56. ročník matematické olympiády na středních školách

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 56. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007. 48. mezinárodní matematická olympiáda. 19. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2008. pp. 128–135.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405138

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již čtvrté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 48. MMO v Hanoji.

Soutěž se uskutečnila od 24. do 27. června 2007 v severomoravském Bílovci. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 24. 6. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z nich mohli získat nejvýše 7 bodů, celkově tedy (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	Body	Součet
1.	Maciej Gawron	POL	7 7 7 7 3 0	31
2.	Karol Żebrowski	POL	7 7 5 7 3 0	29
3.	Wojciech Zaremba	POL	6 7 4 1 7 1	26
4.	Jacek Jendrej	POL	7 7 2 7 1 0	24
5.	Piotr Dobel	POL	3 3 4 6 5 0	21
6.	Tomasz Kobos	POL	7 7 5 0 1 0	20
7.–8.	Miroslav Klimoš	CZE	7 2 2 7 1 0	19
	Michal Rolínek	CZE	7 2 2 7 1 0	19
9.	Zbyněk Konečný	CZE	7 1 2 7 1 0	18
10.–11.	Ondrej Mikuláš	SVK	0 7 2 7 1 0	17
	Michal Szabados	SVK	6 7 3 0 1 0	17
12.	Vladislav Ujházi	SVK	0 7 4 1 1 0	13
13.	Tomáš Rusin	SVK	2 2 5 1 1 0	11
14.–15.	Tomáš Kocák	SVK	0 7 2 0 1 0	10
	Lenka Slavíková	CZE	4 0 2 2 2 0	10
16.	Hana Šormová	CZE	3 0 2 0 3 0	8
17.	Michal Spišiak	SVK	1 1 2 2 1 0	7
18.	Jiří Řihák	CZE	0 0 2 1 0 0	3

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili členové úlohové komise z České republiky — dr. *Jaroslav Švrček* a doc. *Jaromír Šimša*. Úlohy koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Pavol Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Waldemar Pompe* a *Adam Osękowski* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Najděte všechny mnohočleny P s reálnými koeficienty, pro něž rovnost

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

platí pro libovolné reálné číslo x. (*Pavel Calábek*)

2. Nechť $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ (Fibonacciova posloupnost). Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje takový index k, pro nějž je číslo $a_k^4 - a_k - 2$ dělitelné číslem m. (*Ján Mazák*)

3. Nechť k je kružnice opsaná takovému konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$, že polopřímky DA a CB se protínají v bodě E, pro který platí $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$. Označme F ($F \neq A$) průsečík kružnice k s přímkou procházející bodem A a kolmou na ED. Dokažte, že pak platí: Úsečky AD a CF jsou shodné, právě když střed kružnice l opsané trojúhelníku ABE leží na přímce ED. (*Jaroslav Švrček*)

4. Dokažte, že pro každé reálné číslo $p \geqq 1$ lze z množiny reálných čísel x splňujících nerovnosti

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2$$

vybrat čtyři navzájem různá přirozená čísla a, b, c, d, pro něž platí rovnost $ab = cd$. (*Jaromír Šimša*)

5. Zjistěte, pro která

$$n \in \{3\,900, 3\,901, 3\,902, 3\,903, 3\,904, 3\,905, 3\,906, 3\,907, 3\,908, 3\,909\}$$

lze množinu $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ rozdělit na disjunktní trojice tak, aby v každé trojici se jedno číslo rovnalo součtu ostatních dvou čísel.

(*Peter Novotný*)

6. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Kružnice procházející body A a D má vnější dotyk s kružnicí procházející body B a C ve vnitřním bodě P uvažovaného čtyřúhelníku. Předpokládejme, že

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC| \leqq 90^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leqq 90^\circ.$$

Dokažte, že pak platí $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |AD|$. (*Waldemar Pompe*)

Řešení úloh

1. Konstantní mnohočlen $P(x) = c$ vyhovuje, právě když $c = c^2$, mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ jsou tedy řešením úlohy.

Ukažme nyní, že jediný vyhovující mnohočlen P kladného stupně n je tvaru $P(x) = (x-1)^n$. Uvedený mnohočlen je vzhledem k identitě $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ zřejmě řešením pro každé $n \geqq 1$.

Je-li ax^n $(a \neq 0)$ vedoucí člen mnohočlenu $P(x)$ kladného stupně n, je ax^{2n} vedoucí člen mnohočlenu $P(x^2)$ a a^2x^{2n} vedoucí člen mnohočlenu $P(x)P(x+2)$. Pokud P vyhovuje dané rovnosti, dostáváme porovnáním příslušných členů $a = a^2$, tedy $a = 1$. Proto lze mnohočlen P zapsat ve tvaru $P(x) = (x-1)^n + Q(x)$, kde Q je buď nulový mnohočlen, anebo nenulový mnohočlen stupně k, kde ovšem $0 \leqq k < n$. Porovnáním mnohočlenů

$$\begin{aligned} P(x^2) &= (x^2-1)^n + Q(x^2), \\ P(x)P(x+2) &= \big((x-1)^n + Q(x)\big)\big((x+1)^n + Q(x+2)\big) \end{aligned}$$

obdržíme (po roznásobení a zrušení mocniny $(x^2-1)^n$ na obou stranách) rovnost

$$Q(x^2) = (x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x) + Q(x)Q(x+2).$$

Vidíme, že nulový mnohočlen Q vztah splňuje. Pro nenulový mnohočlen Q stupně $k < n$ je ovšem $Q(x^2)$ mnohočlen stupně $2k$, zatímco na pravé straně odvozeného vztahu je mnohočlen stupně $n+k$ (jeho vedoucí člen je $2bx^{n+k}$, je-li bx^k vedoucí člen mnohočlenu $Q(x)$). Protože $2k < n+k$, nemůže uvedená rovnost platit.

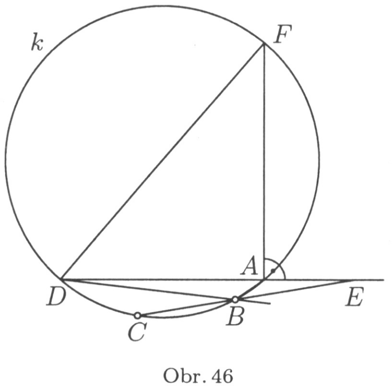
Odpověď. Úloze vyhovují konstantní mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ a pro každé n přirozené mnohočlen $P(x) = (x-1)^n$.

2. Všechny kongruence a zbytkové třídy jsou podle daného modulu m. Žádanou kongruenci $a_k^4 - a_k - 2 \equiv 0$ získáme jako důsledek jednodušší kongruence $a_k \equiv -1$.

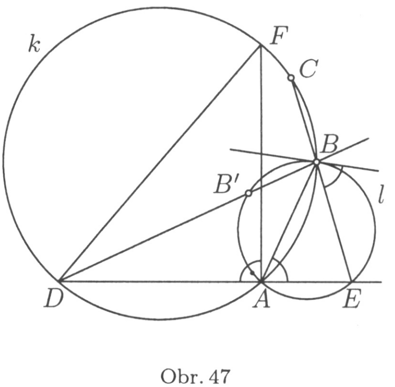
Posloupnost zbytkových tříd čísel a_k má následující vlastnost: zbytkové třídy libovolných dvou po sobě jdoucích členů a_k, a_{k+1} jednoznačně určují zbytkové třídy jak všech následujících členů a_i $(i > k+1)$, tak všech předchozích členů a_i $(i < k)$. Odtud obvyklým postupem, založeným na tom, že všech uspořádaných dvojic zbytkových tříd je m^2, tedy konečný počet, plyne, že posloupnost zbytkových tříd čísel a_i je periodická, a to hned od svého *prvního* členu. Existuje tedy číslo $p > 0$ (závislé na daném modulu m) takové, že $a_i \equiv a_{i+p}$ pro každý index i. Není-li $m = 1$ (pro ně je tvrzení úlohy triviální), je zřejmě $p > 1$. Protože $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, platí rovněž $a_{p+1} \equiv a_{p+2} \equiv 1$, odkud $a_p \equiv 0$ a $a_{p-1} \equiv -1$, takže můžeme vzít $k = p - 1$ a důkaz je hotov.

3. Zřejmě je DF průměrem kružnice k. Nejprve ukážeme, že za daných podmínek nemůže bod C ležet v polorovině DFA.

Pokud body B, C leží na části DA oblouku DAF (obr. 46), jsou zřejmě úhly DCB a DBA tupé, proto $|DC| < |DB| < |DA| < |DE|$, takže rovnost $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ nemůže platit. Pro body B, C na části AF oblouku DAF (obr. 47) je úhel BAE ostrý a pro úhel DBE platí $|\sphericalangle DBE| = 180° - |\sphericalangle DBC| \leqq 90°$, nemůže tedy případný další průsečík B' polopřímky DB s kružnicí l ležet za bodem B (úsekový úhel příslušný tětivě BE kružnice l je totiž roven úhlu BAE, a ten je ostrý). Proto $|DC| > |DB| \geqq |DB'|$. Rovnost $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ nemůže tedy platit, protože pro mocnost bodu D ke kružnici l platí $|AD| \cdot |ED| = |DB| \cdot |DB'| < |DC|^2$.



Obr. 46



Obr. 47

Jestliže tedy bod C neleží v polorovině FDA, je $|FC| = |DA|$, právě když $DAFC$ je pravoúhelník, tj. právě když CA je průměr kružnice k, což je ekvivalentní tomu, že úhel CBA je pravý, a to je ekvivalentní tomu, že trojúhelník AEB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B, neboli střed kružnice opsané trojúhelníku AEB je středem úsečky AE.

4. Čísla $a = (k-1)k$, $b = (k+1)k$, $c = (k-1)(k+1)$, $d = k^2$ zřejmě splňují rovnost $ab = cd$ a nerovnosti $a < c < d < b$ pro každé $k > 1$. Nechť tedy k je nejmenší přirozené číslo, pro které platí $p < a$ neboli $p < (k-1)k$ (při zadaném p). Ukažme, že pro takové k pak platí $b = (k+1)k \leqq p + 4 + 2\sqrt{4p+1}$, což je zřejmě číslo o $\frac{1}{4}$ menší než horní mez intervalu ze zadání, takže tím bude řešení úlohy úplné.

Podle výběru čísla k platí $p \geqq (k-2)(k-1)$. Řešením této kvadratické nerovnice dostaneme odhad

$$k \leqq \frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}},$$

ze kterého již plyne

$$\begin{aligned} b = (k+1)k &\leqq \left(\frac{5}{2} + \sqrt{p+\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{3}{2} + \sqrt{p+\frac{1}{4}}\right) = \\ &= \frac{15}{4} + 4\sqrt{p+\frac{1}{4}} + \left(p + \frac{1}{4}\right) = p + 4 + 2\sqrt{4p+1}. \end{aligned}$$

5. Z možnosti rozdělení na disjunktní trojice plyne $3 \mid n$. V každé trojici $\{a, b, a+b\}$ je součet $2(a+b)$, tedy sudé číslo, proto musí být sudý i součet všech čísel od 1 do n, součin $n(n+1)$ musí tedy být dělitelný čtyřmi. Celkem máme, že číslo n musí být tvaru $12k$ nebo $12k+3$, čemuž z daných čísel vyhovují pouze $n = 3\,900$ a $n = 3\,903$.

V dalším odstavci popíšeme konstrukci, jak z vyhovujícího rozkladu pro dané $n = k$ vytvořit vyhovující rozklady pro $n = 4k$ a $n = 4k+3$. To nám zaručí, že rozklady pro $n = 3\,900$ i $n = 3\,903$ existují, a to díky sestupné posloupnosti

$$3\,900 \to 975 \to 243 \to 60 \to 15 \to 3$$

(místo 3 900 lze začít i číslem 3 903) a díky triviálnímu rozkladu pro $n = 3$ (z něhož postupně sestrojíme rozklady pro $n = 15$, $n = 60$ atd. až pro $n = 3\,900$ resp. $n = 3\,903$).

Z vyhovujícího rozkladu množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ nejprve vyrobíme vyhovující rozklad množiny prvních k sudých čísel $\{2, 4, \ldots, 2k\}$ (prostě všechna čísla ve všech trojicích výchozího rozkladu vynásobíme dvěma). V případě $n = 4k$ pak zbylá čísla

$$\{1, 3, 5, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \ldots, 4k-1, 4k\}$$

rozdělíme do k trojic $\{2j-1, 3k-j+1, 3k+j\}$, kde $j = 1, 2, \ldots, k$. Vidíte je ve sloupcích tabulky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots & 2k-3 & 2k-1 \\ 3k & 3k-1 & 3k-2 & \ldots & 2k+2 & 2k+1 \\ 3k+1 & 3k+2 & 3k+3 & \ldots & 4k-1 & 4k \end{pmatrix}$$

V případě $n = 4k+3$ zbylá čísla

$$\{1, 3, 5, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \ldots, 4k+2, 4k+3\}$$

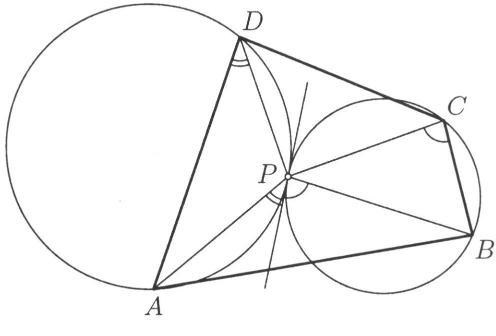
rozdělíme do $k+1$ trojic $\{2j-1, 3k+3-j, 3k+j+2\}$, kde $j = 1, 2, \ldots, k+1$, tvořených sloupci tabulky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots & 2k-1 & 2k+1 \\ 3k+2 & 3k+1 & 3k & \ldots & 2k+3 & 2k+2 \\ 3k+3 & 3k+4 & 3k+5 & \ldots & 4k+2 & 4k+3 \end{pmatrix}.$$

Tím je důkaz toho, že čísla $n = 3\,900$ a $n = 3\,903$ vyhovují, hotov.

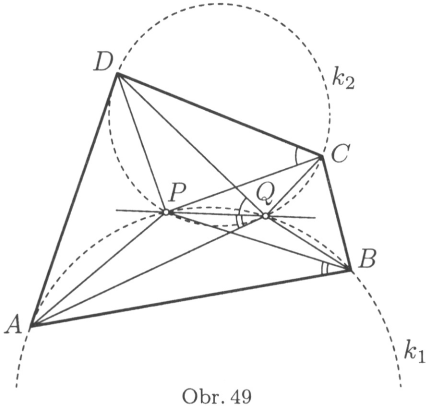
6. Je-li P společný bod zmíněných kružnic, plyne z věty o obvodových a úsekových úhlech, že je zároveň i bodem dotyku, právě když (obr. 48)

$$|\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB|. \qquad (1)$$



Obr. 48

Uvažujme kružnice k_1, k_2 opsané trojúhelníkům ABP a CDP a označme Q případný další průsečík obou kružnic (obr. 49). Protože bod A leží vně kružnice BCP, je $|\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle BAP| < 180°$. Proto bod C leží vně kružnice k_1. Analogicky leží i bod D vně této kružnice. Odtud plyne, že body P a Q leží na témže oblouku CD kružnice k_2.



Obr. 49

Analogicky body P a Q leží na témže oblouku AB kružnice k_1. Bod Q tudíž leží buď uvnitř úhlu BPC, nebo uvnitř úhlu APD. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod Q leží uvnitř úhlu BPC (obr. 49). V takovém případě podle předpokladu úlohy platí

$$|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle PQA| + |\sphericalangle PQD| = |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leqq 90°. \qquad (2)$$

Protože bod Q leží na částech oblouků AB i CD uvnitř úhlu BPC, leží bod Q dokonce uvnitř trojúhelníku BPC, tedy i uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$.

Z vlastností protějších a vedlejších úhlů tětivových čtyřúhelníků $APQB$ a $DPQC$ (obr. 49) plyne

$$|\sphericalangle BQC| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC|,$$

takže podle předpokladu úlohy

$$|\sphericalangle BQC| \leqq 90°. \qquad (3)$$

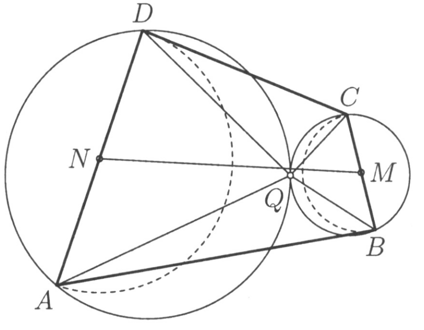
Protože je navíc $|\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle PDQ|$, dostáváme podle (1)

$$|\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle PDQ| + |\sphericalangle BCP| - |\sphericalangle PCQ| =$$
$$= |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB|.$$

A protože také $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AQB|$, vychází

$$|\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle AQB|.$$

To ovšem znamená, jak už víme z úvodní úvahy, že kružnice BCQ a DAQ se dotýkají v bodě Q (obr. 50).



Obr. 50

Uvažujme nyní polokruhy sestrojené nad stranami BC a DA „dovnitř" čtyřúhelníku $ABCD$. Protože úhly AQD a BQC nejsou tupé, leží každý z obou polokruhů celý uvnitř odpovídajícího kruhu příslušného kružnici BQC, resp. AQD; a protože se obě kružnice dotýkají vně, mají i oba polokruhy sestrojené nad stranami BC a DA nejvýše jeden společný bod (tj. nepřekrývají se). Označíme-li M a N středy stran BC a DA, plyne odtud nerovnost $|MN| \geqq \frac{1}{2}(|BC| + |DA|)$.

Na druhou stranu zřejmě platí $\boldsymbol{MN} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{BA} + \boldsymbol{CD})$, takže $|MN| \leqq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$. Odtud vychází dokazovaná nerovnost $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |DA|$.