57. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010. pp. 61–92.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405151

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c s vlastností: Každá z rovnic

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0,$$
$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0,$$
$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0$$

má v oboru reálných čísel tři různé kořeny, celkem je to však pouze pět různých čísel. (*Jaromír Šimša*)

A – I – 2

V rovině je dána úsečka AV a ostrý úhel velikosti α. Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům ABC s vnitřním úhlem α při vrcholu A, jejichž výšky se protínají v bodě V. (*Pavel Leischner*)

A – I – 3

Množinu M tvoří $2n$ různých kladných reálných čísel, kde $n \geqq 2$. Uvažujme n obdélníků, jejichž rozměry jsou čísla z M, přičemž každý prvek z M je použit právě jednou. Určete, jaké rozměry mají tyto obdélníky, je-li součet jejich obsahů

a) největší možný; b) nejmenší možný. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všech možných délek k, pro které platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$. (*Martin Panák*)

A – I – 5

Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Příslušné body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokažte, že všechny takové kružnice m procházejí společným bodem různým od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky.

(*Ján Mazák*)

A – I – 6

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo a, $1 < a < 5^n$, takové, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$. (*Ján Mazák*)

A – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2, \\ y^2 - z &= x^2, \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

(*Ján Mazák*)

A – S – 2

Podstavy hranolu tvoří dva shodné konvexní n-úhelníky. Počet v vrcholů tohoto tělesa, počet s jeho stěnových úhlopříček a počet t jeho tělesových úhlopříček tvoří v jistém pořadí první tři členy aritmetické posloupnosti. Pro která n to platí? (Poznámka: Stěnami hranolu rozumíme boční stěny i podstavy. Tělesová úhlopříčka je úsečka, jež spojuje dva vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně.) (*Vojtech Bálint*)

A – S – 3

V rovině je dán úhel XSY a kružnice k o středu S. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY. Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC. (*Jaromír Šimša*)

A – II – 1

Nechť n je dané přirozené číslo větší než 1. Najděte všechny dvojice celých čísel s a t, pro které rovnice

$$x^n + sx - 2\,007 = 0, \qquad x^n + tx - 2\,008 = 0$$

mají v oboru reálných čísel aspoň jeden společný kořen.

(Jaromír Šimša)

A – II – 2

V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 o různých poloměrech, které mají vnější dotyk v bodě T. Uvažujme libovolné dva body $A \in k_1$ a $B \in k_2$, oba různé od bodu T a vybrané tak, že úhel ATB je pravý.

a) Dokažte, že všechny uvažované přímky AB procházejí týmž bodem.

b) Najděte množinu středů všech takových úseček AB. *(Ján Mazák)*

A – II – 3

Pole tabulky $n \times n$, kde $n \geqq 3$, jsou střídavě černá a bílá jako na obyčejné šachovnici, přičemž pole v levém horním rohu je černé. Bílá pole budeme barvit načerno následujícím postupem. V jednom kroku vybereme libovolný obdélník 2×3 nebo 3×2, ve kterém jsou ještě tři bílá pole, a tato tři pole začerníme. Pro která n můžeme po určitém počtu kroků začernit celou tabulku? *(Peter Novotný)*

A – II – 4

Nechť M je libovolný vnitřní bod polokružnice k se středem S a průměrem AB. Označme k_A kružnici vepsanou kruhové výseči ASM a k_B kružnici vepsanou kruhové výseči BSM. Dokažte, že kružnice k_A a k_B leží v opačných polorovinách vyťatých některou přímkou kolmou k úsečce AB. (Kružnice vepsaná kruhové výseči se dotýká obou ramen i hraničního oblouku.) *(Jaroslav Švrček)*

A – III – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

(Jaroslav Švrček)

A – III – 2

Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem A na kružnici k_1 a vrcholy B, C na kružnici k_2 zvolenými tak, že obě přímky AB, AC jsou tečnami kružnice k_2. Najděte

a) množinu středů kružnic vepsaných,

b) množinu průsečíků výšek

všech takových trojúhelníků ABC. (*Tomáš Jurík*)

A – III – 3

Zjistěte, pro která celá kladná čísla a, b je hodnota podílu

$$\frac{b^2 + ab + a + b - 1}{a^2 + ab + 1}$$

rovna celému číslu. (*Martin Panák*)

A – III – 4

Rovnost

$$2\,008 = 1\,111 + 666 + 99 + 88 + 44$$

je rozkladem čísla 2 008 na součet několika navzájem různých vícemístných čísel, z nichž každé je zapsáno stejnými číslicemi. Najděte

a) aspoň jeden takový rozklad čísla 8 002,

b) všechny takové rozklady čísla 8 002, které mají co nejmenší počet sčítanců (na jejich pořadí nebereme zřetel). (*Jaromír Šimša*)

A – III – 5

Karel v jistý okamžik na svých přesně jdoucích hodinkách zjistil, že konec velké ručičky, konec malé ručičky a vhodný bod na kružnici ciferníku tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Než tento jev nastal podruhé, uplynula doba t. Najděte největší možné t pro dané hodinky v závislosti na poměru k délek obou ručiček ($k > 1$), když poloměr kružnice ciferníku je shodný s délkou velké ručičky. (*Jaromír Šimša*)

A – III – 6

Určete největší reálné číslo p a nejmenší reálné číslo q, pro něž nerovnosti

$$p < \frac{a + t_b}{b + t_a} < q$$

platí v libovolném trojúhelníku ABC se stranami a, b a těžnicemi t_a, t_b.

(*Pavel Novotný*)

A – I – 1

Předpokládejme, že čísla a, b, c mají požadovanou vlastnost. Všimneme si nejdříve, že každé dvě z daných rovnic musejí mít společný kořen, jinak by měly dohromady šest různých kořenů.

Společné kořeny dvou z daných tří kubických rovnic, které pro potřeby řešení očíslujeme (1), (2) a (3), jsou kořeny kvadratických rovnic, které dostaneme jejich odečtením. Vypišme všechny tři „rozdílové“ rovnice, které nezávisejí na parametrech a, b, c (to je řešitelsky pozitivní zjištění), a rozložme rovnou jejich levé strany na kořenové činitele:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0, \qquad (2)\text{–}(1)$$

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0, \qquad (3)\text{–}(1)$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = 0. \qquad (3)\text{–}(2)$$

Vidíme, že rovnice (1) a (2) mají jediný společný kořen $x = 1$, takže mají dohromady právě pět různých kořenů. Proto musí být každý z kořenů rovnice (3) kořenem aspoň jedné z rovnic (1) nebo (2). Z uvedených rozkladů plyne, že číslo $x = 1$ je rovněž kořenem rovnice (3).

Vysvětleme, proč ostatní dva kořeny rovnice (3) nemohou být zároveň i kořeny jedné z rovnic (1) nebo (2). V opačném případě by jedna z rovnic (1), (2) měla s rovnicí (3) stejnou trojici kořenů, a proto by musely mít stejné koeficienty nejen u kubického členu. To však neplatí, neboť pro libovolnou hodnotu parametru c jsou čísla $c+1$, $c+2$, $c+3$ (tj. absolutní členy rovnic) vesměs různá.

Rovnice (3) má tedy kromě kořenu $x = 1$ ještě jeden společný kořen s rovnicí (1) a jeden společný kořen s rovnicí (2); podle rozkladů (3)–(1) a (3)–(2) vidíme, že se jedná o čísla $x = -\frac{1}{2}$ a $x = -2$. Levá strana rovnice (3) má proto rozklad

$$(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

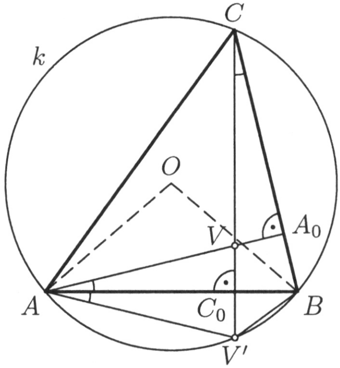
Odtud porovnáním s koeficienty zapsanými v (3) již dostaneme $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

Z našeho postupu plyne, že pro nalezené hodnoty a, b, c má rovnice (3) trojici kořenů 1, $-\frac{1}{2}$ a -2, že čísla 1, $-\frac{1}{2}$ jsou kořeny rovnice (1) a že čísla 1, -2 jsou kořeny rovnice (2). Musíme se ještě přesvědčit, že třetí kořeny rovnic (1) a (2) jsou další dvě (různá) čísla. Tyto třetí kořeny můžeme výhodně najít pomocí Viètových vztahů. Protože součin tří kořenů rovnice (1) je číslo opačné k absolutnímu členu $c+2$ rovnému nule, je číslo nula třetí kořen rovnice (1). Podobně součin tří kořenů rovnice (2) je roven -1, takže třetí kořen je číslo $x=\frac{1}{2}$.

Závěr. Jediným řešením úlohy jsou čísla $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$, $c=-2$.

A – I – 2

Nejprve dokažme jedno obecně užitečné tvrzení o průsečíku V výšek libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC. Označme V' průsečík přímky obsahující výšku CC_0 s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC (obr. 21). Pravoúhlé trojúhelníky C_0VA a A_0VC jsou podobné (shodují se ještě



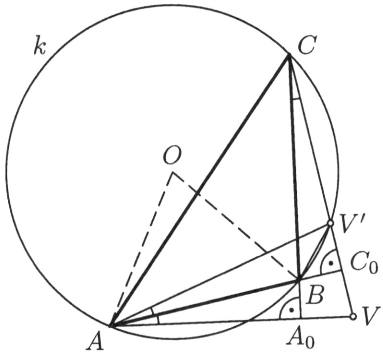
Obr. 21

v úhlu při vrcholu V), proto $|\sphericalangle BAA_0|=|\sphericalangle BCC_0|$. Úhly BCC_0 a $V'AB$ jsou shodné obvodové úhly nad obloukem $V'B$, takže *body V a V' jsou souměrně sdruženy podle přímky AB.*

Označíme-li úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, bude $|\sphericalangle ACV'|=|\sphericalangle ACC_0|=90°-\alpha$, takže pro délku úsečky AV díky uvedené souměrnosti dostaneme

$$|AV|=|AV'|=2r\sin(90°-\alpha)=2r\cos\alpha, \tag{1}$$

kde r je velikost poloměru kružnice k opsané trojúhelníku ABC (a zároveň i trojúhelníku $AV'C$). Stejný vzorec (1) platí pro trojúhelník ABC s ostrým vnitřním úhlem α při vrcholu A i v případě, kdy jeden z ostatních dvou vnitřních úhlů (např. u vrcholu B) je pravý nebo tupý (obr. 22). Celou úvahu můžeme zopakovat slovo od slova.



Obr. 22

Nyní se už pustíme do řešení soutěžní úlohy se zadanými body A, V a danou velikostí ostrého úhlu α. Vzorec (1) nás přivádí k závěru, že kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC budou mít týž poloměr

$$r = \frac{|AV|}{2\cos\alpha}, \tag{2}$$

tudíž jejich středy O budou mít od daného bodu A pevnou, právě určenou vzdálenost r. Je ovšem zapotřebí určit, jakou část kružnice $l(A, r)$ středy O vyplní; jistě to bude množina souměrná podle přímky AV, neboť souměrnost s osou AV převádí vyhovující trojúhelník na vyhovující trojúhelník. S tímto cílem vyjádříme velikost úhlu VAO pomocí vnitřních úhlů $\beta = |\sphericalangle ABC|$ a $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Budeme přitom předpokládat, že platí $\beta \geqq \gamma$ (v opačném případě lze od samého počátku označení vrcholů B, C navzájem vyměnit).

Předpokládejme nejprve, že $\beta < 90°$, takže trojúhelník ABC je ostroúhlý a můžeme opět pracovat s obr. 21. Z rovnoramenného trojúhelníku ABO s vnitřním úhlem 2γ při hlavním vrcholu O vidíme, že $|\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$, z pravoúhlého trojúhelníku BAA_0 zase plyne $|\sphericalangle BAV| = 90° - \beta$. Vzhledem k tomu, že oba body O, V leží v polorovině ABC, dostáváme pro úhel VAO vyjádření

$$|\sphericalangle VAO| = |\sphericalangle BAO| - |\sphericalangle BAV| = (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta - \gamma$$

(připomeňme, že $\beta \geqq \gamma$).

V případě $\beta \geqq 90°$ podle obr. 22 podobně zjistíme, že $|\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$ a $|\sphericalangle BAV| = \beta - 90°$, tudíž

$$|\sphericalangle VAO| = |\sphericalangle BAO| + |\sphericalangle BAV| = (90° - \gamma) + (\beta - 90°) = \beta - \gamma.$$

Vidíme, že $|\sphericalangle VAO| = \beta - \gamma$ bez ohledu na to, zda je trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý.

Nyní už snadno dokončíme řešení úlohy: z odvozené velikosti úhlu VAO plyne odhad

$$|\sphericalangle VAO| = \beta - \gamma < \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

takže bod O leží uvnitř oblouku kružnice $l(A, r)$ určeného nerovností

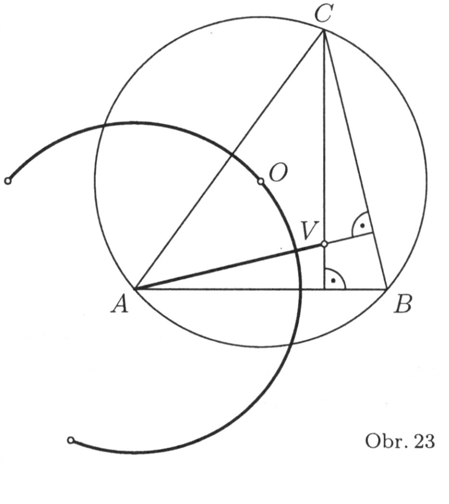
$$|\sphericalangle VAO| < 180^\circ - \alpha.$$

Zvolíme-li naopak úhel ε, $0^\circ \leqq \varepsilon < 180^\circ - \alpha$, snadno vypočteme, jakou velikost musí mít vnitřní úhly β a γ, aby platilo $|\sphericalangle VAO| = \varepsilon$:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha + \varepsilon}{2}, \quad \gamma = \frac{180^\circ - \alpha - \varepsilon}{2}.$$

Vepíšeme-li tedy do jakékoliv kružnice o poloměru r ze vzorce (2) pomocný trojúhelník $A'B'C'$ s daným úhlem α při vrcholu A' a vypočtenými úhly β, γ při vrcholech B', resp. C', pro jeho ortocentrum V' a střed O' opsané kružnice budou splněny rovnosti $|A'V'| = |AV|$ a $|\sphericalangle V'A'O'| = \varepsilon$. Ve shodném zobrazení, které převede úsečku $A'V'$ na úsečku AV, pak trojúhelník $A'B'C'$ přejde ve vyhovující trojúhelník ABC, jehož střed O opsané kružnice bude ležet na kružnici l a vyhovovat rovnosti $|\sphericalangle VAO| = \varepsilon$.

Závěr. Hledanou množinou středů O opsaných kružnic je oblouk kružnice o středu A a poloměru $r = \frac{1}{2}|AV|/\cos\alpha$ určený nerovností $|\sphericalangle VAO| < 180^\circ - \alpha$ (krajní body tohoto oblouku tedy do výsledné množiny nepatří, obr. 23).



Obr. 23

A – I – 3

Věnujme se nejdříve nejjednodušší situaci, kdy $n = 2$. Danou množinu M tak tvoří čtyři kladná čísla, která označíme podle velikosti

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Máme pouze tři možnosti, jak požadovaným způsobem sestavit dvojici obdélníků. Vypišme na třech řádcích jejich rozměry:

$$\begin{array}{ccc} a_1 \times a_2 & \text{a} & a_3 \times a_4, \\ a_1 \times a_3 & \text{a} & a_2 \times a_4, \\ a_1 \times a_4 & \text{a} & a_2 \times a_3, \end{array}$$

a ukažme, že součty obsahů těchto obdélníků jsou v uvedeném pořadí klesající, tj. že platí

$$a_1a_2 + a_3a_4 > a_1a_3 + a_2a_4 > a_1a_4 + a_2a_3. \tag{1}$$

Místo dvou snadných důkazů (proveďte sami) poznamenejme, že obě nerovnosti jsou téhož typu a lze je zdůvodnit obecným pravidlem

$$a < b,\ c < d \quad \Longrightarrow \quad ac + bd > ad + bc, \tag{2}$$

jež platí pro libovolnou čtveřici reálných čísel a, b, c, d díky rovnosti

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (b - a)(d - c).$$

Skutečně, levou nerovnost z (1) dostaneme z pravidla (2) volbou

$$a = a_1, \quad b = a_4, \quad c = a_2, \quad d = a_3 \quad (\text{platí } a_1 < a_4 \text{ a } a_2 < a_3),$$

pravou nerovnost pak volbou

$$a = a_1, \quad b = a_2, \quad c = a_3, \quad d = a_4 \quad (\text{platí } a_1 < a_2 \text{ a } a_3 < a_4).$$

Tím je úloha v případě $n = 2$ vyřešena. Tato zkušenost nás jistě přivede k odhadu výsledku pro obecné $n \geqq 2$:

Jsou-li $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ prvky dané množiny M, *pak největší sumární obsah má jediná n-tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_2$, $a_3 \times a_4$, …, $a_{2n-1} \times a_{2n}$; nejmenší sumární obsah má jediná n-tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_{2n}$, $a_2 \times a_{2n-1}$, …, $a_n \times a_{n+1}$.*

K důkazu prvního závěru předpokládejme, že vyhovující n-tice obdélníků je sestavena tak, že čísla a_1, a_2 nejsou rozměry téhož obdélníku. Pak v takové n-tici jsou obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_2 \times a_j$, kde $i, j > 2$. Zaměňme je obdélníky $a_1 \times a_2$ a $a_i \times a_j$. Dostaneme (jinou) vyhovující n-tici obdélníků, která bude mít oproti původní n-tici větší sumární obsah, neboť platí

$$a_1a_2 + a_ia_j > a_1a_i + a_2a_j,$$

a to opět díky pravidlu (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_2 < a_i$. Z této úvahy plyne: největší sumární obsah může mít jen taková n-tice uvažovaných obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_2$. Tento obdélník můžeme tedy dát stranou a uvažovat úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n-2$ prvcích $a_3 < a_4 < \ldots < a_{2n}$. Opakováním předchozího postupu vytvoříme obdélník $a_3 \times a_4$ a provedeme další redukci množiny atd. (formálně můžeme využít matematickou indukci). Hypotéza o soustavě obdélníků s největším sumárním obsahem je tak dokázána.

Zcela obdobně dokážeme závěr o soustavě s nejmenším sumárním obsahem. Nejsou-li a_1, a_{2n} rozměry téhož obdélníku, jsou mezi uvažovanými obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_j \times a_{2n}$ (kde $1 < i, j < 2n$), které zaměníme obdélníky $a_1 \times a_{2n}$ a $a_i \times a_j$, čímž se sumární obsah obdélníků zmenší, neboť platí

$$a_1a_i + a_ja_{2n} > a_1a_{2n} + a_ia_j.$$

podle pravidla (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_i < a_{2n}$. Nejmenší sumární obsah proto může mít jen taková vyhovující n-tice obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_{2n}$. Tento obdélník dáme stranou a uvažujeme úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n-2$ prvcích $a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n-1}$. Vše ostatní je už zbytečné opakovat.

A – I – 4

Ze zadání úlohy plyne, že všechny členy uvažovaných posloupností budou děliteli jejich posledního členu, rovnému číslu 969 969. Najdeme proto nejprve rozklad tohoto čísla na prvočinitele:

$$969\,969 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19. \tag{1}$$

Nyní již snadno můžeme vytvářet příklady vyhovujících posloupností různých délek. Vypišme kupříkladu tu nejkratší, jednu z nejdelších a ještě jednu další:

$$(a_1, a_2) = (1, 969\,969),$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (1, 13, 91, 1\,729, 5\,187, 57\,057, 969\,969),$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 21, 4\,641, 88\,179, 969\,969).$$

(Zkontrolujte uvedené příklady výpočtem podílů a_{i+1}/a_i pro všechna přípustná i).

Experimentováním s konkrétními posloupnostmi dojdeme k poznání jejich společných vlastností, které je plně charakterizují:

Libovolný člen a_i každé vyhovující posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ je součinem několika (v případě $i = 1$ žádného, v případě $i = k$ všech) z šesti různých prvočísel z rozkladu (1), přitom (v případě $i < k$) člen a_{i+1} má kromě všech činitelů členu a_i ještě alespoň jednoho nového činitele navíc (posloupnost má být rostoucí!). Naopak, každá taková konečná posloupnost je vyhovující.

Z uvedeného vyplývá způsob, jak „úsporně“ zadat každou vyhovující posloupnost; stačí jen uvést, jak se noví činitelé postupně objevují, tj. zadat posloupnost podílů

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}, \frac{a_k}{a_{k-1}}, \tag{2}$$

do jejichž rozkladů na prvočinitele je šest prvočísel z (1) rozděleno (v každém aspoň jedno). Proto je hledaný počet vyhovujících posloupností roven počtu rozdělení šesti daných prvočísel do jedné nebo několika *očíslovaných* neprázdných skupin (odpovídajících prvočinitelům podílů (2), takže na pořadí prvočísel ve skupině nezáleží). Slovo „očíslovaných“ znamená, že na pořadí skupin záleží. Například pro rozdělení do dvou skupin $\{3, 11, 19\}$, $\{7, 13, 17\}$ dostaneme podle toho, v jakém pořadí obě skupiny vezmeme, dvě vyhovující posloupnosti $(1, u, uv)$ a $(1, v, uv)$, kde $u = 3 \cdot 11 \cdot 19$ a $v = 7 \cdot 13 \cdot 17$.

Dospěli jsme tak ke kombinatorické úloze určení hodnoty $P(6)$, kde $P(n)$ značí počet rozdělení n-prvkové množiny X do libovolného počtu očíslovaných neprázdných podmnožin $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Není schůdné hodnotu $P(6)$ vypočítat *přímo*, zato bude možné hodnoty $P(n)$ počítat *postupně* pro $n = 1$, $n = 2$, atd. až po potřebné $n = 6$. Takovému způsobu výpočtu říkáme *rekurentní*. V naší úloze bude výpočet založen na rekurentní rovnici

$$P(n) = \binom{n}{1} P(n-1) + \binom{n}{2} P(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1} P(1) + 1 \tag{3}$$

platné pro každé $n \geqq 2$, jak nyní ukážeme.

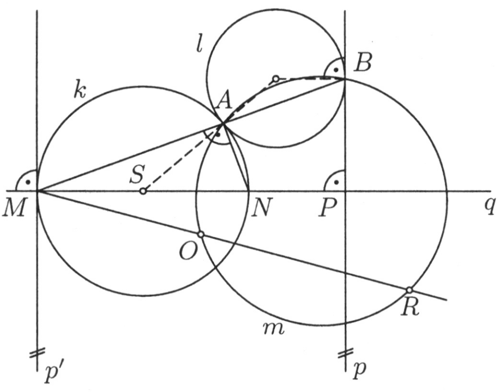
Všechna uvažovaná rozdělení n-prvkové množiny X rozdělíme do n skupin podle počtu j prvků první podmnožiny X_1 $(1 \leqq j \leqq n)$. První podmnožinu X_1 o j prvcích lze vybrat právě $\binom{n}{j}$ způsoby, právě $P(n-j)$ způsoby pak lze zbylou množinu $X' = X \setminus X_1$ rozdělit na neprázdné očíslované podmnožiny $X_2, X_3, X_4, \ldots$ (Platí to i v případě $j = n$, když položíme $P(0) = 1$, neboť už není co rozdělovat.) Podle pravidla součinu je proto počet všech rozdělení původní množiny X s první množinou X_1 o j prvcích roven $\binom{n}{j} P(n-j)$. Tím je vzorec (3), na jehož pravé straně poslední člen 1 odpovídá hodnotě $j = n$, dokázán.

Ze zřejmé hodnoty $P(1) = 1$ opakovaným užitím vzorce (3) vypočteme další hodnoty $P(2) = 3$, $P(3) = 13$, $P(4) = 75$, $P(5) = 541$ a $P(6) = 4\,683$.

Závěr. Existuje právě 4 683 vyhovujících posloupností.

A – I – 5

Jedna z vyhovujících kružnic l je znázorněna na obr. 24. Bod A vnějšího dotyku kružnic k, l je jejich (vnitřním) středem stejnolehlosti, v níž tečně p kružnice l odpovídá s ní rovnoběžná tečna p' kružnice k. Její bod dotyku M s kružnicí k leží na ose q kružnice k, která je kolmá na přímku p. Přitom ze dvou průsečíků M, N přímky q s kružnicí k je bod M ten vzdálenější od přímky p, neboť úsečka spojující stejnolehlé body dotyku M a B protíná kružnici k v bodě A (středu příslušné stejnolehlosti).



Obr. 24

Bod M tedy na volbě kružnice l nezávisí. Body $A \in k$ a $B \in p$ pochopitelně ano, ukažme však, že jejich vzájemná poloha na polopřímce s počátkem M je vázána podmínkou

$$|MA| \cdot |MB| = |MN| \cdot |MP|, \tag{1}$$

kde P je průsečík kolmic p a q. To jednoduše plyne z podobnosti

$$|MA| : |MN| = |MP| : |MB|$$

pravoúhlých trojúhelníků AMN, PMB. Vztah (1) lze rovněž zdůvodnit pomocí mocnosti bodu M ke kružnici sestrojené nad průměrem NB (jež prochází body P, A podle Thaletovy věty).

Teprve nyní vstoupí do našich úvah daný bod O. Na obr. 24 je kružnice l vybrána tak, že odpovídající přímka AB bodem O neprochází, takže existuje kružnice m opsaná trojúhelníku OAB. Podle zadání platí $O \notin k$, a tedy $O \neq M$, takže je určena polopřímka MO, která kromě bodu O bude mít s kružnicí m společný ještě jeden bod, který označíme R (v případě, kdy MO je tečna kružnice m, položíme $R = O$).[1] Dvojím vyjádřením mocnosti bodu M ke kružnici m pak dostaneme

$$|MA| \cdot |MB| = |MO| \cdot |MR|,$$

odkud porovnáním s (1) zjistíme, že úsečka MR má délku

$$|MR| = \frac{|MN| \cdot |MP|}{|MO|},$$

která zřejmě nezávisí na volbě kružnice l. Protože bod R navíc leží na pevné polopřímce MO, je v případě $|MR| \neq |MO|$ bod R společným bodem všech kružnic m ($R \neq O$), v případě $|MR| = |MO|$ je přímka MO jejich společná tečna. Tím je řešení úlohy u konce.

A – I – 6

Začneme poněkud obšírněji případem $n = 1$. Najdeme *všechna* celá čísla a s vlastností $5 \mid a^3 - a + 1$. Nejprve sestavíme tabulku hodnot $r^3 - r + 1$ pro všechny možné zbytky r při dělení pěti, tedy pro $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

r	0	1	2	3	4
$r^3 - r + 1$	1	1	7	25	61

[1] Zdůrazněme, že vzhledem ke vzájemné poloze bodů M, A, B leží bod M ve vnější oblasti *každé* kružnice procházející body A, B, tedy i kružnice m. Polopřímka MO tedy má s kružnicí m, není-li její tečnou, společné skutečně dva různé body.

Pro ostatní celá čísla a už hodnoty $a^3 - a + 1$ počítat nemusíme. Je-li totiž r zbytek čísla a při dělení pěti, tedy $a = 5q + r$ pro vhodné celé q, pak čísla $a^3 - a + 1$ a $r^3 - r + 1$ dávají při dělení pěti stejný zbytek, neboť jejich rozdíl

$$(a^3 - a + 1) - (r^3 - r + 1) = (a^3 - r^3) - (a - r) = \\ = (a - r)(a^2 + ar + r^2 - 1)$$

je dělitelný číslem $a - r = 5q$, je tedy násobkem pěti.[2] Z uvedené tabulky vidíme, že pro celé a platí $5 \mid a^3 - a + 1$, právě když $a = 5q + 3$.

Zadanou úlohu vyřešíme tak, že indukcí vzhledem k číslu n dokážeme existenci celého čísla a_n z intervalu $(1, 5^n)$, jež vyhovuje podmínce, že 5^n dělí $a_n^3 - a_n + 1$. Pro $n = 1$ podle prvního odstavce dokazované tvrzení splňuje (v intervalu $(1, 5)$!) jediné číslo $a_1 = 3$.

V druhém indukčním kroku předpokládejme, že pro některé přirozené k známe číslo a_k z intervalu $(1, 5^k)$ s vlastností $5^k \mid a_k^3 - a_k + 1$, a na základě znalosti a_k sestrojme vyhovující číslo a_{k+1}. Zbytkem čísla $a_k^3 - a_k + 1$ při dělení číslem 5^{k+1} musí být číslo dělitelné 5^k, tedy jedno z čísel

$$0,\ 5^k,\ 2 \cdot 5^k,\ 3 \cdot 5^k,\ 4 \cdot 5^k.$$

Zapišme proto tento zbytek ve tvaru $r \cdot 5^k$, kde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a hledejme číslo a_{k+1} ve tvaru $a_{k+1} = a_k + s \cdot 5^k$ pro vhodné $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. (Je ihned jasné, že v případě $r = 0$ můžeme vzít $a_{k+1} = a_k$, tedy $s = 0$). I když hodnotu s vybereme až za chvíli, z podmínky $1 < a_k < 5^k$ a nerovností $a_k \leqq a_{k+1} \leqq a_k + 4 \cdot 5^k$ už nyní plyne, že podmínka $1 < a_{k+1} < 5^{k+1}$ bude splněna (ať dopadne výběr s jakkoliv). Pro číslo a_{k+1} zvoleného tvaru dostáváme

$$\frac{a_{k+1}^3 - a_{k+1} + 1}{5^{k+1}} = \frac{\left(a_k + s \cdot 5^k\right)^3 - \left(a_k + s \cdot 5^k\right) + 1}{5^{k+1}} = \\ = \frac{a_k^3 + 3a_k^2 s \cdot 5^k + 3a_k s^2 5^{2k} + s^3 5^{3k} - a_k - s \cdot 5^k + 1}{5^{k+1}} = \\ = 3a_k s^2 5^{k-1} + s^3 5^{2k-1} + \frac{\left(a_k^3 - a_k + 1\right) - r \cdot 5^k}{5^{k+1}} + \frac{\left(3a_k^2 - 1\right) s + r}{5}.$$

Hodnota posledního součtu bude celočíselná, budou-li takové oba závěrečné zlomky. První z nich tuto vlastnost má díky tomu, jak jsme

[2] Stejně snadno se dokáže obecnější užitečný poznatek: pro libovolný mnohočlen F s celočíselnými koeficienty a libovolná celá a, b je rozdíl $F(a) - F(b)$ celočíselným násobkem rozdílu $a - b$.

zavedli číslo $r \in \{0,1,2,3,4\}$. Proto je zapotřebí jen najít takové $s \in \{0,1,2,3,4\}$, aby i druhý zlomek byl celočíselný, tedy aby číslo $(3a_k^2-1)\,s+r$ bylo dělitelné pěti. Jistě stačí ukázat, že pět čísel

$$c(s)=\left(3a_k^2-1\right)s+r, \qquad \text{kde } s\in\{0,1,2,3,4\},$$

dává při dělení pěti navzájem různé zbytky (jeden z nich pak bude nula). Kdyby tomu tak nebylo, platilo by $5 \mid c(s)-c(s')$ pro některá dvě různá $s, s' \in \{0,1,2,3,4\}$; z vyjádření

$$c(s)-c(s')=\left(3a_k^2-1\right)(s-s')$$

bychom pak usoudili, že číslo $3a_k^2-1$ je dělitelné pěti. Vztah $5 \mid 3a^2-1$ však neplatí pro žádné celé a; podle úvah z prvního odstavce se stačí o tom přesvědčit pro pět hodnot $a \in \{0,1,2,3,4\}$:

a	0	1	2	3	4
$3a^2-1$	-1	2	11	26	47

Tím je celý důkaz matematickou indukcí ukončen. Pro zajímavost dodejme, že jsme schopni snadno vysvětlit, že naše číslo $3a_k^2-1$ dává při dělení pěti vždy zbytek 1 (takže v případě $r \neq 0$ vyhovuje $s=5-r$). Skutečně, vzhledem k tomu, že $k \geqq 1$, z podmínky $5^k \mid a_k^3-a_k+1$ plyne $5 \mid a_k^3-a_k+1$, což je podle prvního odstavce splněno, právě když $a_k=5k+3$; číslo $3a_k^2-1$ tudíž při dělení pěti dává stejný zbytek jako číslo $3\cdot 3^2-1=26$.

A – S – 1

Sečtením všech tří rovnic po zrušení kvadratických členů dostaneme

$$x+y+z=0. \tag{1}$$

Odtud vyjádříme $z=-x-y$ a dosadíme do první rovnice soustavy. Obdržíme $x^2-y=(-x-y)^2$, což po úpravě dá rovnici $y(2x+y+1)=0$. Rozlišíme proto, který z obou činitelů na její levé straně je roven nule.

V případě $y=0$ z rovnice (1) obdržíme $z=-x$ a po dosazení y, z do původní soustavy dostaneme pro neznámou x jedinou podmínku $x(x-1)=0$, kterou splňuje pouze $x=0$ a $x=1$. Jim odpovídají řešení (x,y,z) tvaru $(0,0,0)$ a $(1,0,-1)$.

V případě, kdy $2x + y + 1 = 0$ neboli $y = -2x - 1$, z (1) máme $z = -x - y = x + 1$. Po dosazení y, z do původní soustavy dostaneme pro neznámou x jedinou podmínku $x(x + 1) = 0$, kterou splňují pouze $x = 0$ a $x = -1$. Jim odpovídají řešení (x, y, z) tvaru $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Závěr: Daná soustava má právě čtyři řešení (x, y, z): trojice $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Jiné řešení. Sečtením dvou prvních rovnic dané soustavy eliminujeme neznámou x a dostaneme rovnici $y^2 - z^2 = y + z$, kterou lze zapsat v součinovém tvaru

$$(y + z)(y - z - 1) = 0. \tag{2}$$

Rozlišíme opět, který ze dvou činitelů v poslední rovnici se rovná nule.

V případě $y + z = 0$ ze třetí rovnice dané soustavy vyjde $x = 0$ a z prvních dvou rovnic po dosazení $x = 0$ a $z = -y$ dostaneme pro neznámou y jedinou podmínku $y(y + 1) = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = -1$. Odpovídající řešení (x, y, z) jsou $(0, 0, 0)$ a $(0, -1, 1)$.

V případě, kdy $y - z - 1 = 0$ neboli $z = y - 1$, obdržíme ze třetí rovnice soustavy $x = z^2 - y^2 = (y - 1)^2 - y^2 = 1 - 2y$. Dosazením x, z dostaneme pro neznámou y jedinou podmínku $y(y - 1) = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = 1$. Odpovídající řešení (x, y, z) jsou $(1, 0, -1)$ a $(-1, 1, 0)$.

A – S – 2

Každý n-boký hranol má právě n vrcholů v každé ze svých podstav, takže platí $v = 2n$. Z každého vrcholu vychází $n - 3$ úhlopříček ležících v podstavě a dvě úhlopříčky ležící v bočních stěnách, celkem je to $n - 1$ stěnových úhlopříček. Z $2n$ vrcholů tedy vychází $2n(n - 1)$ stěnových úhlopříček, každá z nich je však započítána dvakrát, proto $s = n(n - 1)$. Podobně určíme počet t tělesových úhlopříček: z každého vrcholu jich vychází $n - 3$ (do všech vrcholů druhé podstavy s výjimkou těch tří vrcholů, se kterými je daný vrchol spojen hranou nebo úhlopříčkou v boční stěně), proto $t = 2n(n - 3) : 2 = n(n - 3)$.

Hledáme ta celá $n \geqq 3$, pro něž čísla

$$v = 2n, \quad s = n(n - 1) \quad \text{a} \quad t = n(n - 3)$$

tvoří ve vhodném pořadí trojici x, y, z s vlastností $y - x = z - y$ neboli $y = \frac{1}{2}(x + z)$. Snadným dosazením zjistíme, že pro $n = 3$ jde o nevyhovující trojici čísel 6, 6, 0, zatímco pro $n = 4$ vychází vyhovující trojice 8, 12, 4 (platí $8 = \frac{1}{2}(4+12)$). Pro libovolné $n \geqq 5$ máme $n-1 > n-3 \geqq 2$, odkud po násobení číslem n dostaneme $s > t \geqq v$, takže požadovaná rovnost s aritmetickým průměrem musí být tvaru $t = \frac{1}{2}(v+s)$. Po dosazení dostáváme rovnici

$$n(n-3) = \frac{2n + n(n-1)}{2}$$

s jediným přípustným kořenem $n = 7$ (kořen $n = 0$ nemá reálný smysl).

Závěr: Vyhovují jedině $n = 4$ a $n = 7$.

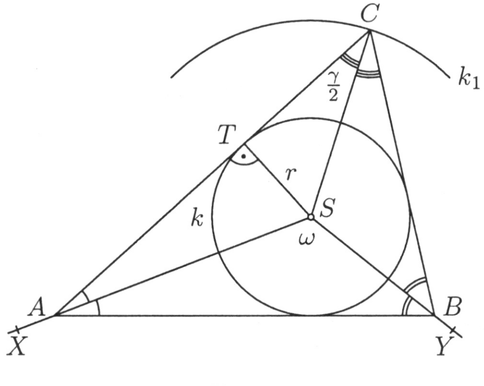
A – S – 3

Označme r poloměr dané kružnice k a ω velikost daného (konvexního) úhlu XSY. V libovolném vyhovujícím trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem vnitřní úhly. V trojúhelníku ABS platí (obr. 25)

$$\omega = |\sphericalangle ASB| = 180^\circ - |\sphericalangle SAB| - |\sphericalangle SBA| = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

odkud plyne, že hledaná množina je prázdná, pokud $\omega \leqq 90^\circ$ nebo $\omega = 180^\circ$, a že všechny vyhovující trojúhelníky ABC mají vnitřní úhel γ, pro jehož velikost platí

$$\gamma = 2\omega - 180^\circ.$$



Obr. 25

Z pravoúhlého trojúhelníku CST, kde T je bod dotyku kružnice k se stranou AC (obr. 25), vyjádříme délku přepony SC vztahem

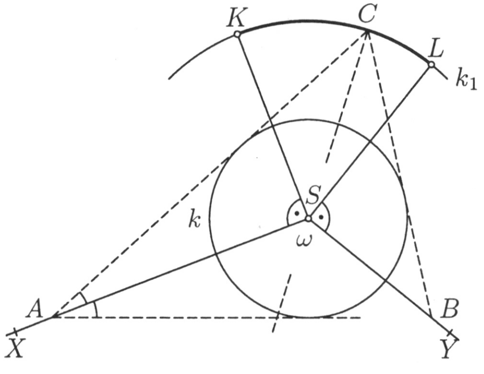
$$|SC| = \frac{|ST|}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r}{\sin(\omega - 90^\circ)}.$$

Bod C tak leží na kružnici k_1 o středu S a poloměru $r_1 = r/\sin(\omega - 90^\circ)$.

Stejně jako úhel ASB jsou i úhly ASC a BSC (neboli úhly XSC a YSC) tupé, neboť

$$|\sphericalangle ASC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BSC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Dohromady tak dostáváme, že bod C je vnitřním bodem oblouku KL kružnice k_1, který leží vně daného úhlu XSY a jehož krajní body K, L jsou určeny pravými úhly XSK a YSL (obr. 26).



Obr. 26

Vybereme-li naopak libovolný vnitřní bod C oblouku KL, polopřímky SX, SY a SC rozdělí rovinu na tři tupé úhly, přičemž polopřímka CS oddělí body X a Y. Z rovnosti $|SC| = r_1$ plyne, že tečna z bodu C ke kružnici k sestrojená v polorovině CSX svírá s polopřímkou CS ostrý úhel $\omega - 90^\circ$, takže protne polopřímku SX v bodě, který označíme A. Analogicky tečna z bodu C ke kružnici k sestrojená v polorovině CSY protne polopřímku SY v bodě, který označíme B.

Zvolme nyní hodnoty α, β, γ tak, aby $\omega - 90^\circ = \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle CSK| = \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle CSL| = \frac{1}{2}\alpha$, potom z plného úhlu u vrcholu S vyplývá

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \omega = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \quad \text{neboli } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Jak snadno spočteme, tečna z nalezeného bodu A ke kružnici k souměrně sdružená s tečnou AC podle přímky SX protíná polopřímku CS pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \alpha$, a podobně vyjde, že analogická tečna z nalezeného bodu B protne tutéž polopřímku pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \beta$. Součet obou uvedených úhlů je však $180°$, proto jsou obě tečny ke kružnici k rovnoběžné, a tedy totožné (oba příslušné body dotyku musejí totiž ležet uvnitř konvexního úhlu XSY). Nalezený trojúhelník ABC má proto požadované vlastnosti.

A – II – 1

Vyjádřením členu x^n z obou rovnic

$$x^n = 2\,007 - sx, \qquad x^n = 2\,008 - tx$$

dostaneme po porovnání rovnici $2\,007 - sx = 2\,008 - tx$, podle které společný kořen x může existovat jen v případě $s \neq t$ a musí být tvaru $x = 1/(t - s)$. Takové x je skutečně kořenem obou původních rovnic, právě když je kořenem jedné z nich; po dosazení např. do první rovnice dostaneme po úpravě ekvivalentní podmínku

$$(t - s)^{n-1} \cdot \bigl(s - 2\,007(t - s)\bigr) = -1.$$

Protože oba činitelé na levé straně jsou celá čísla, musí to být čísla 1 a -1 v některém pořadí, takže podle prvního činitele musí rovněž platit $t - s = \pm 1$.

a) Je-li $t - s = 1$, pak nalezená podmínka má tvar $s - 2\,007(t - s) = -1$. Dvojice rovnic pro neznámé hodnoty s, t

$$t - s = 1, \qquad s - 2\,007(t - s) = -1$$

má jediné řešení $s = 2\,006$ a $t = 2\,007$. (Společný kořen je $x = 1$.)

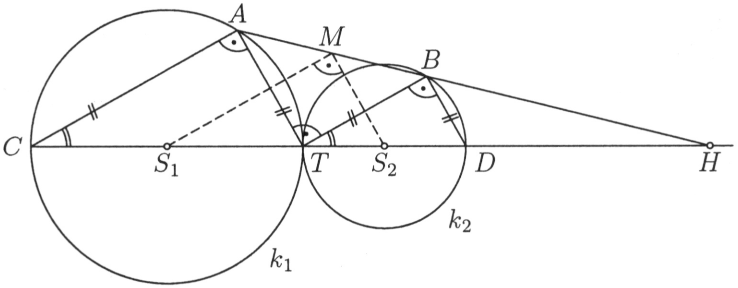
b) Je-li $t - s = -1$, pak $s - 2\,007(t - s) = (-1)^n$, odkud podobně jako v případě a) nalezneme řešení $s = (-1)^n - 2\,007$ a $t = (-1)^n - 2\,008$. (Společný kořen je $x = -1$.)

Závěr: Podmínce úlohy vyhovují právě dvě dvojice

$$(s, t) = (2\,006, 2\,007) \quad \text{a} \quad (s, t) = \bigl((-1)^n - 2\,007, (-1)^n - 2\,008\bigr).$$

A – II – 2

a) Na obr. 27 jsou zakresleny průměry CT, DT daných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, resp. $k_2(S_2, r_2)$ a jedna dvojice vyhovujících bodů A, B. Pro-



Obr. 27

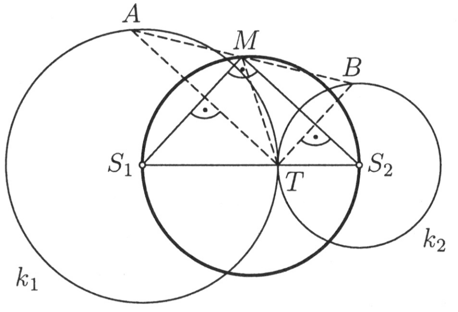
tože středná S_1S_2 a na ni kolmá společná tečna obou kružnic v bodě T rozdělují rovinu na čtyři kvadranty, je zřejmé, že oba body A, B, které s bodem T tvoří pravý úhel (a musejí proto ležet v sousedních kvadrantech), leží v téže polorovině určené přímkou S_1S_2.

Z Thaletovy věty plyne, že $CA \perp AT \perp TB \perp BD$, takže $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$. Proto podle věty uu platí $\Delta ACT \sim \Delta BTD$, odkud $|AC| : |BT| = |CT| : |TD| = r_1 : r_2$. Je-li např. $r_1 > r_2$, pak přímka AB protne polopřímku CT v takovém bodě H, že platí $|CH| : |TH| = r_1 : r_2$ (z podobných trojúhelníků ACH a BTH). Díky této úměře je bod H společný všem uvažovaným přímkám AB. Stejnou úvahu provedeme i v případě $r_1 < r_2$ (možnost $r_1 = r_2$ je zadáním úlohy vyloučena). Tím je tvrzení a) dokázáno.

Dodejme, že po zjištěních $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$ jsme se mohli rovnou odvolat na školské poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic. V případě $r_1 \neq r_2$ totiž vždy existuje vnější střed H stejnolehlosti kružnic k_1, k_2, v níž tětivy AC, AT kružnice k_1 musí přejít v rovnoběžné tětivy BT, resp. BD kružnice k_2, neboť krajní body C, T prvních dvou tětiv přejdou v krajní body T, resp. D druhých dvou tětiv. Proto bod A přejde do bodu B, takže přímka AB prochází vnějším středem H.

b) Označme M střed úsečky AB (obr. 1) a využijme znovu vztahy $CA \perp AT \perp TB \perp BD$. Úsečky S_1M a S_2M jsou střední příčky lichoběžníků $CTBA$, resp. $DTAB$, takže platí $S_1M \parallel TB \perp AT \parallel S_2M$, tedy úhel S_1MS_2 je pravý. Bod M proto leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2 a je různý od bodů S_1 a S_2 (úsečka AB střednou S_1S_2 neprotne).

Obráceně, je-li M libovolný bod nalezené Thaletovy kružnice různý od S_1, S_2 a sestrojíme-li tětivu TA kružnice k_1 kolmou k úsečce S_1M a tětivu TB kružnice k_2 kolmou k úsečce S_2M (obr. 28), bude úhel ATB stejně jako úhel S_1MS_2 pravý a přímky S_1M, S_2M budou osami úseček TA, resp. TB. Budou tudíž platit rovnosti $|MA| = |MT| = |MB|$, takže bod M bude středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku TAB, bude tedy středem jeho přepony AB.



Obr. 28

Hledanou množinou středů úseček AB je kružnice nad průměrem S_1S_2 s vyloučenými body S_1, S_2.

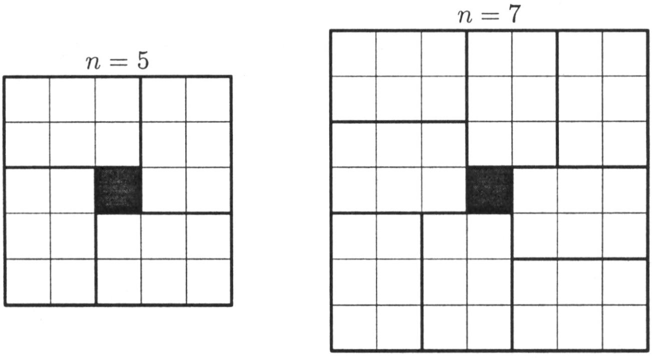
A – II – 3

V jednom kroku začerníme právě tři pole, proto musí být celkový počet bílých polí dané tabulky dělitelný třemi. Pro sudé n je tento počet roven $\frac{1}{2}n^2$ (černých i bílých polí je totiž stejný počet), pro liché n je počet bílých polí roven $\frac{1}{2}(n^2-1)$ (černých polí je o 1 více než bílých). Číslo $\frac{1}{2}n^2$, resp. $\frac{1}{2}(n^2-1)$ je násobkem tří, právě když $n = 6k$, resp. $n = 6k \pm 1$ pro vhodné celé k.

Nyní ukážeme, že pro všechna čísla n uvedených tvarů je začernění celé tabulky možné. Pro $n = 6k$ je to nasnadě, neboť celou tabulku můžeme rozdělit na obdélníky 2×3 a v každém z nich provést začernění. Všimněme si, že stejný postup lze uplatnit i v každém obdélníku, jehož jeden rozměr je dělitelný dvěma a druhý třemi.

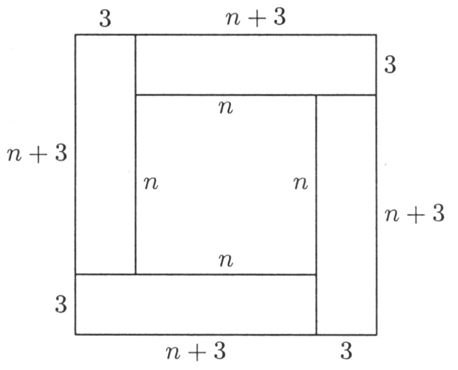
Pro čísla $n = 6k \pm 1$ popíšeme začernění pomocí matematické indukce. Pro nejmenší čísla $n = 5$ a $n = 7$ vidíte na obr. 29 obdélníky 2×3

a 3×2 v příslušných tabulkách, ve kterých provedeme začernění (pro lepší



Obr. 29

přehled je z původního šachovnicového obarvení začerněno jen středové, obdélníky nepokryté pole). Ve druhém indukčním kroku stačí ukázat, že lze-li začernit celou tabulku $n \times n$ pro některé liché n, lze udělat totéž i s tabulkou $(n+6) \times (n+6)$. Postup je jasný z obr. 30: nejprve začerníme „středovou" tabulku $n \times n$ (ta má černá rohová pole) a pak začerníme každý ze čtyř vyznačených obdélníků o rozměrech $(n+3) \times 3$ nebo $3 \times (n+3)$. (To je možné podle závěru předchozího odstavce, neboť pro liché n je číslo $n+3$ dělitelné dvěma.)

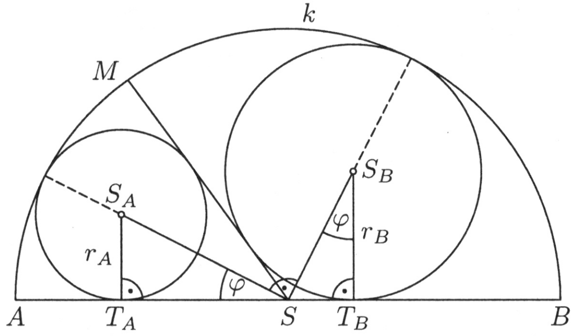


Obr. 30

Závěr: Celou tabulku můžeme začernit, právě když je číslo n tvaru $6k$, $6k+1$ nebo $6k-1$ pro nějaké celé k.

A – II – 4

Podle obr. 31 zaveďme označení $k_A(S_A, r_A)$, $k_B(S_B, r_B)$, $T_A \in AB \cap k_A$, $T_B \in AB \cap k_B$, $\varphi = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASM|$. Protože polopřímky SS_A, SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM, je úhel S_ASS_B pravý a platí $\varphi = |\sphericalangle ASS_A| = |\sphericalangle SS_BT_B|$.



Obr. 31

Přímka s požadovanou vlastností existuje, právě když kolmé průměty kružnic k_A, k_B na přímku AB mají nejvýše jeden společný bod. Těmito průměty jsou úsečky se středy T_A, T_B a jejich délky jsou $2r_A$ a $2r_B$, takže podmínka z předchozí věty je ekvivalentní nerovnosti

$$|T_AT_B| \geqq r_A + r_B. \tag{1}$$

Označme ještě r poloměr polokružnice k. Pak $|SS_A| = r - r_A$, $|SS_B| = r - r_B$ a z pravoúhlých trojúhelníků S_AST_A, S_BST_B plynou vyjádření

$$r_A = (r - r_A)\sin\varphi, \quad |T_AS| = (r - r_A)\cos\varphi,$$
$$r_B = (r - r_B)\cos\varphi, \quad |T_BS| = (r - r_B)\sin\varphi,$$

z nichž snadným výpočtem dostaneme

$$r_A = \frac{r\sin\varphi}{1+\sin\varphi}, \quad |T_AS| = \frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi},$$
$$r_B = \frac{r\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \quad |T_BS| = \frac{r\sin\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

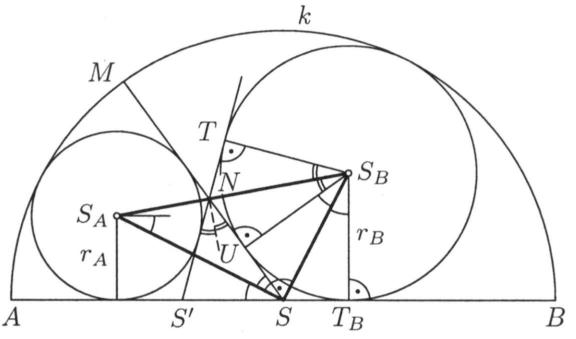
Protože $|T_AT_B| = |T_AS| + |T_BS|$, můžeme čtyři poslední vztahy dosadit do zkoumané nerovnosti (1) a tu dále ekvivalentně upravovat:

$$\begin{aligned}
\frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{r\sin\varphi}{1+\cos\varphi} &\geqq \frac{r\sin\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{r\cos\varphi}{1+\cos\varphi},\\
\cos\varphi(1+\cos\varphi) + \sin\varphi(1+\sin\varphi) &\geqq \sin\varphi(1+\cos\varphi) + \cos\varphi(1+\sin\varphi),\\
1 &\geqq 2\sin\varphi\cos\varphi,\\
\sin 2\varphi &\leqq 1.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, takže platí i nerovnost (1) a úloha je vyřešena.

Jiné řešení. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že pro poloměry obou kružnic platí $r_A < r_B$ (pro shodné kružnice k_A, k_B je tvrzení úlohy triviální), což je ekvivalentní nerovnosti $|SS_A| > |SS_B|$. Protože polopřímky SS_A, SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM, je úhel S_ASS_B pravý (obr. 32). V pravoúhlém trojúhelníku S_ASS_B pro úhel proti delší odvěsně S_AS tudíž platí $|\sphericalangle S_AS_BS| > 45°$ a naopak $|\sphericalangle S_BS_AS| < 45°$. To navíc znamená, že i úhel S_ASA, který je menší než úhel S_BS_AS (neboť $r_A < r_B$), je menší než $45°$, neboli úhel ASM je ostrý.

Označme N průsečík středné S_AS_B obou kružnic s tečnou SM a sestrojme druhou vnitřní společnou tečnu $S'N$ (obr. 32), kde S' je bod, v němž zmíněná tečna protne úsečku AS (obě tečny jsou souměrně sdruženy podle středné S_AS_B). Její dotykový bod s kružnicí k_B označme T a bod dotyku téže kružnice s první tečnou SM označme U.



Obr. 32

Zaměřme se teď na trojúhelník $S'SN$, který má u vrcholu S úhel shodný s úhlem ASM, jenž je, jak jsme již zdůvodnili, ostrý. Ukážeme nyní, že také úhel u vrcholu S' je ostrý. Ze zřejmé shodnosti dvojic úhlů $S'NS$, TS_BU a $S'SN$, T_BS_BU (jejich ramena jsou navzájem kolmá) pro součet úhlů u vrcholu S a N zkoumaného trojúhelníku $S'SN$ totiž plyne

$$|\sphericalangle S'NS| + |\sphericalangle S'SN| = |\sphericalangle TS_BU| + |\sphericalangle T_BS_BU| = 2|\sphericalangle S_AS_BS| > 90^\circ.$$

To znamená, že přímka obsahující výšku z vrcholu N v trojúhelníku $S'SN$ má požadovanou vlastnost: odděluje obě kružnice k_A, k_B a je kolmá na AB.

A – III – 1

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$(x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) = 0,$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0.$$

Druhý činitel je kladný pro jakákoliv reálná čísla x a y, neboť

$$x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = \tfrac{1}{2}(x + y)^2 + \tfrac{1}{2}(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}(y - 1)^2$$

a základy všech tří druhých mocnin nemohou být rovny nule současně. Proto pro každé řešení (x, y) dané soustavy musí platit $x - y = 0$ neboli $y = x$, což redukuje soustavu na jedinou rovnici $x + x^2 = x^3$ s kořeny $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Řešeními jsou právě tři dvojice (x, y), kde $y = x \in \{0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$.

Jiné řešení. Vyjádření $y = x^3 - x^2$ z druhé rovnice dosadíme do rovnice první. Dostaneme rovnici $x + (x^3 - x^2)^2 = (x^3 - x^2)^3$, po úpravě

$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - x = 0.$$

To je sice rovnice 9. stupně, ale pomůže nám taková úvaha: případu $x = y$ odpovídá jediná rovnice $x + x^2 = x^3$, proto získaný mnohočlen stupně 9 *musí být dělitelný* mnohočlenem $x^3 - x^2 - x$. Vydělením přejdeme k rovnici v součinovém tvaru

$$(x^3 - x^2 - x)(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1) = 0.$$

Druhý činitel je však kladný pro jakékoliv reálné číslo x, neboť

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2)^2 + (x^2 - x)^2 + (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

První složka x každého řešení (x, y) proto musí splňovat rovnici $x^3 - x^2 - x = 0$. Zbytek řešení je nasnadě.

Jiné řešení. Ještě jedním způsobem dokážeme, že $x = y$. Připusťme, že existuje řešení s vlastností $x > y$ (opačný případ je symetrický). Pak z rovností $x = y^3 - y^2$ a $y = x^3 - x^2$ plyne $y^3 - y^2 > y$ a $x^3 - x^2 < x$, tedy $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$, kde P je mnohočlen $P(x) = x^3 - x^2 - x$ s rozkladem $P(x) = x(x - x_2)(x - x_3)$, přitom $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 0$ a $x_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$. Nerovnosti $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$ znamenají, že platí $y \in (x_3, 0) \cup (x_2, \infty)$ a $x \in (-\infty, x_3) \cup (0, x_2)$, což s ohledem na $x > y$ lze upřesnit na $y \in (x_3, 0)$ a $x \in (0, x_2)$. Přímo z $y < 0$ ovšem plyne nerovnost $y^3 - y^2 < 0$, tedy $x < 0$, což je ve sporu s tím, že $x \in (0, x_2)$.

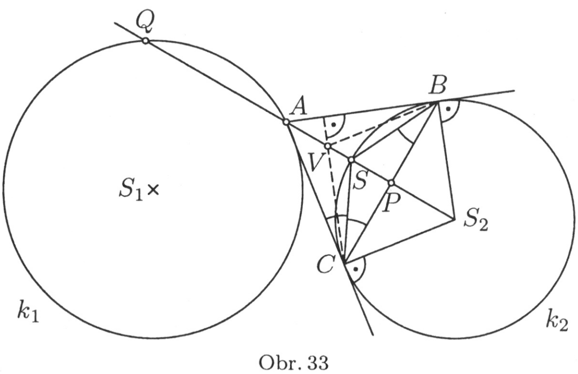
Jiné řešení. Opět dokážeme sporem, že $x = y$. Připusťme, že existuje řešení s vlastností $x > y$ (opačný případ je symetrický). Taková čísla x, y jsou zřejmě nenulová (z $x = 0$ plyne $y = 0$ a naopak), takže splňují jednu z podmínek $x > y > 0$, $x > 0 > y$ nebo $0 > x > y$.

Je-li $x > y > 0$, pak z vyjádření $x = y^2(y - 1)$ plyne $y > 1$, takže $x^2 > y^2 > 1$ a zároveň $x - 1 > y - 1$. Vynásobením těchto nerovností dostaneme $x^2(x - 1) > y^2(y - 1)$ neboli $y > x$, a to je spor.

Je-li $x > 0 > y$, pak $y^3 < 0$ a $y^2 > 0$, takže $y^3 - y^2 < 0$ neboli $x < 0$, což je opět spor. A konečně je-li $0 > x > y$, pak $x^3 > y^3$ a $x^2 < y^2$, takže $x^3 - x^2 > y^3 - y^2$ neboli $y > x$, a to je i tentokrát spor.

A – III – 2

a) Bod A může být na kružnici k_1 vybrán *libovolně*, body B a C jsou pak nutně body dotyku obou polopřímek s počátkem A, které jsou tečné ke kružnici k_2 (obr. 33). Vzhledem k jejich symetrii je ABC rovno-



Obr. 33

ramenný trojúhelník souměrný podle přímky AS_2. Středem kružnice jemu vepsané je průsečík S úsečky AS_2 s kružnicí k_2. Tento bod S totiž leží nejen na ose úhlu BAC, ale také na osách obou (souměrně sdružených) úhlů ABC a ACB, protože podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CBS|$ a ze symetrie $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCS|$. Obráceně, zvolíme-li na kružnici k_2 libovolně bod S tak, aby polopřímka S_2S protťala kružnici k_1 v aspoň jednom bodě, který označíme A a ke kterému sestrojíme podle první věty řešení vyhovující trojúhelník ABC, bude podle předchozích úvah bod S středem kružnice vepsané právě takovému trojúhelníku ABC. Hledanou množinou je tedy množina průsečíků kružnice k_2 se všemi úsečkami S_2A, kde bod A probíhá celou kružnici k_1. Je to zřejmě kratší z obou oblouků (včetně krajních bodů) kružnice k_2, které na ní vytínají obě polopřímky s počátkem S_2, jež se dotýkají kružnice k_1.

b) Dokážeme, že hledanou množinou je kružnice, která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem S_2 a kladným koeficientem

$$\lambda = \frac{2r_2^2}{|S_1S_2|^2 - r_1^2}.$$

Vysvětlíme totiž, proč ortocentrum V každého uvažovaného trojúhelníku ABC, jež z důvodu osové souměrnosti leží na polopřímce S_2A (díky ostrým úhlům ABC, ACB leží body A, V ve stejné polorovině s hranicí BC), je ve zmíněné stejnolehlosti obrazem druhého průsečíku Q polopřímky S_2A s kružnicí k_1, který — stejně jako první průsečík A — probíhá celou kružnici k_1 (v případě, kdy se polopřímka S_2A dotýká kružnice k_1, klademe $Q = A$). Potřebný vztah $|S_2V| : |S_2Q| = \lambda$ dostaneme vydělením rovností

$$|S_2A| \cdot |S_2Q| = |S_1S_2|^2 - r_1^2 \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A| = r_2^2,$$

které nyní zdůvodníme (a tak bude celý důkaz hotov).

První rovnost vyjadřuje (kladnou) mocnost bodu S_2 ke kružnici k_1. Druhá rovnost plyne z Eukleidovy věty o odvěsně S_2B pravoúhlého trojúhelníku S_2BA, protože střed P úsečky BC je nejen patou výšky z vrcholu A, ale také středem kosočtverce CS_2BV, tudíž

$$r_2^2 = |S_2B|^2 = |S_2P| \cdot |S_2A| = \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A|.$$

Poznámka. Střed P úsečky BC je zřejmě obrazem bodu A v kruhové inverzi ι dle kružnice k_2, zatímco odpovídající průsečík výšek V trojúhelníku ABC je zas obrazem bodu P ve stejnolehlosti $\varkappa(S_2, 2)$. Protože obrazem kružnice k_1, která určitě neprochází bodem S_2, je v uvedené kruhové inverzi kružnice, je hledanou množinou kružnice, která je obrazem kružnice k_1 ve složeném zobrazení $\iota \circ \varkappa$.

A – III – 3

Ukážeme, že všechny vyhovující dvojice (a, b) jsou tvaru $(1, b)$, kde b je libovolné celé kladné číslo.

Označme $X = a^2 + ab + 1 = a(a + b) + 1$ a $Y = b^2 + ab + a + b - 1 = (b + 1)(a + b) - 1$. Dělí-li číslo X číslo Y, dělí i číslo

$$(b + 1)X - aY = (b + 1)[a(a + b) + 1] - a[(b + 1)(a + b) - 1] = a + b + 1,$$

které tudíž jako kladný násobek čísla X splňuje nerovnost

$$a + b + 1 \geqq X = a^2 + ab + 1.$$

Odtud po zrušení jednotek a dělení číslem $a + b$ dostaneme $1 \geqq a$, tedy nutně $a = 1$.

Naopak, je-li $a = 1$, je $X = b + 2$ a $Y = b^2 + 2b = b(b + 2)$, takže $X \mid Y$ platí.

A – III – 4

a) Příkladem hledaného rozkladu je rovnost

$$8\,002 = 3\,333 + 999 + 888 + 777 + 666 + 555 + 333 + 99 + 88 + 77 + 66 + 55 + 44 + 22.$$

V druhé části ukážeme, že je to jediný vyhovující rozklad čísla 2 008 na 14 sčítanců a že žádný takový rozklad na menší počet sčítanců neexistuje.

b) Číslo tvaru $\overline{aaaa}$, resp. $\overline{aaa}$, resp. $\overline{aa}$ je a-násobkem čísla 1 111, resp. 111, resp. 11. Proto každý uvažovaný rozklad čísla 8 002 můžeme po částečném sečtení („stejnomístných" sčítanců) zapsat ve tvaru

$$8\,002 = 1\,111k + 111l + 11m,$$

kde k, l, m jsou celá nezáporná čísla nepřevyšující hodnotu součtu $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ (neboť sčítaná „stejnomístná" čísla mají být navzájem různá).

Uvedenou rovnost přepíšeme do tvaru

$$8\,002 = 727 \cdot 11 + 5 = 11(101k + 10l + m) + l,$$
$$727 = 101k + 10l + m + \frac{l-5}{11}.$$

Odtud vychází (s ohledem na $l \leqq 45$), že $l = 11q + 5$, kde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dostáváme tak rovnost

$$677 = 101 \cdot 6 + 71 = 101(k + q) + 10q + m,$$

z níž zřejmě plyne $k+q = 6$ a $10q+m = 71$. Tato soustava má za daných podmínek jediné řešení $q = 3$, $k = 3$ a $m = 41$. Pro l tak vychází $l = 38$.

K vytvoření hledaného rozkladu zbývá rozložit nalezená čísla k, l, m na součet jednoho či několika různých jednomístných sčítanců. Vzhledem k tomu, že na výběr máme právě devět sčítanců $9+8+7+6+5+4+3+2+1$ se součtem 45, bude zřejmě jednodušší vypsat rozklady pro k, $45 - l$ a $45 - m$ (rozklady čísel l a m pak dostaneme vynecháním nalezených sčítanců ze součtu $1 + 2 + \ldots + 9$):

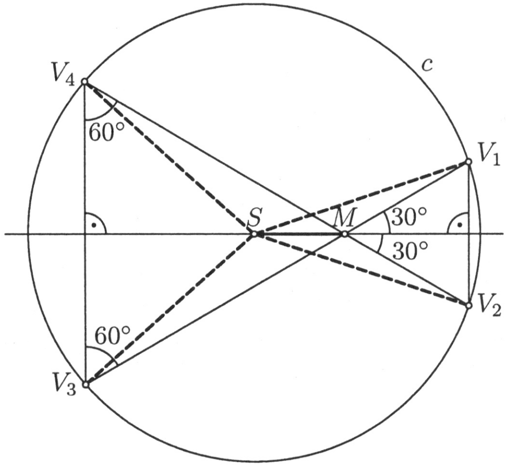
$$k = 3 = 1 + 2,$$
$$45 - l = 7 = 1 + 6 = 1 + 2 + 4 = 2 + 5 = 3 + 4,$$
$$45 - m = 4 = 1 + 3.$$

Našli jsme všech $2 \cdot 5 \cdot 2$ možných rozkladů čísla 8 002, jež mají požadované vlastnosti a z nichž každý má alespoň $1 + 6 + 7 = 14$ sčítanců, přičemž rozklad na 14 sčítanců je jediný a byl uveden v řešení části a).

A – III – 5

Ukážeme, že hledané největší t je rovno $4/11$ hod nezávisle na poměru k délek ručiček.

Označme c kružnici ciferníku, S její střed a M konec malé ručičky (obr. 34). Vysvětlíme nejprve, proč při pevné poloze bodu M existují právě dva rovnostranné trojúhelníky MXY s vrcholy X, Y na kružnici c. Protože přímka SM musí být osou tětivy XY, a tedy i osou úhlu XMY, svírají obě přímky MX, MY s přímkou SM úhel 30°. Proto je trojúhelník MXY totožný s jedním z rovnostranných trojúhelníků MV_1V_2, MV_3V_4 sestrojených na obr. 34.



Obr. 34

Body V_i rozdělují kružnici c na čtyři oblouky. Obloukům V_2V_3 a V_4V_1 příslušejí obvodové úhly $V_2V_4V_3$, $V_1V_3V_4$ velikosti 60°. Proto podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí první dvě z rovností

$$|\sphericalangle V_2SV_3| = |\sphericalangle V_4SV_1| = 120^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle V_1SV_2| + |\sphericalangle V_3SV_4| = 120^\circ,$$

třetí rovnost je jejich důsledkem (dopočítáním podle plného úhlu u vrcholu S). Plyne z ní, že oba středové úhly V_1SV_2, V_3SV_4 jsou menší než 120°.

Můžeme si představit, že malá ručička hodinek je nehybná a velká ručička se kolem středu S otáčí úhlovou rychlostí $(360 - 30)^\circ = 330^\circ$ za hodinu. Jak jsme zjistili, zkoumaný jev nastane, právě když konec V velké ručičky splyne s jedním ze čtyř bodů V_i. Mezi dvěma po sobě jdoucími jevy se proto velká ručička otočí o úhel, který má ve dvou případech velikost 120° a ve zbylých dvou případech velikosti $|\sphericalangle V_1SV_2|$ a $|\sphericalangle V_3SV_4|$, které jsou menší než 120° (a závisí na poměru k). Nejdelší doba t je tedy na poměru k nezávislá a je rovna 120/330 hod.

A – III – 6

Ukážeme, že hledaná čísla jsou $p = 1/4$ a $q = 4$. Stačí pouze zdůvodnit, že $q = 4$ (pak totiž $p = 1/4$, neboť záměna stran a, b mění hodnotu zkoumaného zlomku na převrácené číslo).

Podle trojúhelníkových nerovností platí

$$\tfrac{1}{2}a < b + t_a \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{3}t_b < \tfrac{2}{3}t_a + \tfrac{1}{2}b.$$

První nerovnost vynásobíme dvěma, druhou třemi a pak je sečteme:

$$a + t_b < (2b + 2t_a) + \left(2t_a + \tfrac{3}{2}b\right) = \tfrac{7}{2}b + 4t_a < 4(b + t_a).$$

Požadovanou vlastnost má tedy každé číslo $q \geqq 4$; ukážeme ještě, že ji nemá žádné číslo $q < 4$. K tomu uvážíme rovnoramenný trojúhelník ABC, ve kterém $a = c = 1$ a $b \in (0, 2)$ (takový trojúhelník existuje pro libovolné b z uvedeného intervalu). Z obecných vzorců

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

dostaneme $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2b^2}$ a $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{4 - b^2}$, odkud

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} = \frac{2 + \sqrt{4 - b^2}}{2b + \sqrt{1 + 2b^2}}.$$

Poslední zlomek může být pro malé kladné b libovolně blízký číslu 4. Vysvětlíme to takto: zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak pro všechna dostatečně malá kladná b současně platí

$$\sqrt{4 - b^2} > 2 - \varepsilon, \quad 2b < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sqrt{1 + 2b^2} < 1 + \varepsilon,$$

takže

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} > \frac{4 - \varepsilon}{1 + 2\varepsilon},$$

a je snadné vybrat $\varepsilon > 0$ tak, aby byl poslední zlomek větší než jakékoliv předem zvolené q menší než 4. Stačí, aby platilo

$$\varepsilon < \frac{4 - q}{1 + 2q}.$$