

58. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie Z7

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011. pp. 128–130.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405176>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



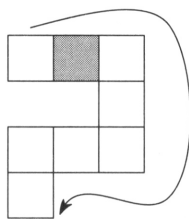
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 - 1 - 1

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obr. 44 největším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.



Obr. 44

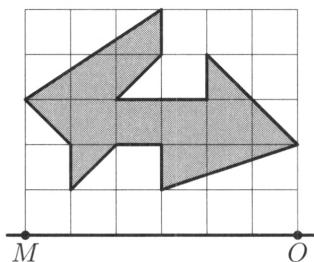
Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

(M. Dillingerová)

Z7 - 1 - 2

Na obr. 45 je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je



Obr. 45

zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděljuje šedý obrazec na dvě části o stej-

ném obsahu. V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku? (L. Šimůnek)

Z7 – I – 3

Turisté plánovali dlouhou túru na tři dny s tím, že každý den ujdou třetinu celé trasy. To dodrželi jen první den. Druhý den ušli pouze třetinu zbylé cesty a třetí den, unaveni, jen čtvrtinu zbytku. Posledních 24 km do cíle je dovezlo terénní auto.

Jak dlouhá měla být celá túra a kolik kilometrů turisté ušli první, druhý a třetí den? (M. Volfová)

Z7 – I – 4

Pan Horák je o 3 roky starší než jeho žena a jejich prvorozený syn je o 4 roky starší než jejich druhorozený. Všichni čtyři členové rodiny slaví narozeniny ve stejný den, nyní mají dohromady 81 let. Před 5 lety bylo členům této rodiny dohromady 62 let. Urči dnešní stáří rodičů i obou dětí. (M. Volfová)

Z7 – I – 5

Zuzka napsala pětímístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo. Které pětímístné číslo Zuzka napsala? (L. Hozová)

Z7 – I – 6

Je dán obdélník $ABCD$. Bodem A vedeme přímku, která protne úsečku CD v bodě X tak, že pro obsahy vzniklých útvarů platí $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Bodem X vedeme přímku, která protne úsečku AB v bodě Y tak, že platí $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$. Nakonec bodem Y vedeme přímku, která protne úsečku XC v bodě Z tak, že platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$.

Vypočítej poměr obsahů $S_{AXD} : S_{AXZY}$. (M. Dillingerová)

Z7 – II – 1

Radovan čte zajímavou knížku. Včera přečetl 15 stran, dnes dalších 12 stran. S údivem si uvědomil, že součet čísel stran, které přečetl včera, je stejný jako součet čísel stran, které přečetl dnes. Kterou stránkou

začne zítřejší četbu? (Radovan při četbě žádné stránky nepřeskakuje ani nečte žádnou stránku podruhé. Denní četbu nikdy neskončí rozečtenou stránkou.) (M. Petrová)

Z7 – II – 2

Tajný agent se snaží rozluštit přístupový kód. Zatím získal tyto informace:

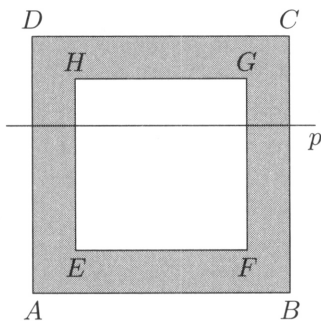
- a) je to čtyřmístné číslo,
- b) není dělitelné sedmi,
- c) číslice na místě desítek je součtem číslice na místě jednotek a číslice na místě stovek,
- d) číslo vytvořené z prvních dvou číslic kódu (v tomto pořadí) je patnáctinásobkem poslední číslice kódu,
- e) první a poslední číslice kódu (v tomto pořadí) tvoří prvočíslo.

Stačí mu tyto informace k rozluštění kódu? Svůj závěr zdůvodni.

(M. Petrová)

Z7 – II – 3

Na obr. 46 je čtverec $ABCD$ o straně délky 10 cm a menší čtverec $EFGH$, jehož vrcholy E, F, G, H leží na úhlopříčkách AC, BD čtverce $ABCD$. Plocha, která leží uvnitř čtverce $ABCD$ a přitom vně čtverce $EFGH$, je označena šedě. Přímka p , která je rovnoběžná s AB ve vzdálenosti 6,5 cm a prochází čtvercem $EFGH$, rozděluje šedou plochu na dvě části. Obsah jedné této části je o $13,8 \text{ cm}^2$ větší než obsah druhé. Vypočítej délku strany EF . (L. Šimůnek)



Obr. 46