58. ročník matematické olympiády na středních školách

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011. pp. 143–155.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405180

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již deváté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 50. MMO v Brémách.

Soutěž se uskutečnila 21.–24. června 2009 na fakultě PEDAS Žilinské univerzity. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 20. 6. 2009. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Jakub Oćwieja	POL	7 7 7 7 7 7	42
2.	Tomasz Kociumaka	POL	7 7 0 7 7 7	35
3.	Damian Orlef	POL	7 0 7 7 7 4	32
4.–6.	Tomasz Pawłowski	POL	7 0 7 7 7 0	28
	Josef Tkadlec	CZE	6 0 7 7 7 1	28
	Jakub Witaszek	POL	7 7 0 7 7 0	28
7.–8.	Martin Bachratý	SVK	7 0 1 7 7 0	22
	David Klaška	CZE	1 7 0 7 7 0	22
9.–12.	Mikołi Frączyk	POL	4 0 1 7 5 4	21
	Michal Hagara	SVK	7 0 0 7 7 0	21
	Jan Matějka	CZE	7 0 0 7 7 0	21
	Filip Sládek	SVK	6 0 1 7 7 0	21
13.	Samuel Říha	CZE	6 0 0 7 7 0	20
14.	Ladislav Bačo	SVK	7 0 1 7 3 0	18
15.	Eduard Eiben	SVK	4 0 1 7 5 0	17
16.–17.	Jakub Uhrík	SVK	4 0 1 0 7 0	12
	Jan Vaňhara	CZE	2 0 0 4 6 0	12
18.	Josef Ondřej	CZE	7 0 1 3 0 0	11

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili kolegové ze Slovenské republiky (s využitím jedné polské úlohy), řešení úloh koordinovala mezinárodní porota, kterou tvořili RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., a Mgr. Martin Panák, PhD., z České republiky, dr. Małgorzata Bednarska a Bartłomiej Bzdęga z Polska, Mgr. Peter Novotný, PhD., a doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., ze Slovenska. Organizačně soutěž zabezpečil doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Nejvíc se už tradičně dařilo polskému družstvu, ač tento rok neobsadilo (na rozdíl od posledních dvou) prvních šest příček — v první šestici mělo pět studentů. Naše družstvo tak soutěžilo především se slovenským, což byl opět souboj velmi vyrovnaný.

Texty soutěžních úloh

1. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ splňují podmínku

$$\bigl(1 + yf(x)\bigr)\bigl(1 - yf(x+y)\bigr) = 1.$$

(*František Kardoš*)

2. Pro daná kladná celá čísla a, k je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definována vztahy

$$a_1 = a \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = a_n + k \cdot \varrho(a_n) \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots,$$

kde $\varrho(m)$ značí součin všech číslic zápisu čísla m v desítkové soustavě (například $\varrho(413) = 12$, $\varrho(308) = 0$ apod.). Dokažte, že existují taková kladná celá čísla a, k, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje právě 2 009 různých čísel. (*Peter Novotný*)

3. Nechť k je kružnice připsaná straně BC daného trojúhelníku ABC. Zvolme přímku p rovnoběžnou se stranou BC, která protíná úsečky AB, AC po řadě v bodech D, E. Kružnici vepsanou trojúhelníku ADE označme l. Tečny ke kružnici k z bodů D a E, které neprocházejí bodem A, se protínají v bodě P. Tečny ke kružnici l z bodů B a C, které neprocházejí bodem A, se protínají v bodě Q. Dokažte, že přímka PQ prochází pevným bodem nezávislým na volbě přímky p. (*Tomáš Jurík*)

4. Je dána kružnice k a její tětiva AB, která není jejím průměrem. Uvnitř delšího oblouku AB kružnice k zvolme libovolně bod C. Označme K bod souměrně sdružený s bodem A podle přímky BC a L bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky AC. Dokažte, že vzdálenost středů úseček KL a AB nezávisí na poloze bodu C. (*Tomáš Jurík*)

5. Je dána n-tice celých čísel $a_1, \ldots, a_n$ splňující následující podmínky:

(i) $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqq 50$,

(ii) pro každou n-tici kladných celých čísel $b_1, \ldots, b_n$ existuje kladné celé číslo m a taková n-tice kladných celých čísel $c_1, \ldots, c_n$, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n.$$

Dokažte, že $n \leqq 16$ a určete počet všech různých n-tic $a_1, \ldots, a_n$ splňujících dané podmínky pro $n = 16$. (*Peter Novotný*)

6. Nechť $n \geqq 16$ je přirozené číslo. Uvažujme množinu

$$\mathsf{G} = \{(x, y) \colon \ x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

tvořenou n^2 body roviny. Je-li A libovolná podmnožina množiny G obsahující aspoň $4n\sqrt{n}$ prvků, dokažte, že existuje aspoň n^2 konvexních čtyřúhelníků, které mají vrcholy v A, a přitom všechny jejich úhlopříčky procházejí jedním bodem. (*Polsko*)

Řešení úloh

1. Postupnými úpravami zadané podmínky dostáváme

$$1 + yf(x) - yf(x+y) - y^2 f(x) f(x+y) = 1,$$
$$yf(x) - yf(x+y) = y^2 f(x) f(x+y).$$

Poslední rovnost můžeme vydělit hodnotou $y \neq 0$. Po dalších úpravách (všechny výrazy, kterými budeme dělit, jsou evidentně nenulové) tak pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ dostaneme

$$f(x) - f(x+y) = yf(x)f(x+y),$$
$$f(x+y) = \frac{f(x)}{1 + yf(x)},$$
$$\frac{1}{f(x+y)} = y + \frac{1}{f(x)},$$

a tedy i

$$\frac{1}{f(y+x)} = x + \frac{1}{f(y)}.$$

Odtud

$$y + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(y)}$$

pro všechna kladná x, y. Dosazením $y=1$ dostaneme

$$\frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(1)} - 1 = x + c, \qquad \text{tedy} \qquad f(x) = \frac{1}{x+c},$$

kde c je konstanta. Protože $f(x) > 0$ pro každé $x > 0$, musí být $x + c > 0$ pro každé $x > 0$, tedy $c \geqq 0$.

Snadno ověříme, že každá funkce $f(x) = 1/(x+c)$, kde $c \geqq 0$, vyhovuje:

$$\left(1 + \frac{y}{x+c}\right)\left(1 - \frac{y}{x+y+c}\right) = \frac{x+c+y}{x+c} \cdot \frac{x+y+c-y}{x+y+c} = 1.$$

Jiné řešení. Dosaďme do zadané podmínky $x = 1$. Při označení $a = f(1) > 0$ úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned} (1+ay)\bigl(1 - yf(y+1)\bigr) &= 1, \\ ay - yf(y+1)(1+ay) &= 0, \\ f(y+1) &= \frac{a}{1+ay}. \end{aligned}$$

Jestliže nyní do dané podmínky dosadíme $y = 1$ a $f(x+1) = a/(1+ax)$, vyjde

$$\begin{aligned} \bigl(1 + f(x)\bigr)\left(1 - \frac{a}{1+ax}\right) &= 1, \\ f(x) \cdot \frac{1+ax-a}{1+ax} &= \frac{a}{1+ax}, \\ f(x) &= \frac{a}{1+ax-a} = \frac{1}{x+1/a-1} = \frac{1}{x+c}. \end{aligned}$$

Podobně jako v prvním řešení musí být $c \geqq 0$ a snadno ověříme, že každá taková funkce vyhovuje.

Poznámka. Řešení se dá zapsat i ve tvaru

$$f(x) = \frac{a}{1+(x-1)a},$$

kde $a = f(1) \in (0, 1\rangle$ je reálný parametr.

2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je evidentně rostoucí až po první člen, v jehož zápise se vyskytne číslice 0, a počínaje tímto členem je už konstantní. Naším cílem je tedy najít hodnoty a, k, pro něž se číslice 0 poprvé vyskytne v členu a_{2009}. Úlohu vyřešíme obecně — uvedeme příklad hodnot a, k, pro něž se číslice 0 poprvé vyskytne v členu a_m, přičemž $m > 4$ je dané celé číslo.

Vezměme

$$a = \frac{10^{2m-5}-1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{2m-5\text{ jedniček}}, \qquad k = 10^{m-3}+4 = 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4\text{ nul}}4.$$

Postupně máme

$$\begin{aligned}
a_1 &= a = \underbrace{11\ldots1}_{2m-5},\\
\varrho(a_1) &= 1,\\
a_2 &= a_1 + k = a_1 + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}4 = \underbrace{11\ldots1}_{m-3}2\underbrace{11\ldots1}_{m-4}5,\\
\varrho(a_2) &= 10,\\
a_3 &= a_2 + 10k = a_2 + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}40 = \underbrace{11\ldots1}_{m-4}22\underbrace{11\ldots1}_{m-5}55,\\
\varrho(a_3) &= 100,\\
&\ \vdots\\
a_i &= a_{i-1} + 10^{i-2}k = \underbrace{11\ldots1}_{m-i-1}\underbrace{22\ldots2}_{i-1}\underbrace{11\ldots1}_{m-i-2}\underbrace{55\ldots5}_{i-1},\\
\varrho(a_i) &= 10^{i-1},\\
&\ \vdots\\
a_{m-2} &= a_{m-3} + 10^{m-4}k = 1\underbrace{22\ldots2}_{m-3}\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_{m-2}) &= 10^{m-3},\\
a_{m-1} &= a_{m-2} + 10^{m-3}k = a_{m-2} + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}4\underbrace{00\ldots0}_{m-3} =\\
&= \underbrace{22\ldots2}_{m-3}6\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_{m-1}) &= 6\cdot 10^{m-3},\\
a_m &= a_{m-1} + 6\cdot 10^{m-3}k = a_{m-1} + 6\underbrace{00\ldots0}_{m-5}24\underbrace{00\ldots0}_{m-3} =\\
&= 8\underbrace{22\ldots2}_{m-5}50\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_m) &= 0.
\end{aligned}$$

Závěr. Posloupnost obsahuje právě 2 009 různých čísel například pro $a = \frac{1}{9}(10^{4013}-1)$, $k = 10^{2006}+4$.

Jiné řešení. Zvolme

$$a = 6\underbrace{11\ldots1}_{2007}, \qquad k = \underbrace{33\ldots3}_{2007}4 = \frac{1}{6}\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4.$$

Potom

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 6\underbrace{11\ldots1}_{2007},\\
&\quad \varrho(a_1) = 6, \quad k\varrho(a_1) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4,\\
a_2 &= 26\underbrace{11\ldots1}_{2006}5,\\
&\quad \varrho(a_2) = 60, \quad k\varrho(a_2) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}40,\\
a_3 &= 226\underbrace{11\ldots1}_{2005}55,\\
&\quad \varrho(a_3) = 600, \quad k\varrho(a_3) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}400,\\
a_4 &= 2226\underbrace{11\ldots1}_{2004}555,\\
&\quad \varrho(a_4) = 6000, \quad k\varrho(a_4) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4000,\\
&\quad \vdots\\
a_{i+1} &= \underbrace{22\ldots2}_{i}6\underbrace{11\ldots1}_{2007-i}\underbrace{55\ldots5}_{i},\\
&\quad \varrho(a_{i+1}) = 6\underbrace{0\ldots0}_{i}, \quad k\varrho(a_{i+1}) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4\underbrace{00\ldots0}_{i},\\
&\quad \vdots\\
a_{2007} &= \underbrace{22\ldots2}_{2006}61\underbrace{55\ldots5}_{2006},\\
&\quad \varrho(a_{2007}) = 6\underbrace{0\ldots0}_{2006}, \quad k\varrho(a_{2007}) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4\underbrace{00\ldots0}_{2006},\\
a_{2008} &= \underbrace{22\ldots2}_{2007}6\underbrace{55\ldots5}_{2007},\\
&\quad \varrho(a_{2008}) = 6\underbrace{0\ldots0}_{2007}, \quad k\varrho(a_{2008}) = 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4\underbrace{00\ldots0}_{2007},\\
a_{2009} &= \underbrace{22\ldots2}_{2007}30\underbrace{55\ldots5}_{2007},\\
&\quad \varrho(a_{2009}) = 0, \quad k\varrho(a_{2009}) = 0
\end{aligned}
$$

a dále samozřejmě $a_{2009} = a_{2010} = a_{2011} = \ldots$

Poznámka. Na vyřešení úlohy stačí najít takové hodnoty a, k, aby posloupnost obsahovala *aspoň* 2 009 různých čísel a zároveň neobsahovala nekonečně mnoho různých čísel. Jestliže totiž uvedená posloupnost obsahuje právě m různých čísel, přičemž $m > 2\,009$, tak posloupnost s prvním členem a_{m-2008} bude obsahovat právě požadovaných 2 009 různých čísel.

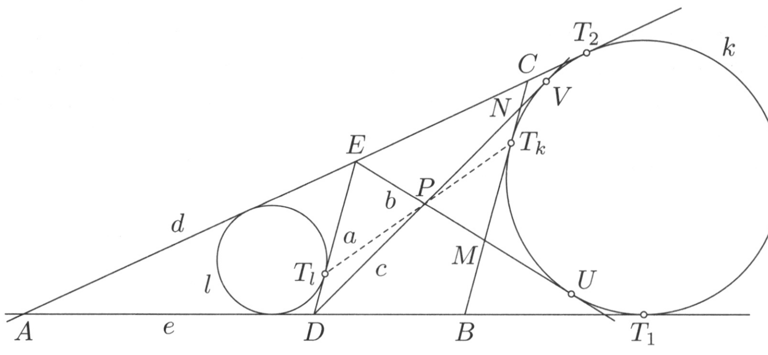
3. Nechť T_k je bod, v němž se kružnice k dotýká strany BC a T_l je bod, v němž se kružnice l dotýká strany DE. Ukážeme, že hledaným pevným bodem je bod T_k.

Nejdříve dokážeme, že body T_k, T_l a P jsou kolineární. Označme body dotyku kružnice k s přímkami EP, DP postupně U, V, průsečíky strany BC s těmito přímkami postupně M, N a body dotyku kružnice k s polopřímkami AB, AC postupně T_1, T_2.

Protože $BC \parallel DE$, jsou trojúhelníky DEP a NMP podobné a stejnolehlost H se středem P a (záporným) koeficientem opačným k číslu $q = |MN|/|ED|$ zobrazí úsečku DE na úsečku NM. Na kolineárnost bodů T_k, T_l, P stačí dokázat rovnost

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|}; \tag{1}$$

je-li totiž splněna, zobrazí se ve stejnolehlosti H bod T_l do bodu T_k.



Obr. 57

Označme a, b, c délky stran trojúhelníku DEP tak jako na obr. 57. Dále nechť $|AD| = e$, $|AE| = d$. Připomeňme známé vztahy pro délku úseku mezi vrcholem trojúhelníku a dotykovým bodem vepsané, resp. připsané kružnice: V trojúhelníku XYZ je vzdálenost vrcholu X od dotykového bodu vepsané, resp. připsané kružnice (ležícího na straně XY) rovna $\frac{1}{2}(|XY| + |XZ| - |YZ|)$, resp. $\frac{1}{2}(|XY| + |YZ| - |XZ|)$.

Kružnice k je připsanou kružnicí ke straně NM trojúhelníku NMP. Proto

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{\frac{1}{2}(|MN| + |NP| - |MP|)}{\frac{1}{2}(|MN| + |MP| - |NP|)} = \frac{qa + qc - qb}{qa + qb - qc} = \frac{a + c - b}{a + b - c}. \qquad (2)$$

Kružnice l je kružnicí vepsanou trojúhelníku DEA. Proto

$$\frac{|ET_l|}{|DT_l|} = \frac{\frac{1}{2}(|DE| + |AE| - |AD|)}{\frac{1}{2}(|DE| + |AD| - |AE|)} = \frac{a + d - e}{a + e - d}. \qquad (3)$$

Jestliže z nějakého bodu vedeme ke kružnici dvě tečny, vzdálenost obou dotykových bodů od daného bodu je stejná. Opakovaným použitím tohoto faktu dostáváme

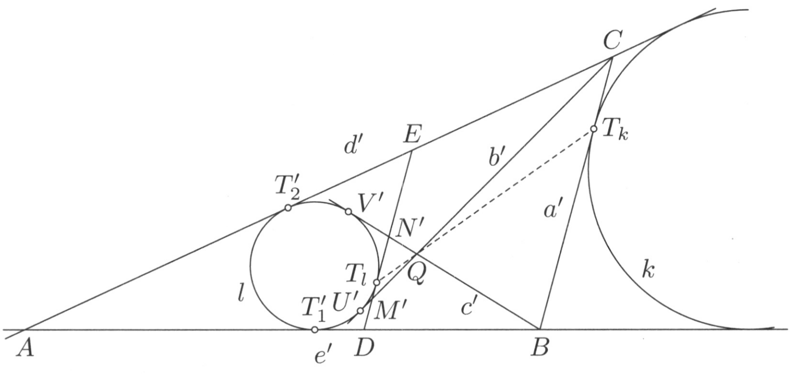
$$\begin{aligned} e + c + |PU| &= e + c + |PV| = e + |DT_1| = |AT_1| = |AT_2| = \\ &= d + |ET_2| = d + b + |PU|, \end{aligned}$$

tedy $e + c = d + b$. Proto $c - b = d - e$ a dosazením do (2), (3) okamžitě dostáváme

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{a + (c - b)}{a - (c - b)} = \frac{a + (d - e)}{a - (d - e)} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|},$$

což je požadovaná rovnost (1). Bod P tedy leží na přímce T_lT_k.

Podobně dokážeme, že i body T_k, T_l a Q jsou kolineární. Označme body dotyku kružnice l s přímkami CQ, BQ postupně U', V', průsečíky strany DE s těmito přímkami postupně M', N' a body dotyku kružnice l se stranami AD, AE postupně T_1', T_2'. Dále nechť a', b', c' jsou délky stran trojúhelníku BCQ, $|AB| = e'$, $|AC| = d'$ (obr. 58).



Obr. 58

Analogickými úvahami jako v první části dostáváme (tentokrát jsou obě kružnice připsané)

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{a' + c' - b'}{a' + b' - c'}, \qquad \frac{|CT_k|}{|BT_k|} = \frac{a' + e' - d'}{a' + d' - e'}.$$

Porovnáváním délek (obr. 58) máme

$$\begin{aligned} e' - c' - |QU'| &= e' - c' - |QV'| = e' - |BT_1'| = |AT_1'| = |AT_2'| = \\ &= d' - |CT_2'| = d' - b' - |QU'|, \end{aligned}$$

tedy $c' - b' = e' - d'$ a následně

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{|CT_k|}{|BT_k|}.$$

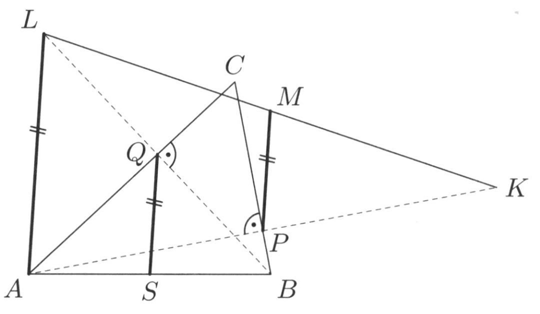
Ze stejnolehlosti trojúhelníků BCQ a $N'M'Q$ nakonec dostáváme, že bod Q leží na přímce T_lT_k.

Přímka PQ (zřejmě $P \neq Q$) je tedy totožná s přímkou T_lT_k a prochází bodem T_k, který na poloze přímky p nezávisí.

4. V trojúhelníku ABC označme S střed strany AB a P, Q paty výšek z vrcholů A, B. Střed úsečky KL označme M. Body P, Q jsou samozřejmě středy úseček AK, BL (obr. 59). Proto QS je střední příčkou trojúhelníku LAB a MP střední příčkou trojúhelníku LAK. Odtud

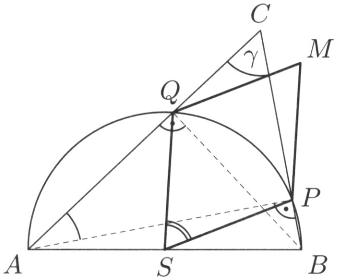
$$|QS| = \tfrac{1}{2}|LA| = |MP| \qquad \text{a} \qquad QS \parallel LA \parallel MP,$$

tedy $SPMQ$ je rovnoběžník (to zřejmě platí i v případě, jestliže některý z trojúhelníků LAB, LAK je „degenerovaný“).

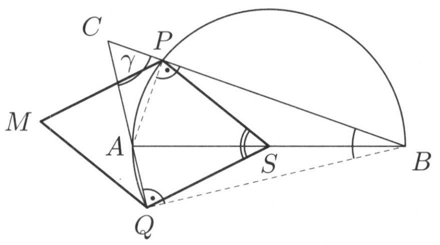


Obr. 59

Body P, Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, proto $|SP| = |SQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Rovnoběžník $SPMQ$ je tedy kosočtverec a délka jeho strany nezávisí na poloze bodu C. Abychom dokázali, že ani délka jeho úhlopříčky SM nezávisí na poloze bodu C, stačí dokázat, že velikost úhlu, který svírají jeho strany SP, SQ, je pro libovolnou polohu bodu C na kružnici k stejná (všechny možné kosočtverce $SPMQ$, a tedy i jejich úhlopříčky SM jsou pak navzájem shodné).



Obr. 60



Obr. 61

Jestliže je úhel α trojúhelníku ABC ostrý, leží bod Q uvnitř strany AC (úhel γ je podle zadání ostrý vždy) a úhel PSQ je středovým úhlem k obvodovému úhlu PAQ nad tětivou PQ Thaletovy kružnice nad průměrem AB (obr. 60). Je tedy

$$|\sphericalangle PSQ| = 2|\sphericalangle PAQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Stejné vyjádření dostaneme i v případě, že úhel α není ostrý; tehdy je totiž ostrý úhel β a můžeme namísto úhlu PAQ použít obvodový úhel PBQ (obr. 61):

$$|\sphericalangle PSQ| = 2|\sphericalangle PBQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Protože při pohybu bodu C po kružnici k se velikost úhlu γ nemění (je to obvodový úhel nad pevnou tětivou AB), nemění se ani velikost úhlu PSQ, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Budeme předpokládat, že úhel α je ostrý; případ, kdy α není ostrý, je analogický (tehdy je ostrý úhel β). Nechť S, M, U, V jsou postupně středy úseček AB, KL, AL, BK a H je průsečík přímek AK a BL

(obr. 62 a obr. 63). Čtyřúhelník $USVM$ je rovnoběžník ($SU \parallel BL \parallel MV$, $SV \parallel AK \parallel MU$). Zřejmě

$$|SV| = |AB| \sin\beta, \quad |MV| = |SU| = |AB| \sin\alpha,$$
$$|\sphericalangle SVM| = |\sphericalangle AHL| = |\sphericalangle ACB| = \gamma.$$

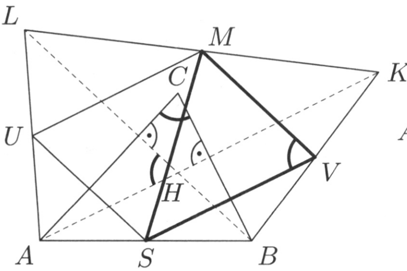
Použitím sinové věty v trojúhelníku ABC máme

$$\frac{|AC|}{|SV|} = \frac{1}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{1}{|AB|} \cdot \frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|BC|}{|MV|},$$

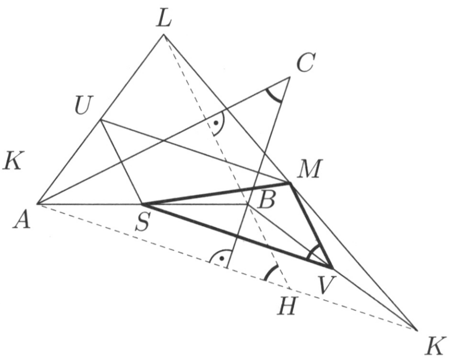
trojúhelníky SVM a ACB jsou tedy podobné (strany svírající stejný úhel mají délky v stejném poměru). Jestliže opět použijeme sinovou větu v trojúhelníku ABC, dostaneme

$$|SM| = |AB| \cdot \frac{|SV|}{|AC|} = \frac{|AB|^2 \sin\beta}{|AC|} = \frac{|AB|^2 \sin\gamma}{|AB|} = |AB| \sin\gamma,$$

což je výraz, který zřejmě nezávisí na poloze bodu C.



Obr. 62



Obr. 63

5. Nejdříve dokážeme, že čísla $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem nesoudělná. Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom $(a_i, a_j) = d > 1$ pro nějaké $i \neq j$. Nechť $a_i = u \cdot d$, $a_j = v \cdot d$. Zvolme $b_i = 1$, $b_j = 2$. Podle podmínky (ii) existují m, c_i a c_j taková, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{a} \quad m \cdot b_j = c_j^{a_j}, \quad \text{tedy} \quad m = (c_i^u)^d \quad \text{a} \quad 2m = (c_j^v)^d.$$

Odtud $2(c_i^u)^d = (c_j^v)^d$, což není možné, protože exponent prvočísla 2 v prvočíselném rozkladu pravé strany je násobkem čísla d a v prvočíselném rozkladu levé strany není násobkem čísla d.

Předpokládejme, že čísla $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem nesoudělná. Ukážeme, že potom je podmínka (ii) splněna. Nechť $b_1, \ldots, b_n$ je libovolná n-tice přirozených čísel a $p_1, \ldots, p_k$ jsou všechna prvočísla nacházející se v prvočíselných rozkladech čísel $b_1, \ldots, b_n$. Hledejme m ve tvaru

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Pro každé $i = 1, \ldots, n$ označme $\beta_{i,j}$ exponent prvočísla p_j v prvočíselném rozkladu b_i. Aby číslo $m \cdot b_i$ bylo a_i-tou mocninou, stačí, aby pro každé $j = 1, \ldots, k$ bylo $\alpha_j + \beta_{i,j}$ násobkem a_i. Každou hodnotu α_j tedy stačí zvolit tak, aby platilo

$$\alpha_j \equiv -\beta_{1,j} \pmod{a_1}, \quad \alpha_j \equiv -\beta_{2,j} \pmod{a_2}, \quad \ldots, \\ \alpha_j \equiv -\beta_{n,j} \pmod{a_n}.$$

Existence takového α_j plyne z čínské zbytkové věty (čísla $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem nesoudělná).

Dokázali jsme, že podmínka (ii) je splněna, právě když jsou čísla $a_1, \ldots, a_n$ navzájem nesoudělná. Mezi čísly $1, 2, \ldots, 50$ je právě patnáct prvočísel. Kdyby bylo $n \geqq 17$, existovala by mezi čísly $2 \leqq a_2 < a_3 < \ldots < a_n \leqq 50$ určitě aspoň dvě čísla mající v prvočíselném rozkladu stejné prvočíslo, byla by tedy soudělná. Proto nutně $n \leqq 16$.

Jestliže $n = 16$, musí být $a_1 = 1$ a každé z patnácti čísel $a_2, a_3, \ldots, a_{16}$ musí být mocninou jiného prvočísla. Vypišme, které mocniny prvočísel můžeme použít:

$$\begin{array}{ll} p = 2: & 2, 4, 8, 16, 32, \\ p = 3: & 3, 9, 27, \\ p = 5: & 5, 25, \\ p = 7: & 7, 49, \\ p \geqq 11: & \text{jen } p. \end{array}$$

Celkový počet vyhovujících šestnáctic je tedy $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

6. Označme $|\mathsf{A}| = m \geqq 4n\sqrt{n}$. Nechť S je množina všech úseček majících krajní body v A. Zřejmě $|\mathsf{S}| = \binom{m}{2}$. Souřadnice středu každé úsečky z S jsou celé násobky čísla $\frac{1}{2}$ a leží v konvexním obalu množiny G. Takových bodů je $(2n-1)^2$, tedy méně než $4n^2$. Proto existuje bod B, který je středem aspoň $\binom{m}{2}/(4n^2)$ úseček z S. Nechť P je množina všech úseček z S, jejichž středem je B. Potom

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{P}| &\geqq \frac{\binom{m}{2}}{4n^2} = \frac{m(m-1)}{8n^2} \geqq \\
&\geqq \frac{4n\sqrt{n}(4n\sqrt{n}-1)}{8n^2} = \frac{16n^3 - 4n\sqrt{n}}{8n^2} = 2n - \frac{1}{2\sqrt{n}} > 2n-1,
\end{aligned}
$$

tedy $|\mathsf{P}| \geqq 2n$.

Rozdělme P na třídy úseček ležících na jedné přímce. Označme k počet těchto tříd a a_i počet úseček v i-té třídě pro $i = 1, \dots, k$. Každá úsečka mezi a_i úsečkami jedné třídy má krajní body v G a všech $2a_i$ krajních bodů (které jsou zřejmě různé) úseček jedné třídy leží na jedné přímce, proto $2a_i \leqq n$. Přitom každé dvě úsečky z P jsou úhlopříčkami rovnoběžníku, právě když neleží na jedné přímce. Pro počet různých rovnoběžníků s úhlopříčkami patřícími do P tak dostáváme

$$
\begin{aligned}
\sum_{1 \leqq i < j \leqq k} a_i a_j &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i^2\right) \geqq \\
&\geqq \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(|\mathsf{P}|^2 - |\mathsf{P}| \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}|\mathsf{P}|\left(|\mathsf{P}| - \frac{n}{2}\right) \geqq \\
&\geqq n\left(2n - \frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2}n^2 > n^2.
\end{aligned}
$$

Existuje tedy více než n^2 konvexních čtyřúhelníků (dokonce rovnoběžníků) s požadovanou vlastností.