55. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 55. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006. 47. mezinárodní matematická olympiáda. 18. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007. pp. 67–96.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405110

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(J. Švrček)

A – I – 2

Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec. *(E. Kováč)*

A – I – 3

Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geqq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, které má stejné znaménko jako číslo a_n, ale opačné pořadí číslic (zápis čísla b_n může narozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534$, …

a) Dokažte, že posloupnost (a_n) je periodická.

b) Zjistěte, jaké nejmenší přirozené číslo může být a_0. *(T. Jurík)*

A – I – 4

Najděte všechny kubické rovnice $P(x) = 0$, které mají aspoň dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je číslo 7, a které pro každé reálné číslo t splňují podmínku: Jestliže $P(t) = 0$, pak $P(t + 1) = 1$.

(Pavel Novotný)

A – I – 5

Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ se stranami délek a, b, c, d (při obvyklém značení) existují a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. *(J. Šimša)*

A – I – 6

Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2\,005(x - y).$$

(J. Moravčík)

A – S – 1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, pro něž platí

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

(J. Moravčík)

A – S – 2

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel CA$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$. *(J. Švrček)*

A – S – 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$1 + \sin\frac{x + \pi}{5} \cdot \sin\frac{x - \pi}{11} = 0.$$

(J. Šimša)

A – II – 1

Najděte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že součet $a + b$ je kořenem rovnice $x^2 + ax + b = 0$. *(E. Kováč)*

A – II – 2

Posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro každé $n \geqq 1$ rovnost

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}$$

a navíc platí $a_{11} = 4$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 1$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je součet

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{100}^k$$

druhou mocninou přirozeného čísla. *(J. Zhouf)*

A – II – 3

Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP. *(E. Kováč)*

A – II – 4

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

(J. Švrček)

A – III – 1

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslo, které má opačné pořadí číslic než číslo a_n (zápis čísla b_n může na rozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_1 = 170$ platí $a_2 = 241$, $a_3 = 383$, $a_4 = 766, \ldots$ Rozhodněte, zda a_7 může být prvočíslo. *(Peter Novotný)*

A – III – 2

Nechť m a n jsou přirozená čísla taková, že rovnice

$$(x + m)(x + n) = x + m + n$$

má aspoň jedno celočíselné řešení. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(*J. Šimša*)

A – III – 3

V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. (*T. Jurík*)

A – III – 4

V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.

(*J. Švrček*)

A – III – 5

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:

$$p \mid q+r, \quad q \mid r+2p, \quad r \mid p+3q.$$

(*M. Panák*)

A – III – 6

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{cotg}^2 2y &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{cotg}^2 2z &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{cotg}^2 2x &= 1. \end{aligned}$$

(*J. Švrček, P. Calábek*)

A – I – 1

Z vlastností funkcí tangens a cotangens vyplývá, že $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Označme dále

$$L = \sqrt{2}(\sin t + \cos t) \qquad \text{a} \qquad P = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

S ohledem na periodičnost funkcí sin, cos, tg, cotg stačí rozlišit následující případy.

▷ $t \in (0; \frac{1}{2}\pi)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t \leqq \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = \operatorname{tg}^3 t + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} \geqq 2.$$

Rovnost v každé z nich nastává, právě když $t = \frac{1}{4}\pi$. Dostáváme tak odhad

$$L \leqq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \leqq P.$$

Rovnice $L = P$ je tedy splněna pouze v případě $L = P = 2$ a jediné reálné číslo t z uvažovaného intervalu $(0; \frac{1}{2}\pi)$, které dané rovnici vyhovuje, je $t = \frac{1}{4}\pi$.

▷ $t \in (\frac{1}{2}\pi; \pi)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t > \cos t > -1$$

a

$$\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = -\left((-\operatorname{tg} t)^3 + \frac{1}{(-\operatorname{tg} t)^3}\right) \leqq -2.$$

Pro libovolné t z uvažovaného intervalu pak platí odhady

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

což znamená, že na tomto intervalu daná rovnice nemá žádné řešení.

▷ $t \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$: Pro libovolné t z uvažovaného intervalu jsou obě hodnoty $\sin t$, $\cos t$ záporné (a hodnoty $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{cotg} t$ kladné), takže platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t < 0 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t > 0.$$

Odtud $L < 0 < P$, a tudíž ani na tomto intervalu daná rovnice nemá žádné řešení.

▷ $t \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$: Podobně jako v druhém případě odvodíme, že pro libovolné t z uvažovaného intervalu platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \mathrm{tg}^3\, t + \mathrm{cotg}^3\, t \leqq -2.$$

Proto

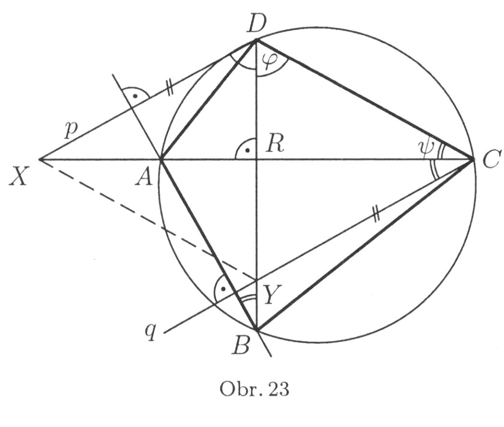
$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

což znamená, že ani v tomto případě nemá daná rovnice žádné řešení.

Závěr. Vzhledem k periodičnosti uvažovaných goniometrických funkcí jsou řešením dané rovnice všechna reálná čísla t tvaru $t = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

A – I – 2

Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku a pro jednoduchost také φ, ψ velikosti úhlů CDR a DCR (obr. 23). Protože úhlopříčky jsou na sebe kolmé, je $\varphi + \psi = 90°$. Vzhledem k tomu, že oba vrcholy B, C



Obr. 23

leží ve stejné polorovině určené tětivou AD, plyne z rovnosti příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle ABD| = \psi$. A protože DX je kolmá na AB, je rovněž $|\sphericalangle XDB| = \varphi$. To znamená, že trojúhelník XCD je rovnoramenný se základnou XC. Úplně stejně ovšem zjistíme, že i trojúhelník YCD je rovnoramenný se základnou YD. Platí tedy $|XD| = |CD| = |CY|$, takže DX a CY jsou shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že $XYCD$ je rovnoběžník, který jak víme, má tři strany shodné, tudíž je to kosočtverec nebo čtverec.

Jiné řešení. Využijeme ne zcela běžně známý poznatek, že bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané.

Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku. Podle podmínek úlohy je X průsečík výšek trojúhelníku ABD a Y průsečík výšek trojúhelníku ABC. Podle předchozího tvrzení je bod C obrazem bodu X v osové souměrnosti podle přímky BD, takže R je střed úsečky XC. Analogicky je R střed úsečky YD. Protože úsečky XC a YD jsou na sebe kolmé, je $XYCD$ kosočtverec nebo čtverec.

A – I – 3

a) Abychom dokázali, že uvažovaná posloupnost (a_n) je periodická, stačí ukázat, že existují přirozená čísla n_0 a p taková, že $a_{n_0+p} = a_{n_0}$. Protože každý další člen posloupnosti je jednoznačně určen předcházejícím členem, bude už pro každé $n \geqq n_0$ platit $a_{n+p} = a_n$ (posloupnost bude [počínaje členem a_{n_0}] periodická s délkou periody p).

Číslo $a_{n+1} = a_n - b_n$ má ovšem nejvýše tolik číslic jako číslo a_n. To je například vidět z nerovnosti $|a - b| \leqq \max(|a|, |b|)$. Má-li tedy počáteční člen posloupnosti k číslic, budou všechny ostatní členy posloupnosti patřit do konečné množiny nejvýše $2(10^k - 1)$ nenulových celých čísel. Protože posloupnost je nekonečná, musí obsahovat aspoň dva stejné členy. Odtud plyne, že uvažovaná posloupnost je periodická.

b) Protože uvažovaná posloupnost neobsahuje žádný člen rovný nule, nemůže být jejím členem žádné *palindromické* číslo (číslo, které „přečteme“ stejně odpředu i odzadu), speciálně tedy ani číslo jednomístné.

Předpokládejme nejprve, že členem uvažované posloupnosti je kladné dvojmístné číslo $a_0 = \overline{ab} = 10a + b$, pro které $a_1 = 9(a - b)$. Vidíme, že všechny další členy (zejména tudíž ty, které se budou periodicky opakovat) musí být dělitelné devíti. Stačí proto probrat všechny dvojmístné násobky devíti $18, \ldots, 99$. Jak snadno zjistíme podle následujícího schématu,

$$\begin{tikzcd}
81 \arrow[dr] & & & & \\
& 63 \arrow[dr] & & & \\
18 \arrow[ur] & & 27 \arrow[dr] & & \\
& 36 \arrow[ur] & & 45 \arrow[dr] & \\
& & 72 \arrow[ur] & & 9 \\
& & & 54 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

pro každé takové číslo se mezi členy posléze objeví jednomístná devítka. To znamená, že uvažovaná posloupnost nemůže obsahovat ani dvojmístná čísla. (Čísla ve schématu jsou v absolutní hodnotě, protože příslušná změna znaménka nemá na právě získaný výsledek vliv. Podobně nemusíme zvlášť vyšetřovat ani případ záporného dvojmístného čísla a_0.)

Předpokládejme dále, že členem uvažované posloupnosti je trojmístné číslo $a_0 = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, pro které $a_1 = 99(a - c)$. Opět stačí prozkoumat jen trojmístná čísla 99, 198, ..., 990 (násobky čísla 99). Podobně jako v předchozím případě podle následujícího schématu

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
891 \arrow[dr] & & & & \\
& 693 \arrow[dr] & & & \\
198 \arrow[ur] & & 297 \arrow[dr] & & \\
& 396 \arrow[ur] & & 495 \arrow[dr] & \\
& & 792 \arrow[ur] & & 99 \\
& & & 594 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

zjistíme, že pro taková čísla se mezi členy posloupnosti nakonec objeví dvojmístné číslo 99. Posloupnost tedy nemůže obsahovat ani trojmístná čísla.

Protože pro čtyřmístné číslo $a_0 = \overline{abcd} = 1\,000a+100b+10c+d$ dostáváme $a_1 = 999(a-d)+90(b-c)$, zjistíme opět, že prvních deset nejmenších čtyřmístných čísel (pro něž je v příslušném desítkovém zápise $b = c = 0$, takže jako členy posloupnosti vycházejí jen násobky čísla 999) členem uvažované posloupnosti být nemůže: pro čísla 1 000 a 1 002 dostaneme rovnou $|a_1| = 999$, číslo 1 001 je palindromické a pro čísla 1 003, ..., 1 009 dostaneme $|a_1| = 1\,998, 2\,997, \ldots, 8\,991$ a podle obdobného schématu

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
8\,991 \arrow[dr] & & & & \\
& 6\,993 \arrow[dr] & & & \\
1\,998 \arrow[ur] & & 2\,997 \arrow[dr] & & \\
& 3\,996 \arrow[ur] & & 4\,995 \arrow[dr] & \\
& & 7\,992 \arrow[ur] & & 999 \\
& & & 5\,994 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

po několika krocích trojmístné číslo 999. Pro následující čtyřmístné číslo 1 010 dostaneme trojmístné číslo 909 a pro 1 011 dokonce dvojmístné číslo -90. Teprve pro číslo 1 012 dostaneme posloupnost čtyřmístných čísel

$$-1\,089,\ 8\,712,\ 6\,534,\ 2\,178,\ -6\,534,$$

která se zřejmě po dalším členu zacyklí.

Závěr. Nejmenší možné číslo a_0 je 1 012.

A – I – 4

Podle zadání má mít kubická rovnice $P(x) = 0$ dva různé reálné kořeny, označme je $x_1 = 7$ a $x_2 \neq x_1$ (konkrétní hodnotu $x_1 = 7$ využijeme, jen když to bude vhodné, jinak budeme raději psát obecně x_1). Pro kubický mnohočlen $P(x)$, jehož koeficient u mocniny x^3 označíme a, $a \neq 0$, pak existuje ještě reálné číslo x_3 takové, že platí rozklad

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{1}$$

(nejsou vyloučeny rovnosti $x_3 = x_1$ nebo $x_3 = x_2$).

Připomeňme, jak existenci třetího reálného kořene x_3 zdůvodnit: kubický mnohočlen $P(x)$ je nutně dělitelný mnohočlenem $(x - x_1)(x - x_2)$, příslušný podíl je lineární dvojčlen s vedoucím koeficientem a, tedy dvojčlen $ax + b$, který lze zapsat jako $a(x - x_3)$, zvolíme-li $x_3 = -b/a$.

Naší úlohou je najít všechny vyhovující trojice čísel $a \neq 0$, $x_2 \neq x_1$ a x_3, pro které mnohočlen (1) s danou hodnotou $x_1 = 7$ splňuje pro každé reálné t implikaci $P(t) = 0 \Longrightarrow P(t + 1) = 1$. Pro rozbor takové podmínky je nezbytné vědět, pro kolik *různých* hodnot t rovnost $P(t) = 0$ (a tedy i rovnost $P(t + 1) = 1$) skutečně platí, tedy kolik je v trojici x_1, x_2, x_3 různých čísel. A priori mohou nastat pouze následující možnosti A, B a C.

A. *x_1, x_2, x_3 jsou tři navzájem různá čísla.*

Tehdy má kubická rovnice $P(x) = 1$ tři navzájem různé kořeny $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$, takže platí rozklad

$$P(x) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1).$$

Dosadíme-li sem rozklad (1), dostaneme rovnost mnohočlenů

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1). \tag{2}$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 na levé a pravé straně obdržíme rovnici

$$-a(x_1 + x_2 + x_3) = -a(x_1 + x_2 + x_3 + 3),$$

která je splněna pouze v případě $a = 0$, což odporuje předpokladu $a \neq 0$. (Navíc rovnost (2) neplatí ani pro $a = 0$, kdy má tvar $-1 = 0$.)

B. $x_1 = x_3 = 7 \neq x_2$.

Tehdy $P(x) = a(x - 7)^2(x - x_2)$ a rovnost $P(x) = 1$ musí platit pro $x = 7 + 1 = 8$ a pro $x = x_2 + 1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$P(8) = a(8 - x_2) = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6)^2 = 1.$$

Převrácená hodnota čísla a je tedy rovna jak číslu $8 - x_2$, tak číslu $(x_2 - 6)^2$. Z rovnice

$$8 - x_2 = (x_2 - 6)^2$$

dostaneme úpravou rovnici $x_2^2 - 11x_2 + 28 = 0$, která má dva kořeny $x_2 = 4$ a $x_2 = 7$. Druhý kořen nevyhovuje naší podmínce $x_2 \neq x_1$, takže nutně platí $x_2 = 4$, odkud $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)$.

C. $x_1 = 7 \neq x_2 = x_3$.

Tehdy $P(x) = a(x-7)(x-x_2)^2$ a rovnost $P(x) = 1$ musí platit pro $x = 7 + 1 = 8$ a pro $x = x_2 + 1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$P(8) = a(8 - x_2)^2 = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6) = 1.$$

Převrácená hodnota čísla a je tedy rovna jak číslu $(8 - x_2)^2$, tak číslu $x_2 - 6$. Z rovnice

$$(8 - x_2)^2 = x_2 - 6$$

dostaneme úpravou rovnici $x_2^2 - 17x_2 + 70 = 0$, která má dva kořeny $x_2 = 10$ a $x_2 = 7$. Druhý kořen nevyhovuje naší podmínce $x_2 \neq x_1$, takže nutně platí $x_2 = 10$, odkud $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2$.

Závěr. Podmínkám úlohy vyhovují pouze dvě kubické rovnice

$$\frac{1}{4}(x-7)^2(x-4) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2 = 0.$$

Poznámka. Možnost A v uvedeném řešení můžeme vyloučit díky následující úvaze: Kdyby měl mnohočlen P tři různé kořeny k, l, m, měl by mnohočlen $P - 1$ dle předpokladu kořeny $k+1$, $l+1$, $m+1$. To však není možné, protože součet kořenů mnohočlenu P je stejný jako součet kořenů mnohočlenu $P - 1$.

A – I – 5

V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme S průsečík úhlopříček a kromě délek stran uvažujme ještě veličiny $e = |AC|$, $f = |BD|$, $e_1 = |AS|$, $e_2 = |CS|$, $f_1 = |BS|$, $f_2 = |DS|$ a $\varphi = |\sphericalangle ASB|$. Podle kosinové věty platí rovnosti

$$\begin{aligned} a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos\varphi, \\ b^2 &= e_2^2 + f_1^2 + 2e_2 f_1 \cos\varphi, \\ c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos\varphi, \\ d^2 &= e_1^2 + f_2^2 + 2e_1 f_2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Sečteme-li první rovnost s třetí a od výsledku odečteme součet druhé a čtvrté, dostaneme

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_2 f_1 + e_1 f_2) \cos \varphi,$$

neboli

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2ef \cos \varphi. \tag{1}$$

Odtud plyne takový závěr: platí-li rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, pak v každém uvažovaném čtyřúhelníku je $\cos \varphi = 0$, tedy úhel φ je vždy pravý a délky stran mají vyjádření

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2. \tag{2}$$

Abychom uzavřeli první část řešení, zdůvodníme ještě, že takové čtyřúhelníky (pro jakékoliv délky a, b, c, d splňující vztah $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$) existují. Jistě můžeme předpokládat, že platí $d = \min\{a, b, c, d\}$; délku e_1 pak zvolíme v intervalu $(0, d)$ libovolně a podle (2) určíme

$$f_1 = \sqrt{a^2 - e_1^2}, \quad f_2 = \sqrt{d^2 - e_1^2},$$
$$e_2 = \sqrt{c^2 - d^2 + e_1^2} \left(= \sqrt{b^2 - a^2 + e_1^2}\right)$$

(vzhledem k učiněnému předpokladu je $c^2 - d^2 \geqq 0$). Tím je existence vyhovujících čtyřúhelníků (s navzájem kolmými úhlopříčkami) prokázána.

V druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že aspoň jeden konvexní čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ se stranami daných délek a, b, c, d existuje; z úvahy o drátěném modelu čtyřúhelníku je jasné, že vyhovujících konvexních čtyřúhelníků $ABCD$ (tvarově blízkých $A_0B_0C_0D_0$) je pak nekonečně mnoho; jejich vnitřní úhly α, γ u vrcholů A, C jsou vázány podmínkou

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma \tag{3}$$

(porovnání délky společné strany BD trojúhelníků ABD a BCD). Připusťme, že úhlopříčky všech těchto čtyřhelníků svírají týž úhel φ a že *levá strana rovnosti* (1) *je nenulová* (podle jejího znaménka je úhel φ buď ostrý, nebo tupý, takže se nemůže stát, že pro část vyhovujících čtyřúhelníků má velikost φ_0, a pro ostatní $\pi - \varphi_0$). Pak z rovnosti (1) můžeme vypočítat součin ef, který je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky stejný; ze vzorce pro jejich obsah $S = \frac{1}{2} ef \sin \varphi$ nakonec plyne, že i hodnota S je jedna a táž. Protože obsah S můžeme vyjádřit i vzorcem $S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma$, docházíme k závěru: existují takové konstanty R_1 a R_2, že všechny vyhovující čtyřúhelníky splňují vztahy

$$ad\cos\alpha - bc\cos\gamma = R_1, \qquad ad\sin\alpha + bc\sin\gamma = R_2$$

(první vztah je důsledkem (3), ve druhém $R_2 = 2S > 0$). Z nich dále vyplývá

$$(bc)^2 = (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 = \\ = (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).$$

Protože $ad \neq 0$, lze z poslední rovnosti vypočítat hodnotu výrazu

$$V = R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha,$$

která je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky $ABCD$ stejná. To je možné jedině tehdy, když $R_1 = R_2 = 0$, a to je spor s tím, že $R_2 > 0$. Důkaz druhé části tvrzení je hotov.

Dodejme, že závěr o hodnotách výrazu V plyne ze známého vyjádření

$$V = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\sin(\alpha + \omega),$$

kde úhel ω je určen vztahy

$$\sin\omega = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\omega = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Výraz $\sin(\alpha + \omega)$ není konstantní, když se úhel α mění v okolí úhlu α_0 (jenž odpovídá výchozímu čtyřúhelníku $A_0B_0C_0D_0$ z úvodu druhé části řešení).

A – I – 6

Odvodíme nejprve, jak vypadá každá dvojice (x, y) přirozených čísel, která vyhovuje rovnici

$$x^2 + y^2 = k(x - y) \tag{1}$$

s daným přirozeným číslem k (a teprve pak všechna tato řešení pro hodnotu $k = 2\,005$ sestrojíme).

Předpokládejme, že (x, y) je libovolné řešení rovnice (1), kterou obvyklým způsobem upravíme do „součinového“ tvaru

$$y(y+k) = x(k-x). \tag{2}$$

Provedeme úvahu o soudělnosti zastoupených činitelů: označme d největší společný dělitel přirozených čísel x a y, takže platí $x = dm$ a $y = dn$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Po vydělení obou stran rovnosti (2) číslem d dostaneme „výhodnější“ rovnost $n(y+k) = m(k-x)$. Z ní totiž vzhledem k nesoudělnosti čísel m, n plyne, že přirozené číslo $y+k$ je násobkem čísla m a číslo $k-x$ stejným násobkem čísla n. Pro vhodné přirozené q tedy platí rovnosti

$$y + k = qm \quad \text{a} \quad k - x = qn.$$

Vyjádřeme odtud dvojím způsobem číslo k a obě vyjádření porovnejme:

$$\left.\begin{aligned} k &= qm - y = qm - dn, \\ k &= qn + x = qn + dm \end{aligned}\right\} \Rightarrow qm - dn = qn + dm \Rightarrow m(q-d) = n(q+d).$$

Odtud opět z nesoudělnosti čísel m, n plyne, že přirozené číslo $q+d$ je násobkem čísla m a číslo $q-d$ stejným násobkem čísla n. Pro vhodné přirozené r tedy platí rovnosti

$$q + d = rm \quad \text{a} \quad q - d = rn.$$

Jejich sečtením a odečtením dostaneme následující vyjádření čísel q a d pomocí r, m a n:

$$q = \frac{r(m+n)}{2} \quad \text{a} \quad d = \frac{r(m-n)}{2},$$

odkud již pro neznámé x, y dostáváme konečné vzorce

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = dn = \frac{r(m-n)n}{2}. \tag{3}$$

Zjistěme nyní, jak souvisejí parametry r, m, n s daným koeficientem k z původní rovnice (1). Můžeme postupovat například tak, že odvozené vzorce dosadíme do rovnosti $k = qn + x$:

$$k = qn + x = \frac{r(m+n)n}{2} + \frac{r(m-n)m}{2} = \frac{r(m^2+n^2)}{2},$$

odkud po násobení dvěma dostaneme hledanou podmínku ve tvaru

$$2k = r(m^2 + n^2). \tag{4}$$

Jiný způsob odvození rovnosti (4), který je současně přímou „zkouškou" vzorců (3), spočívá v tom, že z nich snadno plynou vyjádření

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r^2(m-n)^2(m^2+n^2)}{4}, \\ x - y &= \frac{r(m-n)^2}{2}, \end{aligned}$$

ze kterých vidíme, že rovnice (1) je pro taková x, y splněna, právě když je splněna podmínka (4). Než zformulujeme dokázaný výsledek, dodejme ještě, že podle vzorců (3) musejí čísla m, n splňovat nerovnost $m > n$. Proto platí následující věta.

Je-li k dané přirozené číslo, pak řešeními rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ jsou právě ty dvojice přirozených čísel x a y, které jsou tvaru

$$x = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{r(m-n)n}{2},$$

kde r, m, n jsou přirozená čísla, pro něž platí rovnost $2k = r(m^2 + n^2)$, přičemž čísla m a n jsou nesoudělná a $m > n$.

Z dokázané věty plyne recept, jak všechna řešení rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ pro daný koeficient k sestrojit: uvážíme všechny možné rozklady čísla $2k$ na dva činitele, $2k = rs$, a pro každý z nich pak najdeme vyhovující čísla m, n z rovnosti $m^2 + n^2 = s$. Pak už nezbývá nic jiného, než že pro konečně mnoho čísel m, jež jsou s číslem s nesoudělná a splňují nerovnosti $m^2 < s < 2m^2$, testujeme, zda rozdíl $s - m^2$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Pro dané $k = 2\,005 = 5 \cdot 401$ (401 je prvočíslo) existují tyto rozklady (protože $m^2 + n^2 \geqq 2^2 + 1^2 = 5$, vynecháme rovnou rozklady, v nichž je činitel $s = m^2 + n^2$ menší než 5):

(i) $r = 802$, $m^2 + n^2 = 5$. Zřejmě $m = 2$ a $n = 1$, odkud $x = 802$ a $y = 401$.

(ii) $r = 401$, $m^2 + n^2 = 10$. Zřejmě $m = 3$ a $n = 1$, odkud $x = 1\,203$ a $y = 401$.

(iii) $r = 10$, $m^2 + n^2 = 401$. Platí $15 \leqq m \leqq 20$, vyhovuje pouze $m = 20$, kdy $n = 1$, $x = 1\,900$ a $y = 95$.

(iv) $r = 5$, $m^2 + n^2 = 802$. Platí $21 \leqq m \leqq 27$, probereme pouze lichá m, vyhovuje jen $m = 21$, kdy $n = 19$, $x = 105$ a $y = 95$.

(v) $r = 2$, $m^2 + n^2 = 2\,005$. Platí $31 \leqq m \leqq 44$, probereme pouze m nesoudělná s číslem 5, vyhovuje jednak $m = 39$, kdy $n = 22$, $x = 663$ a $y = 374$, jednak $m = 41$, kdy $n = 18$, $x = 943$ a $y = 414$.

(vi) $r = 1$, $m^2 + n^2 = 4\,010$. Platí $45 \leqq m \leqq 63$, probereme pouze m nesoudělná s číslem 10, vyhovuje jednak $m = 59$, kdy $n = 23$, $x = 1\,062$ a $y = 414$, jednak $m = 61$, kdy $n = 17$, $x = 1\,342$ a $y = 374$.

Závěr. Úloha má právě osm řešení (x, y). Zapíšeme je v rostoucím pořadí podle první složky x: $(105, 95)$, $(663, 374)$, $(802, 401)$, $(943, 414)$, $(1\,062, 414)$, $(1\,203, 401)$, $(1\,342, 374)$, $(1\,900, 95)$.

Poznámky. Všimněme si, že těchto osm dvojic (x, y) má pouze čtyři různé složky y (každé y je zastoupeno ve dvou dvojicích). To lze vysvětlit takovým pozorováním: má-li pro některé přirozené y kvadratická rovnice

$$x^2 - 2\,005x + (y^2 + 2\,005y) = 0$$

aspoň jedno řešení x v oboru přirozených čísel, má v tomto oboru dvě různá řešení. Snadné vysvětlení plyne z Viètových vzorců: je-li x_1 celočíselný kořen této rovnice, je i druhý kořen $x_2 = 2\,005 - x_1$ celé číslo (různé od x_1); z rovnosti $x_1 x_2 = y^2 + 2\,005y$ plyne, že oba kořeny x_1, x_2 mají stejné znaménko, neboť $y^2 + 2\,005y > 0$.

Nechť dvojice (x, y) přirozených čísel je řešením dané rovnice, takže $x > y$. Po úpravě

$$2(x^2 + y^2) = 2 \cdot 2\,005(x - y),$$
$$(x + y)^2 + (2\,005 - x + y)^2 = 2\,005^2 \tag{1}$$

zjišťujeme, že je navíc $0 < x + y < 2\,005$ a $0 < 2\,005 - x + y < 2\,005$. Všechna řešení pythagorejské rovnice $X^2 + Y^2 = Z^2$ dovedeme popsat: trojice (X, Y, Z) *nesoudělných* přirozených čísel je řešením uvedené rovnice, právě když existují nesoudělná přirozená čísla u, v taková, že $u > v$, uv je sudé a až na případnou výměnu čísel X a Y platí rovnosti

$$X = 2uv,\ Y = u^2 - v^2,\ Z = u^2 + v^2.$$

Odtud plyne další možný postup řešení dané rovnice.

A – S – 1

Z tvaru dané rovnice ihned plyne, že $x > y \geqq 0$ (neboť $6\sqrt{5} - 10 > 0$). Pro taková x, y můžeme umocnit obě (kladné) strany rovnice na druhou a provést další ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 10, \\ x - 2\sqrt{xy} + y &= 6 - 2\sqrt{5}, \\ x + y - 6 &= 2\big(\sqrt{xy} - \sqrt{5}\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Umocněním a další úpravou dostaneme, že pro hledaná celá čísla x, y musí platit

$$\begin{aligned} (x + y - 6)^2 &= 4\big(xy - 2\sqrt{5xy} + 5\big), \\ 8\sqrt{5xy} &= 4(xy + 5) - (x + y - 6)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Z poslední rovnice plyne, že hodnota $\sqrt{5xy}$ je racionální, a tedy celé číslo,[4] takže $5xy$ je druhá mocnina nezáporného celého čísla, jež je zřejmě dělitelné pěti.[5] Platí tedy $5xy = (5k)^2$ neboli $xy = 5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Už teď je výhodné dosadit ne do rovnice (2), ale rovnou do rovnice (1). Dostaneme totiž rovnici

$$x + y - 6 = 2\big(\sqrt{5k^2} - \sqrt{5}\big) \quad \text{neboli} \quad x + y - 6 = 2(k - 1)\sqrt{5},$$

odkud díky iracionalitě čísla $\sqrt{5}$ vyplývá, že ke splnění rovnice (1) je nutné a stačí, aby platily obě rovnosti $k = 1$ a $x + y - 6 = 0$. Ze soustavy rovnic

$$xy = 5k = 5, \quad x + y = 6$$

snadno zjistíme, že $\{x, y\} = \{5, 1\}$, tedy $x = 5$ a $y = 1$, neboť $x > y$ podle úvodní úvahy.

Hledaná dvojice (x, y) je jediná, a to $(x, y) = (5, 1)$.

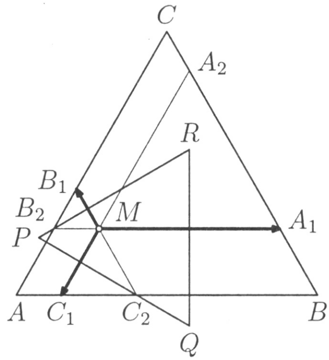
A – S – 2

Označme P, Q, R vrcholy vzniklého trojúhelníku. Protože každá z os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na odpovídající stranu trojúhelníku

[4] Druhá odmocnina nezáporného celého čísla je buď číslo celé, nebo číslo iracionální.

[5] Je-li n celé a n^2 je dělitelné pěti, je i n dělitelné pěti.

ABC, svírají každé dvě ze stran trojúhelníku PQR úhel $60°$, takže se jedná o rovnostranný trojúhelník (obr. 24).



Obr. 24

Ukážeme nyní, že součet délek úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je (nezávisle na poloze bodu M) roven délce a strany výchozího trojúhelníku ABC. Označme proto po řadě B_2, C_2 a A_2 průsečíky přímek MA_1, MB_1 a MC_1 se stranami CA, AB a BC. Protože trojúhelníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 jsou rovnostranné, je

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pro libovolný (vnitřní) bod rovnostranného trojúhelníku platí, že součet jeho vzdáleností od všech stran trojúhelníku je roven příslušné výšce. To je snadno vidět např. z vyjádření obsahu takového trojúhelníku jako součtu obsahů tří trojúhelníků tvořených daným (vnitřním) bodem a dvojicí vrcholů. Protože bod M má od stran (rovnostranného) trojúhelníku PQR vzdálenosti $\frac{1}{2}|MA_1|$, $\frac{1}{2}|MB_1|$ a $\frac{1}{2}|MC_1|$, má výška t tohoto trojúhelníku velikost $t = \frac{1}{2}(|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|) = \frac{1}{2}a$. Protože pro výšku v rovnostranného trojúhelníku ABC platí $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, je $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{3}v^2\sqrt{3}$. Podobně pro obsah T trojúhelníku PQR s výškou t dostáváme

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{1}{3}S,$$

neboli $S = 3T$, což jsme chtěli dokázat.

A – S – 3

Protože všechny hodnoty funkce sinus leží v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, je součin dvou hodnot sinu roven číslu -1, jen když je jedna hodnota 1 a druhá hodnota je -1. Číslo $x \in \mathbb{R}$ je tedy řešením dané rovnice, právě když existují čísla $k, l \in \mathbb{Z}$ taková, že platí dvojice rovností

$$\begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi, \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi. \end{cases}$$

Vyřešíme-li tyto lineární rovnice, dostaneme vyjádření

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = -\dfrac{9\pi}{2} + 22l\pi, \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = \dfrac{13\pi}{2} + 22l\pi. \end{cases}$$

Najdeme nyní všechny dvojice celých čísel (k, l), pro něž platí

$$\frac{3\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{9\pi}{2} + 22l\pi, \quad \text{resp.} \quad -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = \frac{13\pi}{2} + 22l\pi.$$

Snadnou úpravou těchto rovnic (včetně krácení číslem 2π) dostaneme

$$5k + 3 = 11l, \quad \text{resp.} \quad 5k - 5 = 11l.$$

Upravíme-li první rovnici na tvar $5(k-6) = 11(l-3)$, pak úvahou o dělitelnosti nesoudělnými čísly 5 a 11 zjistíme, že všechna celočíselná řešení takové rovnice jsou tvaru $k = 6 + 11n$ a $l = 3 + 5n$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Dosazením do příslušného vzorce pro x tak dostáváme první skupinu řešení

$$x = \frac{3\pi}{2} + 10k\pi = \frac{3\pi}{2} + 10(6 + 11n)\pi = 61{,}5\pi + 110n\pi.$$

Podobně z druhé rovnice $5k - 5 = 11l$ upravené do tvaru $5(k-1) = 11l$ zjistíme, že $k = 1 + 11n$, $l = 5n$ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$, takže druhá skupina řešení má vyjádření

$$x = -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{7\pi}{2} + 10(1 + 11n)\pi = 6{,}5\pi + 110n\pi.$$

Shrnutí: Všechna řešení dané rovnice jsou dána vzorci

$$x = 61{,}5\pi + 110n\pi \quad \text{a} \quad x = 6{,}5\pi + 110n\pi, \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Protože $61{,}5 - 6{,}5 = 55 = \frac{110}{2}$, lze všechna řešení zapsat jedním vzorcem

$$x = 6{,}5\pi + 55n\pi, \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Jiné řešení. Díky goniometrickému vzorci

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$$

lze rovnici $1 + \sin A \sin B = 0$ přepsat do tvaru

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = 2.$$

S ohledem na obor hodnot funkce kosinus je poslední rovnice splněna, právě když platí $\cos(A + B) = 1$ a $\cos(A - B) = -1$. Pro zlomky A, B z původní rovnice tak dostáváme soustavu rovností

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{x + \pi}{5} + \frac{x - \pi}{11} = 2k\pi, \\ A - B &= \frac{x + \pi}{5} - \frac{x - \pi}{11} = \pi + 2l\pi, \end{aligned}$$

která musí platit pro vhodná čísla $k, l \in \mathbb{Z}$. Sečtením a odečtením dostaneme

$$\frac{x + \pi}{5} = \frac{\pi}{2} + (k + l)\pi \qquad \text{a} \qquad \frac{x - \pi}{11} = -\frac{\pi}{2} + (k - l)\pi,$$

odkud dvojím způsobem vyjádříme neznámou x:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 5(k + l)\pi = -\frac{9\pi}{2} + 11(k - l)\pi.$$

Snadno zjistíme, že čísla k, l jsou zde svázána podmínkou $3(k - 1) = 8l$, což znamená, že $l = 3n$ a $k = 8n + 1$ pro vhodné $n \in \mathbb{Z}$. Dosazením do vzorce pro x tak dojdeme ke stejnému vyjádření

$$x = \frac{13\pi}{2} + 55n\pi = 6{,}5\pi + 55n\pi$$

jako v prvním řešení.

A – II – 1

Hledáme celá čísla a, b, pro která $(a+b)^2 + a(a+b) + b = 0$, což je pro neznámou b kvadratická rovnice $b^2 + (3a+1)b + 2a^2 = 0$ s celočíselnými koeficienty. Ta má celočíselný kořen, jedině když je její diskriminant

$$D = (3a+1)^2 - 4 \cdot 2a^2 = (a+3)^2 - 8$$

úplný čtverec. Ten je přitom o osm menší než jiný úplný čtverec $(a+3)^2$. Jak snadno zjistíme (rozdíly druhých mocnin dvou sousedních přirozených čísel postupně rostou), rozdíl 8 mají pouze úplné čtverce 9 a 1, takže $(a+3)^2 = 9$, odkud plyne $a = -6$ nebo $a = 0$. Pro $a = -6$ vychází $b = 8$ a $b = 9$, pro $a = 0$ vychází $b = 0$ a $b = -1$. Dostáváme tak čtyři řešení: (a, b) je jedna z dvojic $(-6, 8)$, $(-6, 9)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$.

Poznámky. Zvolíme-li za neznámou a místo b, vyjde rovnice

$$2a^2 + 3ba + (b^2 + b) = 0$$

s diskriminantem $D' = 9b^2 - 8 \cdot (b^2 + b) = (b-4)^2 - 16$; úplné čtverce lišící se o 16 jsou pouze 0, 16 a 9, 25.

Úlohu nalézt dva úplné čtverce x^2 a y^2 s daným rozdílem d lze pro malé hodnoty d (jako $d = 8$ či $d = 16$ v naší úloze) vyřešit otestováním několika prvních čtverců 0, 1, 4, 9, … Pro jakékoli přirozené d lze postupovat tak, že rovnici $x^2 - y^2 = d$ upravíme na $(x-y)(x+y) = d$ a vypíšeme všechny rozklady daného čísla d na součin $d_1 d_2$ dvou celočíselných činitelů; z rovnic $d_1 = x - y$, $d_2 = x + y$ pak vypočteme příslušná x a y.

A – II – 2

Nejdříve dokážeme, že pro členy zkoumané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: rovnost $a_n = 0$ je splněna pro některé přirozené n, právě když pro totéž n platí $a_{n+3} = 0$. Skutečně, je-li $a_n = 0$, pak jmenovatelé zlomků v zadané rovnosti jsou navzájem opačná (nenulová) čísla, takže takoví musí být i jejich čitatelé. Z rovnosti

$$a_{n+3} - a_{n+2} = -(a_{n+3} + a_{n+2})$$

už plyne $a_{n+3} = 0$. Obráceně, platí-li $a_{n+3} = 0$, jsou čitatelé zmíněných zlomků navzájem opačná čísla, takže takoví musí být i jejich jmenovatelé, odkud $a_n = 0$.

Dokázaná vlastnost má tento důsledek: z podmínky $a_{33} \neq 0$ plyne $a_{3k} \neq 0$ (pro každé $k \geqq 1$), z $a_{22} \neq 0$ plyne $a_{3k+1} \neq 0$ a z $a_{11} \neq 0$ plyne $a_{3k+2} \neq 0$ (vždy pro každé $k \geqq 0$). Dohromady vychází, že *žádný člen* a_n *zkoumané posloupnosti není roven nule.*

Z rovnosti ze zadání plyne rovnost

$$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_{n+3} + a_{n+2})(a_n - a_{n+1}),$$

z níž po roznásobení a následném zjednodušení dostaneme (pro libovolné přirozené n)

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_n a_{n+2}.$$

Zvětšíme-li n o 1, dostaneme analogický vztah, který platí pro libovolné nezáporné celé n:

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3}.$$

Vynásobíme-li obě rovnosti a výsledek zkrátíme (nenulovým!) číslem $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$, vyjde $a_{n+4} = a_n$, tj. daná posloupnost má periodu 4. Proto $a_1 = a_{33} = 1$, $a_2 = a_{22} = 2$, $a_3 = a_{11} = 4$, $a_4 = a_1 a_3 / a_2 = 2$, tudíž

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{100}^k = 25(1^k + 2^k + 4^k + 2^k) = \bigl(5(1 + 2^k)\bigr)^2.$$

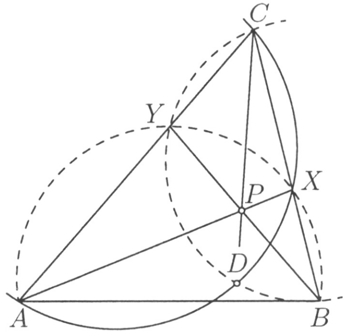
Tím je důkaz hotov.

A – II – 3

Dané čtyři body A, B, X, Y leží na kružnici (obr. 25), právě když

$$|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|.$$

Kružnice opsaná trojúhelníku ACX protne polopřímku opačnou k polo-



Obr. 25

přímce PC v bodě, který označíme D. Pro tento bod platí

$$|PA| \cdot |PX| = |PC| \cdot |PD|.$$

Rovnost z první věty řešení tedy nastane, právě když platí

$$|PB| \cdot |PY| = |PC| \cdot |PD|.$$

Tato rovnost je splněna, právě když bod D leží na kružnici opsané trojúhelníku BCY, tedy právě když je bod $D \neq C$ druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY. Důkaz je hotov.

Poznámky. Úlohu je možné ihned vyřešit na základě poznatku o tom, jak vypadá množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím. Je to vždy přímka (zvaná chordála), jež je kolmá ke středné obou kružnic a prochází jejich společnými body (pokud existují). Rovnost z první věty řešení proto vyjadřuje právě to, že bod P leží na chordále kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY.

A – II – 4

Předně si uvědomme, že s každým reálným řešením (x, y) dané soustavy rovnic jsou jejími řešeními také dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$, Stačí se proto omezit na řešení v oboru nezáporných reálných čísel. Navíc s každým řešením (x, y) je řešením dané soustavy i dvojice (y, x). Můžeme proto dále předpokládat, že $0 \leqq x \leqq y$.

Přepišme nejprve obě rovnice soustavy pomocí téhož známého vzorce $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$\sin^2 x + 1 - \sin^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + 1 - \sin^2 x = x^2.$$

Sečtením obou rovnic pak dostaneme

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{1}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 y = y^2 - x^2,$$

neboli

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2. \tag{2}$$

Za uvedeného předpokladu $0 \leqq x \leqq y$ ze vztahu (1) navíc plyne, že $0 \leqq x \leqq y \leqq \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi$, a protože funkce sinus je v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ nezáporná a rostoucí, vidíme, že pro taková reálná čísla x a y je levá strana rovnice (2) nekladná, zatímco pravá strana je nezáporná. To znamená, že musí být $y^2 - x^2 = 0$, což za uvedených předpokladů dává $x = y$ a spolu s (1) tak máme $x = y = 1$.

V oboru nezáporných reálných čísel má daná soustava rovnic jediné řešení, a to $(x, y) = (1, 1)$.

Závěr. Daná soustava rovnic má právě čtyři řešení v oboru reálných čísel. Jsou jimi následující dvojice: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

A – III – 1

Dokážeme, že člen a_7 je vždy složené číslo dělitelné jedenácti. Klíčem k řešení úlohy je kritérium dělitelnosti jedenácti. Je-li $\overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}$ zápis čísla m v desítkové soustavě, dává číslo m při dělení jedenácti stejný zbytek jako střídavý součet jeho číslic:

$$\mathrm{zb}(m) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^k c_k.$$

Pro zbytek čísla b_n, které má opačné pořadí číslic než číslo a_n, tedy platí, že je $\mathrm{zb}(b_n) = \pm\,\mathrm{zb}(a_n)$ podle toho, je-li počet číslic čísla a_n lichý či sudý. Proto je-li některý člen uvažované posloupnosti dělitelný jedenácti, jsou jedenácti dělitelné i všechny následující členy. Navíc jakmile má nějaký člen a_n uvažované posloupnosti sudý počet číslic, je $\mathrm{zb}(a_n) = -\,\mathrm{zb}(b_n)$, takže $a_{n+1} = a_n + b_n$ je už dělitelné jedenácti (a stejně tak i další členy).

Posloupnost (a_n) je zřejmě rostoucí. Má-li člen a_1 sudý počet číslic, bude již člen a_2 složené číslo dělitelné jedenácti s výjimkou případu $a_1 = 10$, kdy ovšem $a_3 = 22$. Stačí tedy ukázat, že i pro čísla a_1 s lichým počtem číslic bude mezi prvními šesti členy posloupnosti vždy aspoň jeden člen se sudým počtem číslic. Dokážeme to sporem v následujícím odstavci.

Předpokládejme naopak, že všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ mají lichý počet číslic. Označme c první a d poslední číslici čísla a_1, takže $1 \leqq c \leqq 9$ a $0 \leqq d \leqq 9$ (v případě jednomístného a_1 klademe $c = d$). Číslo b_1 pak bude formálně začínat číslicí d a končit číslicí c, a protože předpokládáme, že číslo $a_2 = a_1 + b_1$ má rovněž lichý, tedy stejný počet číslic, musí být $c + d < 10$. To bude tedy číslice na jeho posledním místě, zatímco na prvním místě bude stát $c + d$ nebo $c + d + 1$ (podle toho, zda při sčítání došlo na předposledním místě k přechodu přes desítku), v každém případě bude na prvním místě číslice aspoň $c+d$. Podobně postupně zjistíme, že první číslice čísla $a_3 = a_2 + b_2$ bude aspoň $2(c+d)$, první číslice čísla $a_4 = a_3 + b_3$ bude aspoň $4(c+d)$, první číslice čísla $a_5 = a_4 + b_4$ bude aspoň $8(c+d)$ a první číslice čísla $a_6 = a_5 + b_5$ bude aspoň $16(c+d)$. Protože $1 \leqq c+d < 10$, nemůže už zřejmě být $16(c+d) < 10$. Aspoň v jednom z čísel $a_2, a_3, \ldots, a_6$ se tudíž počet číslic zvýšil z lichého počtu na sudý.

Tím je úloha vyřešena. Dokázali jsme, že a_7 není nikdy prvočíslo.

Poznámka. Pro $a_1 = 10\,220$ vyjde $a_6 = 185\,767$, což je prvočíslo.

A – III – 2

Ukážeme, že z předpokladu úlohy plynou silnější odhady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq \frac{m}{n} \leqq 2 - \frac{2}{n}. \qquad (1)$$

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$(x+m-1)(x+n) = m.$$

Je-li v této rovnosti x celé číslo, dostáváme rozklad přirozeného čísla m na součin dvou celých čísel, která tudíž leží obě buď v intervalu $\langle 1, m\rangle$, nebo v intervalu $\langle -m, -1\rangle$. V každém případě rozdíl těchto dvou čísel nepřevyšuje (společnou) délku obou intervalů:

$$(x+n) - (x+m-1) \leqq m-1, \quad \text{neboli} \quad n \leqq 2m-2,$$

odkud plyne dolní odhad (1). Vzhledem k symetrické roli čísel m a n platí rovněž nerovnost $m \leqq 2n-2$, která vede na horní odhad (1).

Jiné řešení. S ohledem na symetrii stačí uvažovat případ $m \geqq n$ a dokázat horní odhad (1) z prvního řešení, tedy nerovnost $m \leqq 2n-2$.

Daná rovnice je tvaru $x^2 + (m+n-1)x + mn - m - n = 0$ a má diskriminant

$$\begin{aligned} D &= (m+n-1)^2 - 4(mn-m-n) = \\ &= m^2 + n^2 - 2mn + 2m + 2n + 1 = (m-n+1)^2 + 4n. \end{aligned}$$

Ten musí být druhou mocninou celého čísla, má-li mít daná rovnice celočíselné řešení. Protože $4n$ je kladné sudé číslo, je číslo D větší než mocnina

$(m-n+1)^2$ a má stejnou paritu jako její základ $(m-n+1)$, který je kladný, neboť uvažujeme pouze případ $m \geqq n$. Proto musí platit $D = k^2$, kde k je celé číslo splňující podmínky $k > m-n+1 > 0$ a $k \equiv m-n+1 \pmod 2$. Znamená to, že $k \geqq m-n+3$, takže platí

$$\begin{aligned} D = (m-n+1)^2 + 4n = k^2 &\geqq \\ \geqq (m-n+3)^2 = (m-n+1+2)^2 &= \\ = (m-n+1)^2 + 4(m-n+1) + 4. \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $4n \geqq 4(m-n+1)+4$, neboli $m \leqq 2n-2$, což jsme měli dokázat.

Poznámky. Protože dvojice tvaru $(m,n) = (2n-2, n)$ a $(m,n) = (m, 2m-2)$ vyhovují podmínce úlohy, jsou odhady (1) nejlepší možné.

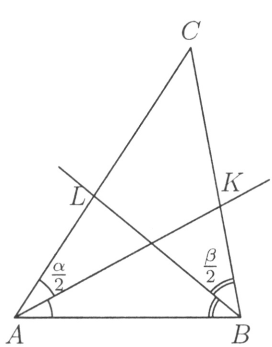
Je možné popsat všechny dvojice přirozených čísel (m,n), které vyhovují podmínce úlohy, a to způsobem uvedeným v následujícím tvrzení.

Věta. *Nechť m a n jsou celá čísla. Rovnice $(x+m)(x+n) = x+m+n$ má aspoň jedno celočíselné řešení, právě když jsou čísla m, n tvaru*

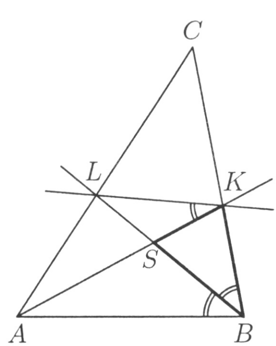
$$m = (a-1)b \quad \text{a} \quad n = a(b-1), \quad \text{kde} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

A – III – 3

Označme úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Z vlastností bodů K a L je zřejmé (obr. 26), že body A, B, K, L leží na kružnici, právě když $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KBL|$, tj. právě když $\alpha = \beta$.



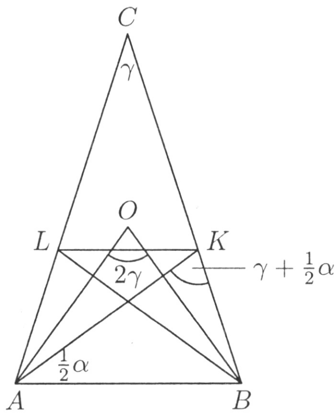
Obr. 26



Obr. 27

Přímka KL se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BKS (nutně v bodě K), právě když se rovnají úsekový a obvodový úhel příslušné tětivě KS (obr. 27): $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LBK| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle LBA|$. Poslední rovnost je ovšem ekvivalentní tomu, že body A, B, K, L leží na kružnici, což jak už víme, je právě když $\alpha = \beta$. (Jak je zřejmé ze symetrie, je to zároveň ekvivalentní tomu, že se přímka KL dotýká kružnice opsané trojúhelníku ALS.)

Z uvedených výsledků plyne, že svá další zkoumání můžeme omezit na rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB. Podívejme se nejprve, kdy kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABKL$ obsahuje bod O. Středový úhel AOB v kružnici opsané trojúhelníku ABC má velikost 2γ, zatímco velikost úhlu AKB je $180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \beta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ (obr. 28). Bod O přitom



Obr. 28

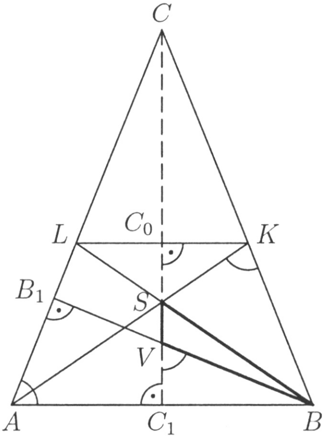
nemůže ležet na straně AB (když je úhel γ pravý) ani v polorovině opačné k ABC (když je úhel γ tupý), protože v tom případě vyjde

$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AKB| = (360^\circ - 2\gamma) + (\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = \\ = 180^\circ + \tfrac{3}{2}\alpha + \beta > 180^\circ.$$

Body A, B, K, O tedy leží na jedné kružnici, právě když

$$2\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

Zbývá zodpovědět otázku, kdy se kružnice opsaná trojúhelníku BVS dotýká přímky KL. V polorovině KLB existují dvě kružnice, které obsahují body B a S a dotýkají se přímky KL (Apolloniova úloha, pro bod dotyku T z mocnosti bodu L k takové kružnici platí $|LT|^2 = |LS| \cdot |LB|$). Jednu takovou kružnici už známe, je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, jež se přímky KL dotýká v bodě K. Druhá kružnice se tedy dotýká přímky KL v bodě K' souměrně sdruženém s K podle středu L. Má-li kružnice l opsaná trojúhelníku BVS ležet v polorovině KLB, musí v ní ležet i její bod V, který je pak nutně vnitřním bodem úsečky C_0C_1, jež je částí osy úsečky AB (obr. 29). Úhel SBV je tedy ostrý (jeho velikost



Obr. 29

je nejvýše $\frac{1}{2}\beta$), proto střed kružnice l leží v polorovině C_0C_1B a leží tam i jeho kolmý průmět (případný bod dotyku) na přímku KL. Kružnice l se tudíž dotýká přímky KL jedině v případě, když je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, tedy když body B, K, S, V leží na jedné kružnici. To nastane, právě když $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ (to platí bez ohledu na to, zda bod V leží mezi body C_1, S, nebo mezi body C_0, S; obr. 29). Z pravoúhlých trojúhelníků ABB_1 a BVC_1 plyne $|\sphericalangle C_1VB| = \alpha$, takže rovnost $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ platí, právě když

$$\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

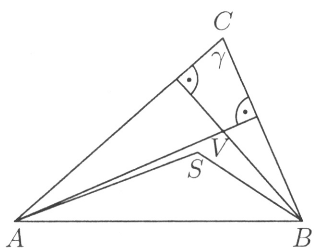
Dokázali jsme, že obě podmínky a) a b) jsou ekvivalentní tomu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný s úhly $\alpha = \beta = 72^\circ$ a $\gamma = 36^\circ$.

A – III – 4

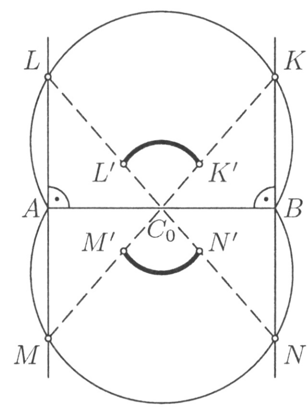
Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží body V a S uvnitř něho. Označíme-li velikosti úhlů v daném trojúhelníku obvyklým způsobem, platí (obr. 30)

$$|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Body A, B, V a S tedy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle ASB|$, což je podle uvedených vzorců ekvivalentní s rovností $\gamma = 60^\circ$. Vrchol C tak nutně leží na některém ze dvou kružnicových oblouků, z nichž je vidět úsečku AB pod úhlem 60°. Protože je trojúhelník ABC ostroúhlý, musí navíc vrchol C ležet uvnitř pásu vymezeného kolmicemi k přímce AB v bodech A a B. Vrchol C je tedy vnitřním bodem takto vymezených kružnicových oblouků KL a MN (obr. 31).



Obr. 30



Obr. 31

Označme dále C_0 střed úsečky AB. Protože těžiště T každého z uvažovaných trojúhelníků ABC je obrazem bodu C ve stejnolehlosti se středem C_0 a koeficientem $\frac{1}{3}$, je bod T vnitřním bodem jednoho z oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$, jež jsou obrazy oblouků KL a MN v uvažované stejnolehlosti.

Protože zmíněná stejnolehlost je vzájemně jednoznačné zobrazení, je zřejmé, že každý vnitřní bod oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$ má požadovanou vlastnost, tj. je těžištěm ostroúhlého trojúhelníku ABC s úhlem 60° při vrcholu C, jehož odpovídající body V a S leží na jedné kružnici s vrcholy A a B.

A – III – 5

Hledejme trojice p, q, r podle toho, které z těchto tří čísel je největší:

▷ *Největší je p.*

Pak z podmínky $p \mid q + r$ a z nerovnosti $q + r < 2p$ plyne $q + r = p$. Z druhé podmínky pak dostaneme $q \mid r + 2p = 3r + 2q$, tedy $q \mid 3r$, což vzhledem k různosti prvočísel znamená, že $q = 3$. Tedy $p = r + 3$ a poslední podmínka říká, že $r \mid r + 12$, neboli $r \mid 12$, tedy $r = 2$ (prvočísla mají být různá). Je tedy $p = 5$. Tato trojice vskutku splňuje podmínky ze zadání.

▷ *Největší je q.*

Pak podmínka $q \mid r + 2p$ a nerovnost $r + 2p < 3q$ dávají $r + 2p = q$ nebo $r + 2p = 2q$.

Je-li $2q = r + 2p$, musí být r sudé. Je tedy $r = 2$ a z rovnosti $2q = 2 + 2p$ plyne $q = p + 1$, což pro prvočísla p, q větší než $r = 2$ není možné.

Je-li $q = r + 2p$, první podmínka říká, že $p \mid 2r + 2p$, tedy $p \mid 2r$, tudíž $p = 2$. Poslední podmínka pak dává $r \mid p + 3q = 3r + 7p = 3r + 14$, tedy $r \mid 14$, takže $r = 7$. Potom je $q = r + 2p = 11$. Tato trojice rovněž vyhovuje zadání.

▷ *Největší je r.*

Pak srovnáme podmínku $r \mid p + 3q$ a nerovnost $p + 3q < 4r$.

Kdyby bylo $p + 3q = 3r$, bylo by $p = 3(r - q)$, tedy $p = 3$, $r - q = 1$, takže $r = 3$ a $q = 2$, což nejsou tři různá prvočísla.

Pokud $p + 3q = 2r$, dostáváme z první podmínky $p \mid 2(q + r) = p + 5q$, takže $p \mid 5q$ a $p = 5$. Druhá podmínka pak dává $q \mid 2(r + 2p) = 2r + 20 = 3q + 25$, tedy $q = 5$, a výslednou trojici netvoří různá prvočísla.

Konečně buď $p + 3q = r$. První podmínka pak dává $p \mid p + 4q$, takže $p \mid 4q$ a $p = 2$. Druhá podmínka pak říká, že $q \mid r + 2p = 3q + 6$, tedy $q \mid 6$ a $q = 3$, neboť $q \neq p = 2$. Potom $r = p + 3q = 11$. Tato trojice také vyhovuje zadání.

Řešením úlohy jsou tři trojice prvočísel (p, q, r), a to $(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$ a $(2, 3, 11)$.

A – III – 6

Pro každé přípustné φ platí

$$2 \operatorname{cotg}^2 2\varphi = 2 \left(\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \right)^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{cotg}^2 \varphi - 2).$$

Položme $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 y = b$ a $\operatorname{tg}^2 z = c$, kde a, b, c jsou kladná reálná čísla. Danou soustavu tak převedeme na tvar

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}\Big(b + \frac{1}{b}\Big) &= 2, \\ b + \frac{1}{2}\Big(c + \frac{1}{c}\Big) &= 2, \\ c + \frac{1}{2}\Big(a + \frac{1}{a}\Big) &= 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \geqq b \geqq c$. Při takovém uspořádání plyne z předchozí soustavy rovnic

$$b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c} \leqq a + \frac{1}{a}.$$

Protože pro každé kladné x platí $x + 1/x \geqq 2$, plyne ze soustavy (1) navíc $0 < a, b, c \leqq 1$. Funkce $f(x) = x + 1/x$ je ovšem na intervalu $(0; 1\rangle$ klesající, proto platí také nerovnost

$$a + \frac{1}{a} \leqq b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c}.$$

To spolu s předchozími nerovnostmi dává $a = b = c$.

Zbývá tak určit všechna $u \in (0; 1\rangle$, která vyhovují rovnici

$$u + \frac{1}{2}\Big(u + \frac{1}{u}\Big) = 2.$$

Po snadné úpravě obdržíme kvadratickou rovnici

$$3u^2 - 4u + 1 = 0, \quad \text{tj.} \quad (u - 1)(3u - 1) = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má právě dva kladné reálné kořeny $u_1 = 1$ a $u_2 = \frac{1}{3}$. S ohledem na použité substituce a periodičnost funkce tangens jsou řešením dané soustavy rovnic právě následující trojice (x, y, z) reálných čísel

$$\Big(\frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_2 \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_3 \frac{\pi}{2}\Big) \quad \text{a} \quad \Big(\pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_3\pi\Big),$$

kde k_1, k_2, k_3 jsou libovolná celá čísla a tři znaménka v trojici druhého typu jsou vybrána libovolně, tj. navzájem nezávisle.