Přípravné soustředění před 48. MMO

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 56. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007. 48. mezinárodní matematická olympiáda. 19. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2008. pp. 124–127.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405137

Přípravné soustředění před 48. MMO

V průběhu 56. ročníku se konalo výběrové soustředění bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 1. do 5. dubna 2007 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A s výjimkou Pavla Motlocha, který se rozhodl dát přednost účasti na mezinárodní fyzikální olympiádě. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a posloužilo ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Michal Rolínek	8/8 GJK Praha 6	70
Zbyněk Konečný	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	60
Miroslav Klimoš	2/4 GMK Bílovec	54,5
Lenka Slavíková	4/4 G Mnichovo Hradiště	48,5
Jiří Řihák	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47,5
Hana Šormová	2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47,5
Samuel Říha	2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	44,5
Anežka Faltýnková	4/4 GJŠ Přerov	42,5
Tomáš Javůrek	8/8 G Jeseník	38,5

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (1. 4.),
dr. *Karel Horák* (2. 4.),
dr. *Pavel Calábek* (3. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (4. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (5. 4.)

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{2^x} + \frac{y}{2^y} = \frac{z}{2^z}.$$

2. Nechť p je prvočíslo, n je přirozené číslo a q je přirozený dělitel čísla $(n+1)^p - n^p$. Dokažte, že číslo $q-1$ je dělitelné číslem p.

3. Reálná čísla a, b, c, d, e, f jsou taková, že platí

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f &= 0,\\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 &= 6. \end{aligned}$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$abcdef \leqq \frac{1}{2}.$$

4. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí rovnosti

$$|AD| = |BC| + |EF|, \quad |BE| = |FA| + |CD| \quad \text{a} \quad |CF| = |DE| + |AB|.$$

Dokažte, že platí

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|FA|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

5. V trojúhelníku ABC, jehož strany vyhovují rovnosti $|AB| + |BC| = 3|AC|$, označme V střed jeho vepsané kružnice a D a E body, v nichž se vepsaná kružnice postupně dotýká stran AB, BC. Jsou-li K a L obrazy bodů D a E ve středové souměrnosti se středem V, je čtyřúhelník $ACKL$ je tětivový. Dokažte.

6. Nalezněte všechna přirozená čísla $n > 1$, pro něž existuje jediné přirozené číslo $a \leqq n!$ takové, že $a^n + 1$ je dělitelné číslem $n!$.

7. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, jehož strany AB a AC jsou různě dlouhé, označme H průsečík výšek a M střed strany BC. Na straně AB zvolme bod D a na straně AC bod E tak, že $|AE| = |AD|$ a body D, H, E leží v přímce. Dokažte, že HM je kolmá na společnou sečnu kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE.

8. Nechť n je přirozené číslo, $n \geqq 2$ a $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ kladná reálná čísla taková, že

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n \geqq 0.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} \leqq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 a_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}.$$

Zjistěte dále, kdy nastává rovnost.

9. Určete všechny funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y) + xy.$$

10. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Na stranách AB a BC jsou zvoleny body M a N tak, že platí

$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|AC|}{|BC|} = 2 \qquad \text{a} \qquad MN \parallel AC.$$

Označme O průsečík přímek CM a AN. Na úsečce ON zvolme bod K tak, že platí $|MO| + |OK| = |KN|$. Označme dále T průsečík kolmice k přímce ON procházející bodem K s osou úhlu ABC. Dokažte, že úhel MTB je pravý.

11. V rovině je dán pravidelný třicetiúhelník $A_1A_2 \ldots A_{30}$. Dokažte, že jeho úhlopříčky A_1A_{19}, A_3A_{24} a A_8A_{28} se protínají ve společném bodě.

12. Určete, jakých celočíselných hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz}.$$

jsou-li x, y, z přirozená čísla.

13. Nechť O je střed kružnice k opsané trojúhelníku ABC a AD její průměr. Označme P průsečík tečny ke kružnici k sestrojené v bodě D a přímky BC. Dále nechť M, N jsou průsečíky přímky PO po řadě se stranami AC, AB. Dokažte, že $|OM| = |ON|$.

14. Určete počet všech pořadí číslic od 1 do 9, jako například 172863945, ve kterých číslice od 1 do 5 stojí zleva doprava v rostoucím pořadí, zatímco číslice od 1 do 6 nikoliv. Výsledek zapište jedním číslem, ne výrazem.

15. Deset gangsterů stojí na rovné louce tak, že jejich vzdálenosti jsou navzájem různé. Ve stejný okamžik každý z gangsterů vystřelí na nejbližšího z devíti ostatních a zasáhne ho. Určete nejmenší možný počet zasažených gangsterů.

16. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro které platí

$$x + y^2 + z^3 = xyz,$$

kde z je největší společný dělitel čísel x a y.

17. Ke kružnici opsané libovolnému ostroúhlému trojúhelníku ABC sestrojíme tečny s body dotyku B, C a jejich průsečík označíme T. Dále označíme jako P průsečík přímek AT, BC a jako Q střed úsečky AP. Najděte poměr $a : b : c$ délek stran trojúhelníku ABC, při kterém má úhel ABQ největší možnou velikost.