bmod k$$

v oboru zbytkových tříd při dělení číslem k.

Pro $k=2$ a $k=3$ snadno zjistíme, že odpovídající funkce f prostá je.

Protože pro každé k pro příslušnou funkci f platí $f(1) = 1$ a $f(k) = 0$, je pro libovolné sudé $k > 2$

$$f(k-1) \equiv (k-1)^{k-2} \equiv (-1)^{k-2} \equiv 1 = f(1) \pmod{k},$$

takže funkce f pro taková k prostá není.

Jestliže se v rozkladu čísla k na prvočinitele vyskytuje liché prvočíslo p aspoň v druhé mocnině, je $q = k/p \geqq p \geqq 3$, a tudíž

$$f\Big(\frac{k}{p}\Big) \equiv \Big(\frac{k}{p}\Big)^{q-1} = k \cdot \frac{k}{p^2} \cdot \Big(\frac{k}{p}\Big)^{q-3} \equiv 0 = f(k) \pmod{k}.$$

Zbývá tedy vyšetřit lichá čísla $k > 4$, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného prvočísla. Všechny hodnoty

$$f(k),\ f(k-2),\ \ldots,\ f(3),\ f(1)$$

jsou zbytky druhých mocnin přirozeného čísla při dělení číslem k, tzv. kvadratické zbytky. Kromě nich je kvadratickým zbytkem modulo k i $f(4) \equiv 4^3 = 8^2 \pmod{k}$. Našli jsme tak celkem $\frac{1}{2}(k+1) + 1$ kvadratických zbytků, ale různých kvadratických zbytků je nejvýše $\frac{1}{2}(k+1)$, neboť $a^2 \equiv (k-a)^2 \pmod{k}$. Aspoň dvě ze zmíněných hodnot funkce f musejí být proto stejné, takže ani pro taková k nemůže být funkce f prostá.

Úloze vyhovují jedině $k = 2$ a $k = 3$.

5. Danou podmínku můžeme přepsat do tvaru

$$x(x-4) + y(y-4) + z(z-4) = -9$$

a zkoumanou nerovnost zase na nápadně podobný tvar

$$x^2(x-4)^2 + y^2(y-4)^2 + z^2(z-4)^2 \geqq 27.$$

Poslední nerovnost dostaneme z Cauchyovy nerovnosti $(a+b+c)^2 \leqq$ $\leqq 3(a^2+b^2+c^2)$ pro hodnoty $a = x(x-4)$, $b = y(y-4)$, $c = z(z-4)$. Rovnost v Cauchyově nerovnosti nastane, právě když

$$x(x-4) = y(y-4) = z(z-4),$$

což vzhledem k dané podmínce vede na rovnosti $(x-2)^2 = (y-2)^2 =$ $= (z-2)^2 = 1$. Řešením této soustavy je 8 uspořádaných trojic $(1,1,1)$, $(1,1,3)$, $(1,3,1)$, $(3,1,1)$, $(1,3,3)$, $(3,1,3)$, $(3,3,1)$, $(3,3,3)$.

Jiné řešení. S využitím podmínky

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z) \tag{1}$$

můžeme danou nerovnost ekvivalentně upravit na tvar

$$(x - 2)^4 + (y - 2)^4 + (z - 2)^4 \geqq 3, \tag{2}$$

zatímco samotnou podmínku (1) přepíšeme na

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 3.$$

Vidíme tedy, že nerovnost (2) opět plyne z Cauchyovy nerovnosti $(a + b + c)^2 \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, tentokrát pro hodnoty $a = (x - 2)^2$, $b = (y-2)^2$, $c = (z-2)^2$. Rovnost zřejmě nastane, právě když $(x-2)^2 = (y - 2)^2 = (z - 2)^2 = 1$, což je stejná podmínka jako v prvním řešení.

6. Vyšetříme dva případy.

Pokud mají všechny tři rovnice jeden společný kořen x_1, je

$$x_1^2 + ax_1 + b = 0, \tag{1}$$

$$x_1^2 + bx_1 + c = 0, \tag{2}$$

$$x_1^2 + cx_1 + a = 0. \tag{3}$$

Kombinací rovností $(3) - (2) + x_1\big((1) - (3)\big)$ a následnou úpravou dostaneme

$$(a - c)(x_1^2 - x_1 + 1) = 0.$$

Odtud vzhledem k nenulovosti kvadratického trojčlenu $x_1^2 - x_1 + 1$ (má záporný diskriminant) plyne $a = c$. Cyklickou záměnou dostaneme $c = b = a$ a jedinou kvadratickou rovnici $x^2 + ax + a = 0$, která s ohledem na zadání musí mít dvojnásobný kořen. Pro její diskriminant tak platí $a^2 - 4a = a(a - 4) = 0$, proto je $a = b = c = 0$ nebo $a = b = c = 4$. Pro výraz $a^2 + b^2 + c^2$ tudíž dostáváme dvě možné hodnoty: 0 a 48.

Druhý případ, kdy první rovnice má kořeny x_1, x_2, druhá x_2, x_3 a třetí x_1, x_3 (přičemž všechny tři kořeny jsou navzájem různé, jinak bychom měli předchozí případ) je o poznání komplikovanější.

Budeme zkoumat koeficienty mnohočlenu

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + c)(x^2 + cx + a), \tag{4}$$

o němž víme, že má tři dvojnásobné kořeny x_1, x_2, x_3, a tedy tvar

$$(x^3 - px^2 + qx - r)^2. \tag{5}$$

Z Viètových vztahů pro původní mnohočleny navíc plyne

$$2p = 2(x_1 + x_2 + x_3) = -(a+b+c) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -q. \tag{6}$$

Jestliže označíme $a + b + c = e$, $ab + bc + ca = f$, $abc = g$, dostaneme roznásobením totožných mnohočlenů (4) a (5) a porovnáním jejich koeficientů při mocninách x^5, x^4, x^3 a x^0 postupně

$$e = -2p, \quad e + f = p^2 - 4p, \quad e^2 - f + g = 4p^2 - 2r, \quad g = r^2. \tag{7}$$

Koeficienty při x^2 a x sice nejsou symetrické v proměnných a, b, c (a nedají se tedy vyjádřit pomocí e, f, g), ale jejich součet symetrický je, proto jejich porovnáním po úpravě dostaneme

$$f + ef - 3g = 4p^2 + 6pr. \tag{8}$$

Spojením (6), (7) a (8) dostáváme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých p, q, r, e, f, g. Můžeme ji řešit různými způsoby. Například dosazením prvních dvou vztahů $q = -2p$ a $e = -2p$ do třetí rovnice dostaneme $f = p^2 - 2p$. Spolu s pátou rovnicí $g = r^2$ teď můžeme za neznámé q, e, f, g dosadit do čtvrté a šesté rovnice výrazy obsahující jen neznámé p a r. Po úpravě dostaneme dvě rovnice

$$(r + p)(r - p + 2) = 0, \qquad 2p^3 - p^2 + 2p(3r + 1) + 3r^2 = 0.$$

Nyní stačí vyjádřit r z první rovnice a dosadit do druhé. Pro $r = -p$ tak dostaneme rovnici $p(p-1)^2 = 0$, pro $r = p-2$ rovnici $(p+6)(p-1)^2 = 0$.

Pokud by bylo $p \neq 1$, dostaneme v prvním případě $p = 0$ a také $q = r = 0$, což v (5) vede na mnohočlen x^6, který zřejmě nevyhovuje. Podobně pro $p = -6$ vyjde $r = -8$, $q = 12$, takže v (5) dostaneme mnohočlen $(x + 2)^6$, který rovněž nevyhovuje. Zbývá tudíž poslední možnost $p = 1$, odkud $q = -2$, $r = -1$, a mnohočlen v (5) má tvar

$$(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2. \tag{9}$$

Snadno nahlédneme, že mnohočlen $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ opravdu má tři různé reálné kořeny, protože $p(-2) < 0$, $p(-1) > 0$, $p(0) > 0$,

$p(1) < 0$, $p(2) > 0$. Už jen dopočítáme $e = -2$, $f = -1$, $g = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - 2f = 6$.

Odpověď. Uvedený výraz může nabývat hodnot 0, 6 a 48.

Poznámka. Pro úplné řešení bychom měli ještě ověřit, že k trojici kořenů (x_1, x_2, x_3) mnohočlenu (9) skutečně přísluší tři kvadratické rovnice s koeficienty jako v zadání. Jednou z možností, jak to udělat, je ukázat, že příslušné koeficienty a, b, c (které jsou podle Viètových vztahů kořeny mnohočlenu $x^3 - ex^2 + fx - g$) po dosazení do (4) dají mnohočlen identický s (5). Protože koeficient při x^6 je zřejmě stejný a rovnost koeficientů při x^5, x^4, x^3, x^0 plyne z toho, že p, q, r, e, f, g splňují (7), stačí ukázat rovnost koeficientů při x^2 a x. Na základě rovnosti (8) však víme, že součet koeficientů při x^2 a x je stejný.

7. Krajní hodnoty 0 a n zřejmě nesmažeme nikdy. Kromě toho snadno ověříme, že

$$g(1) = g(2) = 2, \qquad g(3) = 3, \qquad g(4) = 2.$$

Technika mazání použitá pro $n = 4$ se dá snadno rozšířit na všechna n tvaru $n = 2^a$ (stručně řečeno, nejprve smažeme všechna lichá čísla jako aritmetický průměr dvou sousedních sudých čísel, zbylá sudá čísla si představíme jako dvojnásobky čísel od 1 do 2^{a-1} a smažeme všechny dvojnásobky lichých čísel atd.), proto je $g(2^a) = 2$ pro všechna přirozená čísla a.

Mějme nyní n, které není mocninou dvou, takže $2^a < n < 2^{a+1}$ pro nějaké přirozené a. Představme si, že i v tomto případě nakonec zůstala na tabuli jen dvě čísla (nepochybně 0 a n). Při zpětné rekonstrukci (přidáváme aritmetický průměr některých dvou čísel, která na tabuli zůstala) dokážeme přidat vždy jen čísla tvaru $tn/2^k$, kde t a $k \geqq 1$ jsou přirozená čísla. Takto však nikdy nevznikne číslo 1, protože není-li číslo n mocninou dvou, nemůže jí být ani žádný jeho násobek. To je spor.

Naopak pro libovolné takové n dokážeme postupně smazat čísla $n - 1$, $n - 2, \ldots, 2^a + 1$ (číslo $n - i$ je aritmetickým průměrem čísel n a $n - 2i$; pokud $n = 2^a + 1$, mažeme pochopitelně prázdnou množinu), načež už popsaným způsobem smažeme všechna čísla mezi 0 a 2^a. Na tabuli tak zůstanou jen tři čísla 0, 2^a, n. Proto není-li n mocninou dvojky, je $g(n) = 3$.

8. Ukážeme příklad obarvení desky $k \times k$ (pro liché $k \geqq 5$) třemi nesouvislými barvami 1, 2 a 3.

Nejprve obarvíme políčko $(2, k)$ barvou 1 a políčko $(3, 1)$ barvou 2. Na desce zřejmě existují právě čtyři políčka $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, k - 1)$ a $(3, k)$, která jsou dosažitelná tahem dámy z obou zvolených polí zároveň (stačí si uvědomit, že při běžném černobílém obarvení polí mají při lichém k obě zvolená pole různou barvu). Uvedená čtyři políčka tedy obarvíme třetí barvou, zatímco všechna ostatní políčka dosažitelná dámou z $(2, k)$ dostanou barvu 2 a naopak políčka dosažitelná dámou z $(3, 1)$ barvu 1. Tím jsme obarvili všechna políčka dosažitelná jedním tahem dámy z políček $(2, k)$ nebo $(3, 1)$, přičemž ani jedna ze tří barev není souvislá. (Následující tabulka znázorňuje popsanou situaci pro $k = 9$.)

2	**1**	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3						
	2	1	2					1
	2	1		2			1	
	2	1			2	1		
	2	1			1	2		
1	2	1		1			2	
	3	1	1					2
1	3	**2**	1	1	1	1	1	1

Obarvíme-li dosud neobarvená políčka desky libovolně barvami 1 a 2, zůstanou políčka $(2, k)$ a $(3, 1)$ izolována od ostatních políček své barvy.

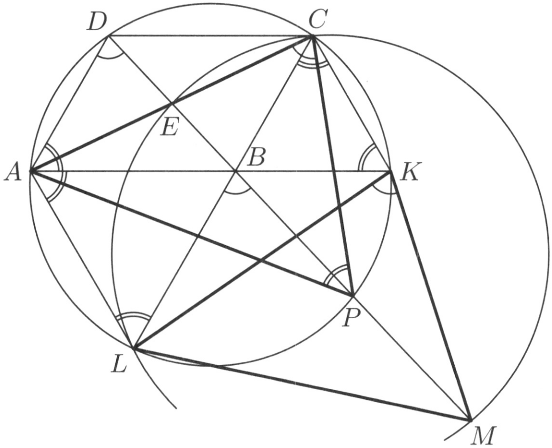
Dokážeme nyní, že při libovolném obarvení libovolné desky $k \times m$ dvěma barvami bude jedna z barev souvislá. Případy $k = 1$ nebo $m = 1$ jsou jistě triviální. Budeme proto předpokládat, že $k \geqq m \geqq 2$. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k součtu $k + m$.

Předpokládejme, že uvedené tvrzení platí pro libovolnou desku $k' \times m'$ splňující $k' + m' < k + m$. Uvažujme libovolné obarvení desky S s rozměry $k \times m$ dvěma barvami, např. červenou a modrou, a označme S_1, S_2, resp. S_3 desky, které dostaneme z S odstraněním prvního sloupce, posledního sloupce, resp. posledního řádku. Podle indukčního předpokladu je na každé ze tří desek S_1, S_2, S_3 aspoň jedna ze dvou barev souvislá. Nechť S_i, S_j jsou ty dvě z nich, jež mají souvislou stejnou barvu, např. červenou, a označme dále $A_0 = S_i \cap S_j$, $A_1 = S_j \setminus S_i$ a $A_2 = S_i \setminus S_j$.

Pokud je deska A_0 už jednobarevná, je zřejmě její barva souvislá i na celé desce S. Předpokládejme tedy, že v A_0 existuje červené políčko. V takovém případě je ovšem červená barva souvislá v množině $S_i \cup S_j$. Připomeňme, že $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cup S_3 = S \setminus \{(1, m)\}$, $S_2 \cup S_3 = S \setminus \{(k, m)\}$. Pokud $\{i, j\} = \{1, 2\}$, jsme hotovi. Pokud např. $\{i, j\} = \{1, 3\}$ (obě zbylé možnosti jsou zřejmě symetrické), nebude červená barva souvislá v celé S, jedině když políčko $(1, m)$ bude červené a všechna políčka v $A_1 \cup A_2 \subset \subset S_i \cup S_j$ naopak budou modrá. Pak je ovšem modrá barva souvislá v S. Tím je důkaz indukčního kroku hotov.

Odpověď. Hledané největší číslo je $n = 2$.

9. Protože $AK \parallel CD$, je $AKCD$ rovnoramenný lichoběžník, takže trojúhelník BKC je rovnostranný (obr. 74). Podobně je rovnostranný i trojúhelník BLA. Oba trojúhelníky jsou tak souměrné podle osy úhlu CBK, odkud plyne rovnost $|AC| = |LK|$. Zároveň z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou AC máme $|\sphericalangle APC| = 60°$.



Obr. 74

Bod B leží na chordále obou kružnic, proto platí

$$|AB| \cdot |BK| = |DB| \cdot |BP| = |LB| \cdot |BC| = |EB| \cdot |BM|.$$

Uvažujme proto zobrazení $\varkappa$, které vznikne složením kruhové inverze podle kružnice se středem B a poloměrem $\sqrt{|LB| \cdot |BC|}$ a středové souměrnosti s týmž středem B. V tomto zobrazení si vzájemně odpovídají dvojice bodů A, K, C, L, D, P a E, M.

Jednou z vlastností kruhové inverze je, že přímku neprocházející středem inverze zobrazí na kružnici středem inverze procházející (stejnou vlastnost zřejmě má i složené zobrazení $\varkappa$). Z toho plyne, že obrazem přímky obsahující body A, E, C v zobrazení $\varkappa$ je kružnice opsaná trojúhelníku LMK a procházející bodem B, tudíž čtyřúhelník $BLMK$ je tětivový. Proto

$$|\sphericalangle KML| = 180^\circ - |\sphericalangle KBL| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = |\sphericalangle APC|$$

a navíc (obr. 74)

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle LBM| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle ACP|.$$

Trojúhelníky APC, LMK jsou tedy podobné, a protože (jak jsme už ukázali) $|AC| = |LK|$, jsou i shodné. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

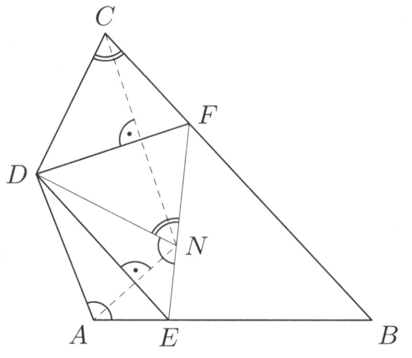
10. Jestliže N je obraz bodu A v osové souměrnosti podle DE (obr. 75), potom

$$\begin{aligned}|\sphericalangle CDN| &= |\sphericalangle CDA| - |\sphericalangle ADN| = \\ &= 2|\sphericalangle EDF| - 2|\sphericalangle EDN| = 2|\sphericalangle FDN|\end{aligned}$$

a $|ND| = |AD| = |CD|$. Bod N je tudíž zároveň obrazem bodu C v osové souměrnosti podle DF. Ze shodnosti dvojic trojúhelníků ADE, NDE a CDF, NDF, jež si v uvedených osových souměrnostech vzájemně odpovídají, plyne

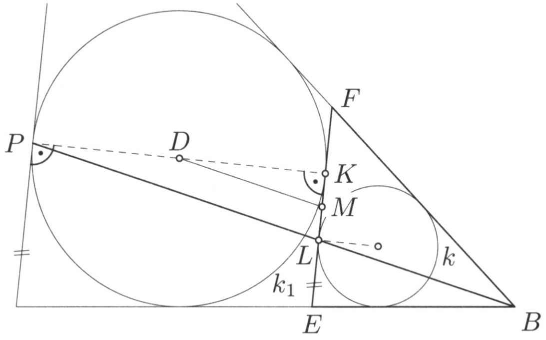
$$|\sphericalangle END| + |\sphericalangle DNF| = |\sphericalangle EAD| + |\sphericalangle DCF| = 180^\circ,$$

proto bod N leží na úsečce EF.



Obr. 75

Uvědomme si ještě, že přímka EF je v souměrnosti podle DE obrazem přímky AB a v souměrnosti podle DF obrazem přímky BC. Bod D má proto od uvedených tří přímek stejnou vzdálenost, a je tedy středem kružnice k_1 připsané straně EF trojúhelníku BEF (obr. 76), a bod K je tudíž bodem dotyku připsané kružnice se stranou EF.



Obr. 76

Jak známo, body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdruženy podle středu příslušné strany trojúhelníku, proto je bod L bodem dotyku kružnice k vepsané trojúhelníku BEF.

Označme P obraz bodu L ve stejnolehlosti se středem v bodě B, která převádí kružnici k vepsanou trojúhelníku BEF na připsanou kružnici k_1. Pak je zřejmě PK průměrem kružnice k_1 a DM střední příčkou trojúhelníku PLK. Tím je rovnoběžnost přímek DM a BL dokázána.

11. Jestliže je dvojice (m, n) řešením, jsou řešením i symetrické dvojice (n, m), $(-m, -n)$ a $(-n, -m)$. Pro $n = 0$ dostaneme rovnici $m^4 = m^2$ s řešeními $m \in \{-1, 0, 1\}$. Ze symetrie tak plyne, že řešením dané rovnice je pět dvojic

$$(n, m) \in \{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 0)\}.$$

Uvědomme si, že pro kladná m i n je levá strana řádově větší než strana pravá. V takovém případě, jak hned ukážeme, žádné řešení neexistuje:

Bez újmy na obecnosti nechť $0 < n \leqq m$. Z dané rovnice ovšem plyne

$$(m+1)^4 \leqq (m+n)^4 = m^2n^2 + (m+n)^2 + 4mn \leqq m^4 + 8m^2,$$
$$4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \leqq 8m^2,$$
$$2m^2(2m-1) + 4m + 1 \leqq 0,$$

což zřejmě nemůže platit pro žádné přirozené číslo m. Řešením tedy není žádná dvojice kladných čísel (a ze symetrie) ani žádná dvojice záporných čísel.

Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že $n = -k$ je záporné a $0 < k \leqq m$. Z dané rovnice pak máme

$$\begin{aligned}(m-k)^4 - m^2k^2 &= m^2 + k^2 - 6mk,\\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2) &= m^2 - 6mk + k^2,\\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2 - 1) &= -5mk\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$m^2 - mk + k^2 \mid 5mk.$$

Označme $d = (m, k)$ největší společný dělitel čísel m a k a nechť $k = da$, $m = db$, kde a, b jsou dvě kladná nesoudělná čísla. Je tedy

$$b^2 - ba + a^2 \mid 5ba.$$

Zároveň je však zřejmé, že číslo $b^2 - ba + a^2$ je nesoudělné jak s a, tak s b, proto je nesoudělné i se součinem ab obou nesoudělných čísel. Pro kladné číslo $b^2 - ba + a^2$ tak máme jen dvě možné hodnoty: 1 nebo 5.

Jestliže $b^2 - ba + a^2 = 1$, má odpovídající kvadratická rovnice s neznámou a diskriminant $4 - 3b^2$, který je čtvercem přirozeného čísla jedině pro $b = 1$, takže $a = 1$ a $n = -m$. Dosazením do dané rovnice získáme další dvě řešení

$$(n, m) \in \{(2, -2), (-2, 2)\}.$$

Jestliže $b^2 - ba + a^2 = 5$, příslušný diskriminant $20 - 3b^2$ není čtvercem přirozeného čísla nikdy. Daná rovnice tedy nemá žádná další celočíselná řešení.

12. Snadno nahlédneme, že musí být $x \geqq 2$ a $y + z \geqq 1$. Uvažujme danou rovnici modulo 4, dostaneme tak $1 \equiv (-1)^y \pmod 4$, proto y musí být sudé. Pokud je $y > 0$, je $(-1)^x + 2 \equiv 0 \pmod 3$, takže x musí být sudé. Podobně je-li $z > 0$, máme $2^x - 1 \equiv 0 \pmod 5$, což pro x znamená dělitelnost čtyřmi. Ovšem aspoň jedno z čísel y, z je kladné, proto x musí být v každém případě sudé.

Nechť $x = 2t$ a $y = 2u$. Protože $2\,009 = 7^2 \cdot 41$, je

$$2^x + 2\,009 \equiv 2^x \in \{1, 2, 4\} \pmod 7,$$

zatímco pro liché z platí

$$3^y 5^z \equiv 9^u (-2)^z \in \{3, 5, 6\} \pmod 7.$$

Proto musí být i z sudé, $z = 2v$. Rovnici nyní můžeme přepsat do tvaru

$$7^2 \cdot 41 = 2\,009 = (3^u 5^v - 2^t)(3^u 5^v + 2^t).$$

Zřejmě existuje jen jedna dvojice čísel, jejichž součin je 2 009 a rozdíl je mocninou dvou: 41 a 49. Odtud plyne, že daná rovnice má v oboru nezáporných celých čísel jediné řešení

$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2.$$