# 58. ročník matematické olympiády na středních školách

---

## 50. mezinárodní matematická olympiáda

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011. pp. 156–172.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405181

# 50. mezinárodní matematická olympiáda

Jubilejní 50. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil 10.–22. července 2009 v německém hansovním městě Brémy. Poprvé počet zemí, které se zúčastnily této nejstarší mezinárodní předmětové soutěže, překročil stovku. Padl zde také nový rekord v počtu soutěžících — celkově se 50. ročníku MMO zúčastnilo 565 soutěžících ze 104 zemí (předchozí 49. MMO ve Španělsku se zúčastnilo 535 soutěžících z 97 zemí). Nechyběli zde žádní tradiční účastníci a poprvé se soutěže zúčastnila družstva Mauretánie, Zimbabwe, Sýrie a Beninu.

České družstvo tvořili v abecedním pořadí tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše, *Jan Matějka* z Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ul., *Josef Ondřej* z Gymnázia v Rožnově pod Radhoštěm, *Samuel Říha* z Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše, *Josef Tkadlec* z Gymnázia Jana Keplera v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z Gymnázia Ladislava Jaroše v Holešově. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vedoucí jednotlivých delegací a další členové jury se sjeli do Německa již 10. července. Ihned po svém příjezdu do Brém byli všichni odvezeni autobusy do přístavního města Bremerhaven, které je od Brém vzdáleno zhruba 60 km. V hotelu Atlantic, kde byli ubytováni, se konala i všechna jednání jury. Zde byla také vybrána šestice úloh pro vlastní soutěž. Soutěžící přicestovali do Brém 13. července a byli po celou dobu ubytováni v rozsáhlém, modernizovaném kampusu Jacobs Univerzity v Brémách.

Slavnostní zahájení 50. ročníku MMO se uskutečnilo den po příjezdu všech soutěžících do Brém. V jeho úvodu pozdravila všechny přítomné z předtočeného videozáznamu kancléřka Spolkové republiky Německo *Angela Merkelová.* Osobně všechny účastníky přivítal parlamentní státní sekretář ministerstva školství, vědy a výzkumu SRN *Andreas Storm* a další významní představitelé společenského a politického života Německa včetně zástupců města Brémy.

Vlastní soutěž se konala 15. a 16. července ve velkém pavilónu výstaviště v Brémách. Pro následující dva dny připravili organizátoři pro soutěžící dva autokarové zájezdy. První do nedalekého Hamburku, kde navštívili atraktivní výstavu významných architektonických zmenšenin (Miniatur Wunderland), Následující den pak soutěžící navštívili Universum v Brémách. Po oba tyto dny probíhala zároveň v objektech Jacobs Univerzity koordinace žákovských řešení.

U příležitosti 50. ročníku MMO uspořádali organizátoři slavnostní podvečer, který se konal v brémském Divadle hudby. Slavnostní program moderovala dvojice významných současných německých matematiků *Martin Aigner* a *Günter M. Ziegler* a vystoupila v něm se svými příspěvky šestice významných světových matematiků, kteří v minulosti získali zlaté medaile na mezinárodní matematické olympiádě: *Terence Tao*, *Béla Bollobás*, *Timothy Gowers*, *Stanislav Smirnov*, *Jean-Christophe Yocozz* a *László Lovász*, který je v současnosti předsedou Mezinárodní matematické společnosti a byl protagonistou celého podvečera. Účastníci se od nich nejen dozvěděli mnoho zajímavého o jejich vědecké práci, ale měli navíc i ojedinělou příležitost si s nimi pohovořit.

Závěrečný den olympiády se již tradičně konalo slavnostní zakončení spojené s oficiálním předáním medailí nejlepším soutěžícím. Všechny přítomné přivítala v hudební síni brémské Komorní filharmonie (die Glocke) ministryně školství, vědy a výzkumu SRN Prof. Dr. *Anette Schavanová.* Slavnostní ceremoniál, jehož se zúčastnili i další významní představitelé společenského života v Brémách, zpestřila brémská Komorní filharmonie provedením závěrečné části 1. symfonie Ludwiga van Beethovena.

Je potěšitelné, že mezi oceněnými byli i všichni naši studenti. Stříbrnou medaili získal *Josef Tkadlec* a bronzové medaile *Jan Matějka* a *Jan Vaňhara.* Ostatní tři naši soutěžící obdrželi čestná uznání za bezchybné vyřešení jedné z úloh.

Na zlatou medaili bylo letos potřeba minimálně 32 bodů, na stříbrnou medaili 24 body a na bronzovou medaili stačilo získat 14 bodů. Jediní dva soutěžící, *Dongyi Wei* z Číny a *Makoto Soejima* z Japonska, dosáhli maximálního bodového zisku, tj. 42 bodů.

Za zmínku stojí, že nejmladší účastník soutěže, jedenáctiletý *Raúl Arturo Chávez Sarmiento* z Peru, získal bronzovou medaili se ziskem 16 bodů. Stal se tak zároveň druhým nejmladším držitelem medaile v historii mezinárodních matematických olympiád; tím úplně nejmladším byl shora jmenovaný Terence Tao z Austrálie, jenž postupně získal bronzovou, stříbrnou a nakonec i zlatou medaili v letech 1986–1988. Další medaile nezískal zřejmě jen proto, že jako 13letý nastoupil na univerzitu.

Výsledky našich studentů shrnuje následující tabulka:

| Umístění | | Body za úlohu 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Body | Cena |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 117.–129. | Josef Tkadlec | 7 | 7 | 1 | 7 | 3 | 0 | 25 | II. |
| 249.–263. | Jan Matějka | 6 | 6 | 1 | 0 | 2 | 0 | 15 | III. |
| 264.–282. | Jan Vaňhara | 6 | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 14 | III. |
| 296.–313. | David Klaška | 7 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 12 | HM |
| 314.–334. | Samuel Říha | 7 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 11 | HM |
| 335.–353. | Josef Ondřej | 7 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | HM |
| | Celkem | 40 | 20 | 3 | 8 | 16 | 0 | 87 | |

Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali o 14 bodů méně (jejich nejzkušenější reprezentant Michal Spišiak dal přednost účasti na Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexiku):

| Umístění | | Body za úlohu 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Body | Cena |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 233.–248. | Martin Bachratý | 7 | 1 | 1 | 7 | 0 | 0 | 16 | III. |
| 314.–334. | Jakub Uhrík | 7 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 | HM |
| 314.–334. | Filip Sládek | 7 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 11 | HM |
| 376.–392. | Peter Csiba | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | HM |
| 393.–415. | Eduard Eiben | 3 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 7 | |
| 190.–197. | Michal Hagara | 7 | 7 | 1 | 3 | 2 | 0 | 20 | III. |
| | Celkem | 38 | 16 | 4 | 11 | 4 | 0 | 73 | |

V neoficiálním pořadí zemí se naši reprezentanti umístili na konci čtvrté desítky (tabulka na následující straně). Ve srovnání s předešlým ročníkem MMO jsou letošní výsledky našeho družstva o trochu lepší. Naši reprezentanti přivezli domu o jednu bronzovou medaili víc a i ti naši soutěžící, kteří na medaili nedosáhli, si domů přivezli aspoň čestná uznání. Zájemce o detailnější informace o průběhu 50. ročníku MMO odkazujeme na příslušné oficiální stránky: `www.imo2009.de`.

Na předposlední den pobytu v Brémách připravili němečtí organizátoři pro všechny účastníky MMO jednodenní výlet na ostrov Wangerooge v Severním moři, který byl poměrně nedávno začleněn do seznamu

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| ČLR | 6 | 0 | 0 | 221 |
| Japonsko | 5 | 0 | 1 | 212 |
| Rusko | 5 | 1 | 0 | 203 |
| Korea | 3 | 3 | 0 | 188 |
| KLDR | 3 | 2 | 1 | 183 |
| USA | 2 | 4 | 0 | 182 |
| Thajsko | 1 | 5 | 0 | 181 |
| Turecko | 2 | 4 | 0 | 177 |
| Německo | 1 | 4 | 1 | 171 |
| Bělorusko | 1 | 4 | 1 | 167 |
| Itálie | 2 | 2 | 2 | 165 |
| Tchaj-wan | 1 | 5 | 0 | 165 |
| Rumunsko | 2 | 2 | 2 | 163 |
| Ukrajina | 3 | 1 | 2 | 162 |
| Írán | 1 | 4 | 1 | 161 |
| Vietnam | 2 | 2 | 2 | 161 |
| Brazílie | 1 | 3 | 2 | 160 |
| Kanada | 1 | 3 | 2 | 158 |
| Bulharsko | 1 | 3 | 2 | 157 |
| Maďarsko | 1 | 2 | 3 | 157 |
| Velká Británie | 1 | 3 | 2 | 157 |
| Srbsko | 1 | 3 | 1 | 153 |
| Austrálie | 2 | 1 | 2 | 151 |
| Peru | 0 | 4 | 2 | 144 |
| Gruzie | 0 | 3 | 2 | 140 |
| *Polsko* | 0 | 2 | 4 | 140 |
| Kazachstán | 0 | 3 | 3 | 136 |
| Indie | 0 | 3 | 2 | 130 |
| Hongkong | 1 | 2 | 2 | 122 |
| Singapur | 0 | 2 | 3 | 116 |
| Francie | 0 | 1 | 3 | 112 |
| Chorvatsko | 0 | 1 | 4 | 110 |
| Portugalsko | 0 | 1 | 3 | 99 |
| Turkmenistán | 0 | 1 | 3 | 97 |
| Argentina | 0 | 1 | 1 | 93 |
| Ázerbájdžán | 0 | 1 | 2 | 91 |
| Makedonie | 0 | 1 | 3 | 91 |
| Belgie | 0 | 1 | 2 | 89 |
| Kolumbie | 0 | 1 | 2 | 88 |
| *Česká republika* | 0 | 1 | 2 | 87 |
| Řecko | 0 | 0 | 3 | 86 |
| Uzbekistán | 0 | 1 | 2 | 85 |
| Indonésie | 0 | 0 | 4 | 84 |
| JAR | 0 | 0 | 2 | 84 |
| Tádžikistán | 0 | 1 | 2 | 82 |
| Izrael | 0 | 0 | 3 | 80 |
| Nizozemsko | 0 | 1 | 1 | 79 |
| Švýcarsko | 0 | 0 | 3 | 79 |
| Litva | 0 | 1 | 1 | 77 |
| Mexiko | 0 | 0 | 3 | 74 |
| Moldavsko | 0 | 0 | 4 | 74 |
| Srí Lanka | 0 | 0 | 2 | 74 |

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| *Slovensko* | 0 | 0 | 2 | 73 |
| Mongolsko | 0 | 0 | 3 | 72 |
| Španělsko | 0 | 0 | 4 | 71 |
| Švédsko | 0 | 0 | 2 | 70 |
| Dánsko | 0 | 1 | 1 | 68 |
| Bangladéš | 0 | 0 | 2 | 67 |
| Rakousko | 0 | 0 | 2 | 66 |
| Lucembursko | 0 | 0 | 3 | 65 |
| Bosna a Hercegovina | 0 | 0 | 1 | 63 |
| Lotyšsko | 0 | 0 | 1 | 61 |
| Norsko | 0 | 0 | 2 | 60 |
| Arménie | 0 | 0 | 2 | 59 |
| Slovinsko | 0 | 0 | 1 | 58 |
| Nový Zéland | 0 | 0 | 1 | 53 |
| Finsko | 0 | 0 | 0 | 49 |
| Macao | 0 | 0 | 1 | 49 |
| Kypr | 0 | 1 | 0 | 45 |
| Chile (4) | 0 | 1 | 0 | 41 |
| Estonsko | 0 | 0 | 0 | 40 |
| Kostarika (4) | 0 | 0 | 1 | 34 |
| Kyrgyzstán | 0 | 0 | 0 | 33 |
| Maroko | 0 | 0 | 0 | 32 |
| Malajsie (2) | 0 | 1 | 0 | 31 |
| Trinidad a Tobago | 0 | 0 | 0 | 28 |
| Tunisko (5) | 0 | 0 | 1 | 27 |
| Ekvádor | 0 | 0 | 0 | 26 |
| Filipíny (4) | 0 | 0 | 1 | 26 |
| Island | 0 | 0 | 0 | 26 |
| Albánie | 0 | 0 | 0 | 24 |
| Honduras (3) | 0 | 0 | 1 | 24 |
| Černá hora (4) | 0 | 0 | 0 | 23 |
| Portoriko | 0 | 0 | 0 | 23 |
| Kuba (1) | 0 | 0 | 1 | 21 |
| Lichtenštejnsko (2) | 0 | 0 | 1 | 21 |
| Pákistán (5) | 0 | 0 | 1 | 21 |
| Uruguay | 0 | 0 | 0 | 21 |
| Irsko | 0 | 0 | 0 | 20 |
| Nigérie | 0 | 0 | 0 | 17 |
| Guatemala (4) | 0 | 0 | 0 | 14 |
| Kambodža | 0 | 0 | 0 | 14 |
| Paraguay (4) | 0 | 0 | 0 | 14 |
| Salvádor (3) | 0 | 0 | 0 | 13 |
| Venezuela (2) | 0 | 0 | 0 | 13 |
| Panama (1) | 0 | 0 | 0 | 12 |
| Bolívie (3) | 0 | 0 | 0 | 9 |
| Mauretánie | 0 | 0 | 0 | 8 |
| Sýrie (5) | 0 | 0 | 0 | 7 |
| Zimbabwe (2) | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Benin (2) | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Kuvajt (4) | 0 | 0 | 0 | 3 |
| SAE (5) | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Alžírsko (4) | 0 | 0 | 0 | 2 |

přírodních památek UNESCO. Otužilejší účastníci využili během výletu možnost okoupat se v chladných mořských vodách, které tento ostrov obklopují.

Ústřední komise MO a vedení českého reprezentačního týmu děkují následujícím firmám a institucím — Hanácké kyselce, a.s., Nissan Kobliha Car v Přerově a FJFI ČVUT v Praze — za jejich nevšední pomoc při zabezpečení společného oblečení celého českého týmu na 50. MMO.

## Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

**1.** Nechť $n$ je kladné celé číslo a $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geqq 2$) jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné $n$. Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není číslem $n$ dělitelné. (*Austrálie*)

**2.** Nechť $O$ je střed kružnice opsané danému trojúhelníku $ABC$ a nechť $P$ a $Q$ jsou po řadě vnitřní body stran $AC$ a $AB$. Označme $K$, $L$, $M$ postupně středy úseček $BP$, $CQ$, $PQ$ a $k$ kružnici body $K$, $L$, $M$ procházející. Jestliže přímka $PQ$ je tečnou kružnice $k$, je $|OP| = |OQ|$. Dokažte. (*Rusko*)

**3.** Nechť $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je rostoucí posloupnost kladných celých čísel taková, že obě její podposloupnosti

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{a} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

jsou aritmetické. Dokažte, že posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je rovněž aritmetická. (*USA*)

**4.** Je dán trojúhelník $ABC$, v němž $|AB| = |AC|$. Osy jeho vnitřních úhlů při vrcholech $A$ a $B$ protínají strany $BC$ a $CA$ po řadě v bodech $D$ a $E$. Označme $K$ střed kružnice vepsané trojúhelníku $ADC$ a předpokládejme, že $|\sphericalangle BEK| = 45^\circ$. Najděte všechny možné velikosti úhlu $CAB$. (*Belgie*)

**5.** Určete všechny funkce $f$ z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel takové, že pro všechna kladná celá čísla $a$, $b$ existuje nedegenerovaný trojúhelník, jehož strany mají délky

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trojúhelník je *nedegenerovaný*, pokud jeho vrcholy neleží v přímce.) (*Francie*)

**6.** Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá kladná celá čísla a $\mathsf{M}$ je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahující číslo $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Luční kobylka má skákat podél číselné osy tak, že začne v bodě 0 a ve směru doprava provede v nějakém pořadí $n$ skoků o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že pořadí skoků lze zvolit tak, že se kobylka neoctne na žádném čísle z množiny $\mathsf{M}$. (*Rusko*)

## Řešení soutěžních úloh

**1.** Daná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$ splňují následující soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &\equiv a_1 \pmod{n}, \\ a_2 a_3 &\equiv a_2 \pmod{n}, \\ &\vdots \\ a_{k-1} a_k &\equiv a_{k-1} \pmod{n}. \end{aligned}$$

Odtud postupně dostáváme

$$a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3 \equiv \ldots \equiv a_1 a_2 \ldots a_k \pmod{n} \tag{1}$$

a (vynecháním první kongruence)

$$a_2 \equiv a_2 a_3 \equiv a_2 a_3 a_4 \equiv \ldots \equiv a_2 \ldots a_k \pmod{n}. \tag{2}$$

Kdyby číslo $a_k(a_1 - 1)$ bylo dělitelné číslem $n$ neboli $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$, bylo by zároveň

$$a_1 a_2 \ldots a_k = a_2 \ldots a_k a_1 \equiv a_2 \ldots a_k \pmod{n},$$

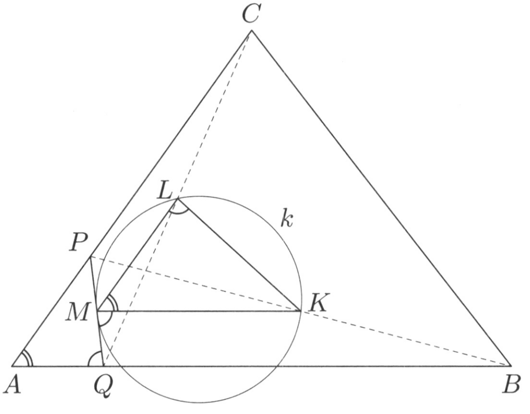
což podle (1) a (2) dává $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$. Dvě různá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ však nemohou při dělení číslem $n$ dávat stejný zbytek. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

**Jiné řešení**. Z kongruencí (1) speciálně dostáváme

$$a_1 \equiv (a_1 \ldots a_{k-1}) a_k \equiv a_1 a_k \pmod{n}.$$

Protože dvě různá čísla $a_1$, $a_k$ z množiny $\{1, \ldots, n\}$ nemohou při dělení číslem $n$ dávat stejný zbytek, musí být $a_1 a_k \not\equiv a_k \pmod{n}$ neboli $a_k(a_1 - 1) \not\equiv 0 \pmod{n}$.

**2.** Úsečka $MK$ je střední příčkou trojúhelníku $QBP$, proto $|MK| = \frac{1}{2}|QB|$ a $MK \parallel AB$. Z rovnosti střídavých úhlů plyne (obr. 64) $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle KMQ|$. Protože $PQ$ je tečnou kružnice $k$, dostáváme z rovnosti úsekového a obvodového úhlu příslušného tětivě $MK$ rovnost $|\sphericalangle KMQ| = |\sphericalangle KLM|$. Dohromady je tedy $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle KLM|$.




Obr. 64

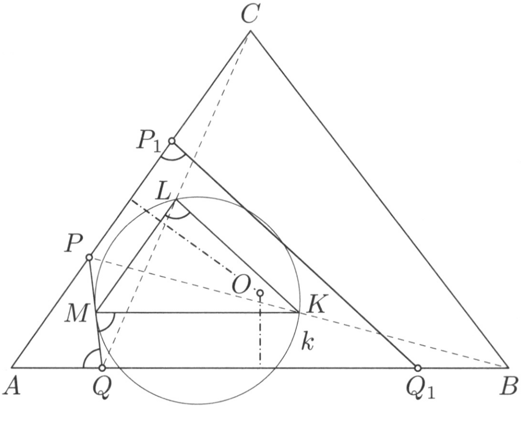
Podobně je $LM$ střední příčkou trojúhelníku $CPQ$, takže $|LM| = \frac{1}{2}|CP|$ a $LM \parallel CA$. To znamená, že $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle BAC|$ a trojúhelníky $PAQ$ a $KML$ jsou podobné. Pro poměry odpovídajících stran postupně (po dosazení za délky $|KM|$ a $|LM|$) dostáváme

$$\frac{|PA|}{|KM|} = \frac{|QA|}{|LM|}, \qquad \frac{|PA|}{\frac{1}{2}|QB|} = \frac{|QA|}{\frac{1}{2}|PC|},$$

$$|QA| \cdot |QB| = |PA| \cdot |PC|.$$

Poslední rovnost znamená, že body $P$ a $Q$ mají stejnou mocnost ke kružnici opsané trojúhelníku $ABC$ (zřejmě oba body leží uvnitř této kružnice). Proto mají od jejího středu $O$ stejnou vzdálenost neboli $|OP| = |OQ|$.

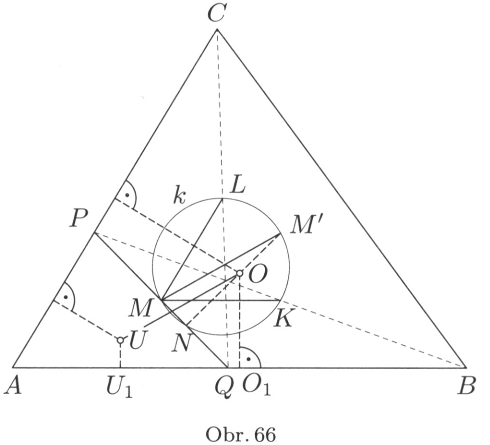
**Jiné řešení**. Označme $P_1$, $Q_1$ body souměrně sdružené s body $P$ a $Q$ podle středů příslušných stran $AC$, resp. $AB$ (obr. 65). Protože $ML \parallel AC$ a $|ML| = \frac{1}{2}|PC| = \frac{1}{2}|P_1A|$ a podobně i $MK \parallel AB$, $|MK| = \frac{1}{2}|QB| = \frac{1}{2}|Q_1A|$, jsou trojúhelníky $MKL$ a $AQ_1P_1$ stejnolehlé (s koeficientem $\frac{1}{2}$), tudíž $P_1Q_1 \parallel LK$.




Obr. 65

Jestliže je $PQ$ tečnou kružnice opsané trojúhelníku $MKL$, plyne z rovnosti úsekového a obvodového úhlu příslušného tětivě $MK$ rovnost $|\sphericalangle KMQ| = |\sphericalangle KLM|$, takže je také $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle AP_1Q_1|$. To ale znamená, že body $P$, $Q$, $P_1$, $Q_1$ leží na jedné kružnici, přitom středem této kružnice je zřejmě střed $O$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$, neboť osy úseček $PP_1$ a $QQ_1$ jsou zároveň osami stran $AC$ a $AB$. Proto $|OP| = |OQ|$.

**Jiné řešení**. Nechť $PQ$ je libovolná příčka stran $AC$ a $AB$ trojúhelníku $ABC$. Označme $U$ střed kružnice opsané trojúhelníku $APQ$ a $O_1$, $U_1$ kolmé projekce bodů $O$ a $U$ na přímku $AB$ (obr. 66). Pro kolmou




Obr. 66

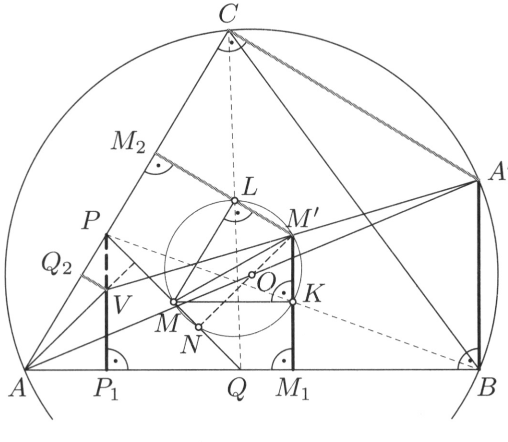
projekci vektoru $\boldsymbol{OU}$ do přímky $AB$ zřejmě platí $\boldsymbol{O_1U_1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{BA} + \boldsymbol{AQ}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{BQ} = \boldsymbol{KM}$, protože $KM$ je střední příčka trojúhelníku $BQP$. Podobně zjistíme, že projekcí téhož vektoru do přímky $AC$ je vektor $\boldsymbol{LM}$. Stejné projekce má ovšem i vektor $\boldsymbol{M'M}$ určený průměrem $MM'$ kružnice $k$ (opsané trojúhelníku $KLM$). Připomeňme, že vektor v rovině je jednoznačně určen svými projekcemi do dvou nezávislých směrů. Dostáváme tak tedy, že $\boldsymbol{OU} = \boldsymbol{M'M}$. Protože $UM \perp PQ$, je také $M'O \perp PQ$.

Pokud je nyní $PQ$ tečna kružnice $k$, je $M'M \perp PQ$ a bod $O$ leží na téže kolmici k $PQ$ jako body $U$ a $M'$, což je ovšem osa úsečky $PQ$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

*Poznámka.* Z předchozích úvah plyne, že obecně je $UOM'M$ rovnoběžník (redukovaný na úsečku $UM'$, když je $PQ$ tečnou kružnice $k$), a protože $UM \perp PQ$, je také $M'O \perp PQ$. Označíme-li $N$ patu kolmice z bodu $O$ na $PQ$, je zřejmě bod $N$ (podle Thaletovy věty) dalším průsečíkem přímky $PQ$ s kružnicí $k$. Dokázali jsme tak vlastně obecnější tvrzení (obr. 66):

*Je-li $O$ střed kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ a $P$ a $Q$ jsou po řadě vnitřní body stran $AC$ a $AB$, leží středy úseček $BP$, $CQ$, $PQ$ a pata kolmice z bodu $O$ na $PQ$ na jedné kružnici.*

Ukážeme ještě jeden pěkný důkaz tohoto tvrzení. Nechť $AA'$ je průměr kružnice opsané danému trojúhelníku $ABC$, takže $A'B \perp AB$ a $A'C \perp AC$. Označme dále $V$ průsečík výšek trojúhelníku $APQ$ a $P_1$, $Q_2$ odpovídající paty výšek (obr. 67). Je-li $M'$ střed úsečky $VA'$, označme $M_1$ a $M_2$ jeho kolmé průměty do stran $AB$ a $AC$, potom je $M'M_1$ střední




Obr. 67

příčkou lichoběžníku $VP_1BA'$ a nutně na ní leží i střed $K$ úsečky $PB$. Je tudíž $M'K \perp MK$ a podobně i $M'L \perp ML$, což znamená, že $MKM'L$ je tětivový čtyřúhelník, tedy $MM'$ je průměrem kružnice $k$. Nyní už vidíme, že $OM'$ je střední příčkou trojúhelníku $AA'V$, a protože $AV \perp PQ$, je také $M'O \perp PQ$. Pata $N$ této kolmice zřejmě leží na kružnici $k$.

**3.** Označme $D$ diferenci aritmetické posloupnosti $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ a pro každé přirozené $i$ označme $d_i = s_{i+1} - s_i$. Chceme dokázat, že hodnota $d_i$ je pro všechna $i$ stejná.

Nejdříve ukážeme, že množina hodnot $d_i$ je ohraničená. Protože daná posloupnost je rostoucí, je $d_i \geqq 1$ pro každé $i$. Každé dva po sobě jdoucí členy posloupnosti $(s_i)$ zřejmě leží mezi některými dvěma sousedními členy posloupnosti $1, s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$, proto $s_{i+1} - s_i \leqq \max\{D, s_{s_1}\}$.

Označme $m$ nejmenší a $M$ největší z hodnot $d_i$ (jejich existence plyne z ohraničenosti). Stačí dokázat, že $m = M$. Předpokládejme naopak, že $m < M$.

Nechť $n$ je libovolný takový index, že $d_n = m$. Tedy $s_{n+1} - s_n = m$, odkud

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = \\ &= d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_n+m-1} \leqq \underbrace{M + M + \ldots + M}_{m\text{-krát}} = mM. \end{aligned} \tag{1}$$

Podobně je-li $N$ libovolný index takový, že $d_N = M$, je $s_{N+1} - s_N = M$, tedy

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{N+1}} - s_{s_N} = s_{s_N+M} - s_{s_N} = \\ &= d_{s_N} + d_{s_N+1} + \ldots + d_{s_N+M-1} \geqq \underbrace{m + m + \ldots + m}_{M\text{-krát}} = Mm. \end{aligned} \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne, že $D = Mm$, a aby platila rovnost, nutně $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_n+m-1} = M$ a $d_{s_N} = d_{s_N+1} = \ldots = d_{s_N+M-1} = m$. Speciálně máme

$$d_{s_n} = M \qquad \text{a} \qquad d_{s_N} = m. \tag{3}$$

Z toho, že posloupnost $(s_n)$ je rostoucí, plyne $s_n \geqq n$. Navíc dokonce $s_n > n$, neboť kdybychom měli $s_n = n$, bylo by podle (3) $m = d_n = d_{s_n} = M$, což odporuje předpokladu $m < M$. Stejně můžeme ukázat, že $s_N > N$.

Položme $n_1 = n$. Tedy $d_{n_1} = m$ a podle (3) platí $d_{s_{n_1}} = M$. Dále zvolme $n_2 = s_{n_1} > n_1$. Protože $d_{n_2} = M$, může $n_2$ vystupovat v pozici $N$, takže podle (3) máme $d_{s_{n_2}} = m$ a zároveň $s_{n_2} > n_2$. Můžeme proto zvolit $n_3 = s_{n_2}$ a z (3) (protože $n_3$ může vystupovat v pozici $n$) dostaneme $d_{s_{n_3}} = M$. A tak pomocí předpisu $n_{i+1} = s_{n_i}$ postupně sestrojíme rostoucí posloupnost $n_1, n_2, n_3, \ldots$ takovou, že

$$d_{s_{n_1}} = M,\ d_{s_{n_2}} = m,\ d_{s_{n_3}} = M,\ d_{s_{n_4}} = m,\ \ldots \tag{4}$$

Přitom posloupnost $d_{s_{n_1}}, d_{s_{n_2}}, \ldots$ je podposloupností posloupnosti $d_{s_1}$, $d_{s_2}, \ldots$ Ta má členy, které jsou rozdíly členů aritmetických posloupností $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ a $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$, je tedy rovněž aritmetickou posloupností. Podle (4) se v ní nekonečněkrát opakuje hodnota $m$ (i $M$), což při $m < M$ zřejmě není možné.

Protože náš předpoklad vede ke sporu, nutně musí být $m = M$.

**Jiné řešení**. Především si uvědomme, že obě uvažované aritmetické podposloupnosti musejí mít stejnou diferenci. Posloupnosti $(s_{s_i+1} - s_{s_i})$ a $(s_{s_{i+1}} - s_{s_i+1})$ jsou obě jako rozdíl dvou aritmetických posloupností rovněž aritmetické a navíc s *opačnými* diferencemi. Protože jsou však zároveň obě nezáporné, musejí být jejich diference nulové (a tudíž jsou obě „rozdílové“ posloupnosti konstantní).

Označme tedy $d$ společnou diferenci obou posloupností $(s_{s_i})$ a $(s_{s_i+1})$. Pro ostře rostoucí posloupnost $(s_i)$ nepochybně platí $|j-k| \leqq |s_j - s_k|$, proto $0 \leqq s_{k+1} - s_k \leqq s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = d$, takže posloupnost $s_{k+1} - s_k$ je ohraničená, a nabývá tak pro nějaké $N$ svého maxima $s_{N+1} - s_N = M$ a pro nějaké $n$ minima $s_{n+1} - s_n = m$. Přitom

$$s_{s_{s_{N+1}}} - s_{s_{s_N}} = d(s_{N+1} - s_N) = dM = (s_{s_{N+1}} - s_{s_N})M.$$

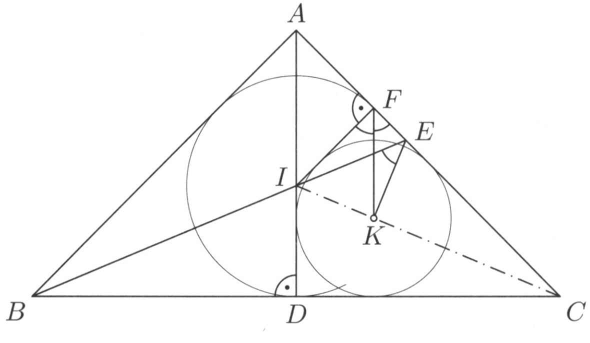
Levou stranu této rovnosti můžeme zapsat jako součet $s_{s_{N+1}} - s_{s_N}$ sčítanců tvaru $s_{i+1} - s_i \leqq M$, takže musejí být všechny rovny $M$, což speciálně v případě toho posledního znamená, že $s_{s_{s_N}+1} - s_{s_{s_N}} = M$. Jak ale víme z úvodního odstavce, je posloupnost $(s_{s_i+1} - s_{s_i})$ konstantní, tudíž $s_{s_i+1} - s_{s_i} = M$ pro všechna přirozená $i$.

Úplně stejně (jen místo $N$ a $M$ budeme psát $n$ a $m$) ukážeme, že $s_{s_i+1} - s_{s_i} = m$ pro všechna $i$. Je tudíž $M = m$ a tvrzení úlohy je tak dokázáno.

**4.** Označme $I$ střed kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$ a $F$ její bod dotyku se stranou $AC$. Pokud $F = E$, tedy osa úhlu při vrcholu $B$ je zároveň výškou trojúhelníku $ABC$, je trojúhelník $ABC$ rovnostranný a jeho úhel při vrcholu $A$ tak má velikost $60°$.

V každém případě je úsečka $IF$ obrazem úsečky $ID$ v souměrnosti podle osy $CI$, takže $IF$ je tečnou kružnice vepsané trojúhelníku $ADC$. Přímka $KF$ je tedy osou pravého úhlu a $|\sphericalangle IFK| = 45°$.

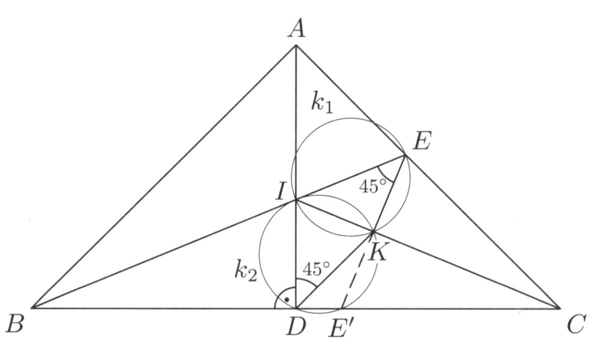
Pokud jsou body $E$ a $F$ různé a $|\sphericalangle IEK| = |\sphericalangle BEK| = 45°$ (obr. 68), leží body $K$, $E$, $F$, $I$ na (Thaletově) kružnici s průměrem $IE$. To znamená, že trojúhelník $EIK$ je rovnoramenný pravoúhlý, tudíž $|\sphericalangle KIE| = 45°$. Protože $KIE$ je zároveň vnější úhel rovnoramenného trojúhelníku $BCI$, je $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 2|\sphericalangle IBC| = |\sphericalangle KIE| = 45°$, tudíž úhel při vrcholu $A$ má velikost $90°$.




Obr. 68

V obou případech snadno ověříme, že úhel $BEK$ má velikost $45°$.

**Jiné řešení**. (Podle *Martina Bachratého*, Slovensko.) Označme $I$ střed kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$ (je to společný bod přímek $AD$, $BE$, $CK$) a uvažujme kružnice $k_1$, $k_2$ opsané trojúhelníkům $IKE$, $IKD$ (obr. 69). Obě mají nad společnou tětivou $IK$ obvodový úhel ve-




Obr. 69

likosti 45°, neboť $K$ leží na ose pravého úhlu $ADC$. Proto jsou obě kružnice shodné a odpovídají si v osově souměrnosti podle přímky $CI$. V téže osově souměrnosti si odpovídají i přímky $AC$, $BC$, takže průsečíky kružnice $k_1$ se stranou $AC$ se zobrazí na průsečíky kružnice $k_2$ se stranou $BC$.

Protože jedním ze společných bodů kružnice $k_1$ a přímky $AC$ je bod $E$ a jedním ze společných bodů kružnice $k_2$ a přímky $BC$ je bod $D$, mohou nastat dva případy.

Je-li obrazem bodu $E$ v osové souměrnosti podle přímky $CI$ bod $D$, je úhel $CEI$ pravý, což znamená, že v trojúhelníku $ABC$ je osa úhlu při vrcholu $B$ zároveň výškou. Z toho plyne, že trojúhelník $ABC$ je rovnostranný, takže $|\sphericalangle CAB| = 60°$.

Pokud kružnice $k_2$ protíná přímku $BC$ ve dvou různých bodech $D$ a $E'$, přičemž obrazem bodu $E$ v osové souměrnosti podle přímky $CI$ je bod $E'$, je kružnice $k_2$ opsána pravoúhlému trojúhelníku $IDE'$ (obr. 69; bod $E'$ leží uvnitř úsečky $DC$, protože trojúhelník $DKI$ je ostroúhlý — součet dvou jeho ostrých úhlů je totiž $45° + 90° - \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA| > 90°$), takže úhel $E'KI$ je rovněž pravý. Pro vnější úhel $EIK$ rovnoramenného trojúhelníku $BCI$ tak dostáváme

$$|\sphericalangle EIK| = 45° = |\sphericalangle BCA|.$$

Odtud už snadno dopočítáme $|\sphericalangle CAB| = 180° - 2|\sphericalangle BCA| = 90°$.

Snadno ověříme, že jak v rovnostranném, tak v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku je $|\sphericalangle BEK| = 45°$.

**Jiné řešení**. Označme $I$ střed kružnice vepsané rovnoramennému trojúhelníku $ABC$ a jeho úhly označme obvyklým způsobem, takže $\beta = \gamma = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Bod $K$ je průsečíkem os úhlů trojúhelníku $ADC$, proto

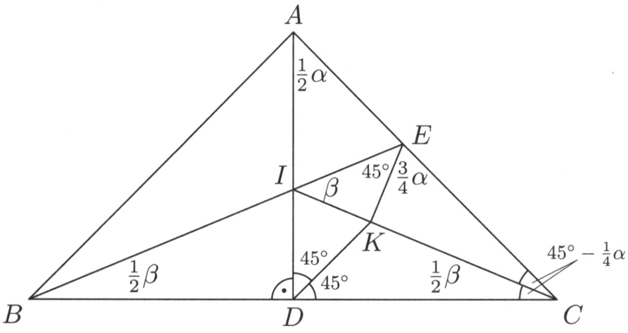
$$|\sphericalangle ECK| = |\sphericalangle KCD| = \tfrac{1}{2}\beta = 45° - \tfrac{1}{4}\alpha \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CDK| = |\sphericalangle KDA| = 45°.$$

Z trojúhelníku $BEA$ plyne (obr. 70)

$$|\sphericalangle BEA| = 180° - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta,$$

takže

$$|\sphericalangle KEC| = 180° - 45° - |\sphericalangle BEA| = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta - 45° = \tfrac{3}{4}\alpha.$$




Obr. 70

Pro jednodušší počítání označme $x = \frac{1}{4}\alpha$. Z vlastností osy úhlu $DK$ v trojúhelníku $DCI$ máme

$$\frac{|KI|}{|KC|} = \frac{|DI|}{|DC|} = \operatorname{tg} |\sphericalangle DCI| = \operatorname{tg}(45° - x)$$

a pomocí sinových vět v trojúhelnících $KEI$ a $KEC$ dostaneme

$$\frac{|KI|}{|KC|} = \frac{|KI| \cdot |EK|}{|EK| \cdot |KC|} = \frac{\sin 45°}{\sin(90° - 2x)} \cdot \frac{\sin(45° - x)}{\sin 3x}.$$

Spojením obou rovností po zkrácení vychází

$$\cos(45° - x) \cdot \sin 45° = \cos 2x \cdot \sin 3x.$$

Levou i pravou stranu upravíme pomocí vzorečku

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v,$$

takže po zřejmých úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \sin(90° - x) + \sin x &= \sin 5x + \sin x, \\ \cos x + \sin x &= \sin 5x + \sin x, \\ \cos x &= \cos(90° - 5x). \end{aligned}$$

Protože $0° < \alpha = 4x < 180°$, je buď $x = 90° - 5x$ neboli $\alpha = 60°$, nebo $x = 5x - 90°$ neboli $\alpha = 90°$. Pro obě tyto hodnoty platí $|\sphericalangle BEK| = 45°$, jak snadno ověříme.

**5.** Především si uvědomme, že pokud mají tři přirozená čísla 1, $m$, $n$ splňovat trojúhelníkovou nerovnost, musí být $m = n$.

Označme $m = f(1) - 1$. Pro $a = 1$ tak dostáváme tři čísla 1, $f(b)$, $f(b+m)$, která pro libovolné přirozené $b$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, jedině když $f(b) = f(b+m)$. Pokud by však bylo $m > 0$, byla by funkce $f$ periodická s periodou $m$, a nabývala by tudíž jen konečný počet hodnot $f(1), f(2), \dots, f(m)$. V takovém případě je ovšem zřejmé, že pro dostatečně velké přirozené číslo $a$ (větší než dvojnásobek maxima uvedených hodnot) nemohou čísla $a$, $f(b)$, $f(b + f(a) - 1)$ splňovat trojúhelníkovou nerovnost. Nutně tedy $m = 0$ neboli $f(1) = 1$.

Pro $b = 1$ odtud hned dostáváme, že čísla $a$, 1, $f(f(a))$ pro libovolné přirozené číslo $a$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, takže podle úvodního pravidla

$$f(f(a)) = a \quad \text{pro všechna přirozená čísla } a. \tag{1}$$

Z vlastnosti (1) navíc plyne, že funkce $f$ je prostá. Je-li totiž $f(x) = f(y)$, pak nutně $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$.

Označme $k = f(2)$. Protože $f(1) = 1$ a $f$ je prostá, je $k \geqq 2$. Navíc $f(k) = f(f(2)) = 2$. Pro $a = 2$, $b = k$ tak máme, že čísla 2, 2 a $f(2k-1)$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, proto

$$|f(2k-1) - 2| < 2, \qquad \text{takže} \quad f(2k-1) \in \{1, 2, 3\}.$$

Poněvadž $f(1) = 1$, $f(k) = 2$ a $2k-1 \notin \{1, k\}$, z prostoty funkce $f$ nutně plyne $f(2k-1) = 3$.

Nyní podobně pro $a = 2$, $b = 2k-1$ dostáváme

$$|f(3k-2) - 3| < 2, \qquad \text{takže} \quad f(3k-2) \in \{2, 3, 4\};$$

a protože $2 = f(k)$, $3 = f(2k-1)$ a $3k-2 \notin \{k, 2k-1\}$, musí být $f(3k-2) = 4$. Matematickou indukcí tak snadno odvodíme, že

$$f\big(nk - (n-1)\big) = n + 1$$

platí pro všechna přirozená čísla $n$. Speciálně pak pro $n = k-1$ dostáváme

$$f\big((k-1)k - (k-2)\big) = k,$$

což vzhledem k prostotě funkce $f$ dává $(k-1)k - (k-2) = 2$ neboli $k(k-2) = 0$. Je tedy $k = 2$, takže indukcí odvozený vztah je tvaru

$$f(n+1) = n + 1 \qquad \text{pro všechna přirozená čísla } n.$$

To spolu s rovností $f(1) = 1$ znamená, že jedinou vyhovující funkcí je identita $f(x) = x$.

Snadno ověříme, že tato funkce vyhovuje, neboť $|a - b| < a + b - 1 < < a + b$ pro libovolná dvě přirozená čísla $a$, $b$.

**Jiné řešení**. Stejně jako v předchozím řešení zjistíme, že $f(1) = 1$ a že funkce $f$ je involutorní, tj. $f(f(a)) = a$ pro libovolné přirozené $a$, což zároveň znamená, že funkce $f$ je prostá.

Položme $k = f(2) - 1$, $k \geqq 1$. Z předpokladů úlohy plyne, že pro libovolné přirozené číslo $b$ splňuje trojice čísel 2, $f(b)$, $f(b + k)$ trojúhelníkovou nerovnost $|f(b + k) - f(b)| < 2$. Protože $f$ je prostá, musí být $|f(b + k) - f(b)| = 1$, což znamená, že $f(b)$ a $f(b + k)$ jsou dvě sousední přirozená čísla. Záměnou $b$ postupně za $b + k$, $b + 2k$, ... zjistíme, že stejnou vlastnost mají i dvojice čísel $f(b + k)$ a $f(b + 2k)$, $f(b + 2k)$ a $f(b + 3k)$, ... Navíc posloupnost čísel

$$f(b),\ f(b + k),\ f(b + 2k),\ f(b + 3k),\ \dots \tag{2}$$

musí být rostoucí, protože funkce $f$ je prostá (klesající být nemůže, protože je to nekonečná posloupnost přirozených čísel). Tak docházíme k závěru, že (2) je posloupnost všech (po sobě jdoucích) přirozených čísel počínaje číslem $f(b)$. Pro $b = 1$ tak dostáváme *všechna* přirozená čísla, proto v takovém případě mezi argumenty funkce $f$ ve (2) nesmí žádné přirozené číslo chybět. Je tedy $k = 1$ a $f(n) = n$ pro každé přirozené $n$. Zároveň je zřejmé, že tato funkce má požadované vlastnosti.

**6.** K důkazu využijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je tvrzení triviálně splněno. Budeme tedy předpokládat, že $n > 1$ a že tvrzení úlohy platí pro všechna přirozená čísla menší než $n$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_1 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$, a označme $m = \min \mathsf{M}$. Rozebereme dva případy: $m < a_1$ a $a_1 \leqq m$.

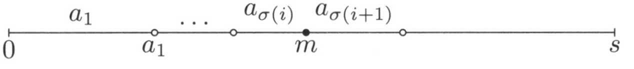
Pokud $m < a_1$ a zároveň $a_1 \notin \mathsf{M}$, začneme skokem délky $a_1$, kterým přeskočíme $m$, a použijeme indukční předpoklad na zbylých $n - 1$ skoků a nejvýše $n - 2$ čísel z množiny $\mathsf{M} \setminus \{m\}$, jež leží v intervalu $(a_1, s)$.

Pokud $m < a_1 \in \mathsf{M}$, uvažujme $n - 1$ dvojic $a_2, a_2 + a_1, \dots, a_n, a_n + a_1$. To je celkem $2n - 2$ různých čísel, z nichž nejvýše $n - 2$ může patřit do $\mathsf{M}$ (v $\mathsf{M}$ je $a_1$, které mezi nimi určitě není). To znamená, že z $n$ čísel, která v $\mathsf{M}$ neleží, aspoň dvě tvoří jednu z uvedených $n - 1$ dvojic, řekněme $a_i, a_i + a_1$, $2 \leqq i \leqq n$. Budou-li první dva skoky kobylky $a_i, a_1$, přeskočí $m$ i $a_1$ z $\mathsf{M}$ a zbylé $n - 2$ skoky najdeme podle indukčního předpokladu (v množině $\mathsf{M}$ zbyla nejvýše $n - 3$ čísla k přeskočení).

Pokud $a_1 \leqq m$, uvažujme posloupnost skoků $a_1 = a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)}$, kde $\sigma$ je nějaká vhodná permutace čísel $1, 2, \ldots, n$ taková, že kobylka neskočí na žádné číslo z $\mathsf{M} \setminus \{m\}$. Takovou permutaci $\sigma$ dokážeme najít podle indukčního předpokladu (máme k dispozici $n-1$ skoků $a_2, \ldots, a_n$ a nejvýše $n-2$ čísel z $\mathsf{M}$ větších než $m$, která leží v intervalu $(a_1, s)$).

Je-li nyní $m = a_1$, stačí prohodit první a druhý skok, tj. skoky délek $a_1$ a $a_{\sigma(2)}$.

Pokud v nalezené posloupnosti skoků některý z nich vede do čísla $m > a_1$, je tedy $m = a_1 + \ldots + a_{\sigma(i)}$ pro nějaké $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ (obr. 71), prohodíme první a $(i+1)$-ní skok, tj. skoky délek $a_1$ a $a_{\sigma(i+1)}$. Tím dosáhneme toho, že číslo $m$ kobylka přeskočí a ostatní čísla, do nichž vedou její skoky, se změní pouze v intervalu $(0, m)$, kde však žádné číslo z $\mathsf{M}$ neleží.




Obr. 71

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.