54. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 54. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2004/2005. 46. mezinárodní matematická olympiáda. 17. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 29–43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405088

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a+d=b+c$. Dokažte nerovnost

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \geqq 0.$$

(*E. Kováč*)

C – I – 2

Zjistěte, pro která přirozená čísla n ($n \geqq 2$) je možno z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrat navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n. (*J. Zhouf*)

C – I – 3

V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné.

(*J. Šimša*)

C – I – 4

Tři čtyřmístná čísla k, l, m jsou stejného tvaru $ABAB$ (tj. číslice na místě jednotek je stejná jako číslice na místě stovek a číslice na místě desítek je stejná jako číslice na místě tisíců). Číslo l má číslici na místě jednotek o 2 větší a číslici na místě desítek o 1 menší než číslo k. Číslo m je součtem čísel k a l a je dělitelné devíti. Určete všechna taková čísla k.

(*T. Joska*)

C – I – 5

Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel a, b, c, jejichž součin abc má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. *(J. Šimša)*

C – I – 6

V trojúhelníku ABC se stranou BC délky 2 cm je bod K středem strany AB. Body L a M rozdělují stranu AC na tři shodné úsečky. Trojúhelník KLM je rovnoramenný a pravoúhlý. Určete délky stran AB, AC všech takových trojúhelníků ABC. *(P. Leischner)*

C – S – 1

Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro které platí

$$x + yz = 2\,005,$$
$$y + xz = 2\,006.$$

(J. Šimša)

C – S – 2

Pro která přirozená čísla n lze z množiny $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ vybrat čtyři navzájem různá čísla a, b, c, d tak, že platí $ab = cd$? *(J. Šimša)*

C – S – 3

Je dána úsečka AB. Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal $1/8$ obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S. *(A. Jančařík)*

C – II – 1

Určete číslice x, y, z tak, aby platila rovnost

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z{,}yx},$$

kde $\overline{z{,}yx}$ značí číslo složené ze z jednotek, y desetin a x setin.

(J. Zhouf)

C – II – 2

Ke každému přirozenému číslu $n > 2$ najděte aspoň jednu dvojici různých přirozených čísel p, q tak, aby číslo $\frac{1}{n}$ bylo aritmetickým průměrem čísel $\frac{1}{p}$ a $\frac{1}{q}$. *(L. Boček)*

C – II – 3

Libovolným vnitřním bodem P úhlopříčky AC daného obdélníku $ABCD$ jsou vedeny rovnoběžky s jeho stranami, které protínají úsečky AB, BC, CD a DA po řadě v bodech K, L, M a N. Dokažte, že

a) přímky LM a KN jsou rovnoběžky,

b) vzdálenost rovnoběžek LM a KN je konstantní (nezávisí na volbě bodu P),

c) pro obvod o čtyřúhelníku $KLMN$ platí nerovnost $o \geqq 2|AC|$.

(J. Švrček)

C – II – 4

Popište konstrukci lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD, kterému je možno opsat kružnici s poloměrem $r = 5\,\mathrm{cm}$, je-li dána vzdálenost $d = 2\,\mathrm{cm}$ jejího středu od průsečíku úhlopříček a $|\sphericalangle BAC| = 70°$.

(E. Kováč)

C – I – 1

Vyjádříme-li z rovnosti v předpokladu např. $d = b + c - a$ a dosadíme-li tuto hodnotu do levé strany dokazované nerovnosti, postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a-b) + (a-c)(a-c) + (b+c-2a)(b-c) = \\
&= a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + bc - 2ab - bc - c^2 + 2ac = \\
&= 2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2(a^2 - 2ab + b^2) = 2(a-b)^2.
\end{aligned}$$

Tento výraz je nezáporný pro všechna reálná čísla a, b, čímž je daná nerovnost dokázána.

Jiné řešení. Nejprve ponecháme podmínku $a + d = b + c$ stranou a ukážeme, že výraz z levé strany dokazované nerovnosti lze upravit na součin. První část výrazu, součin $(a-b)(c-d)$, je roven nule v případech, kdy $a = b$ nebo $c = d$; druhá část výrazu, součet $(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c)$, má rovněž v obou případech $a = b$, $c = d$ nulovou hodnotu, takže musí být dělitelný součinem $(a-b)(c-d)$. Přesvědčíme se o tom roznásobením a následným postupným vytýkáním:

$$\begin{aligned}
&(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) = \\
&\quad = (ab - bc - ad + cd) + (bd - ab - cd + ac) = \\
&\quad = (-bc + bd) + (-ad + ac) = -b(c-d) + a(c-d) = \\
&\quad = (a-b)(c-d).
\end{aligned}$$

Dokazovaná nerovnost má proto tvar

$$2(a-b)(c-d) \geqq 0,$$

do kterého nyní dosadíme $c - d = a - b$. Dostaneme tak nerovnost

$$2(a-b)^2 \geqq 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla a, b. Tím je daná nerovnost dokázána.

C – I – 2

Je-li n sudé a v dané množině jsou sudá čísla 2 a $n-2$, přičemž $2 < n-2$, je jejich součet $2 + (n-2) = n$ dělitelný číslem n. Z podmínky $2 < n-2$ tedy plyne, že všechna sudá čísla $n > 4$ vyhovují podmínce úlohy.

Z množin $\{1\}$ (pro $n = 2$) a $\{1, 2, 3\}$ (pro $n = 4$) zřejmě nelze požadovaný výběr provést.

Je-li n liché, můžeme pro $n > 7$ z dané množiny analogicky vybrat tři sudá čísla 4, $n - 3$, $n - 1$, přičemž $4 < n - 3 < n - 1$, se součtem $4 + (n - 3) + (n - 1) = 2n$, který je dělitelný číslem n.

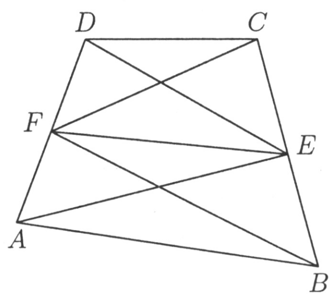
Z množin $\{1, 2\}$ (pro $n = 3$), $\{1, 2, 3, 4\}$ (pro $n = 5$) a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (pro $n = 7$) zřejmě nelze vybrat ani dvě, ani tři různá sudá čísla s požadovanou vlastností.

Podmínce úlohy vyhovují číslo $n = 6$ a všechna přirozená čísla $n \geqq 8$.

C – I – 3

Příčka EF daného čtyřúhelníku $ABCD$ je v každém z trojúhelníků AED i BFC těžnicí (obr. 1), což znamená, že pro jejich obsahy platí

$$\begin{aligned} S(AED) &= 2S(FED) = 2S(FEA), \\ S(BFC) &= 2S(FEC) = 2S(FEB). \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1

Oba trojúhelníky FED, FEC mají společnou stranu FE a jejich obsahy jsou stejné, právě když $CD \parallel FE$. Podobně i trojúhelníky FEA, FEB mají společnou stranu FE a jejich obsahy jsou stejné, právě když $AB \parallel FE$. Proto mají-li trojúhelníky AED a BFC stejný obsah, je $CD \parallel FE$ a $AB \parallel FE$, tedy $AB \parallel CD$.

Je-li obráceně $AB \parallel CD$, je střední příčka EF lichoběžníku $ABCD$ rovnoběžná s oběma základnami AB a CD, takže dle předchozí úvahy $S(FED) = S(FEC)$ a podle (1) také $S(AED) = S(BFC)$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C – I – 4

Aby bylo číslo $m = \overline{CDCD}$ dělitelné devíti, musí být součet $2(C + D)$ jeho číslic dělitelný devíti, tudíž i součet $C + D$ musí být dělitelný devíti, neboli číslo $\overline{CD}$ musí být dělitelné devíti.

Má-li číslo k číslice A, B, A, B, má číslo l číslice $A - 1$, $B + 2$, $A - 1$, $B + 2$. Jelikož číslo $B + (B + 2) = 2B + 2$ je sudé, je číslice D čísla $m = k + l$ sudá. Proto připadají vzhledem k dělitelnosti devíti v úvahu jen tato čísla m: 1 818, 3 636, 5 454, 7 272, 9 090. Protože číslice C je ve všech případech lichá a součet číslic $A + (A - 1) = 2A - 1$ je rovněž lichý, nemůže být $B + (B + 2) > 10$, tedy $B + (B + 2) = D$ a $A + (A - 1) = C$. Odtud už snadno určíme odpovídající číslice C, D a čísla k, l zapíšeme do následující tabulky:

m	1 818	3 636	5 454	7 272	9 090
k	1 313	2 222	3 131	4 040	neexistuje
l	0 505	1 414	2 323	3 232	neexistuje

Číslo 0505 není čtyřmístné, proto jsou řešením úlohy pouze čísla $k \in$ $\in \{2\,222, 3\,131, 4\,040\}$

C – I – 5

Pro dvojmístná čísla a, b, c je součin abc číslo čtyřmístné, nebo pětimístné, nebo šestimístné. Jsou-li proto všechny číslice čísla abc rovny téže číslici k, platí jedna z rovností $abc = k \cdot 1\,111$, $abc = k \cdot 11\,111$ či $abc = k \cdot 111\,111$, $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Čísla $1\,111 = 11 \cdot 101$ a $11 \cdot 111 = 41 \cdot 271$ mají ovšem ve svém rozkladu trojmístná prvočísla, takže nemohou být součinem dvojmístných čísel. Zbývá proto jediná možnost:

$$abc = k \cdot 111\,111 = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Podívejme se, jak mohou být prvočísla 3, 7, 11, 13, 37 rozdělena do jednotlivých činitelů a, b, c. Protože součiny $37 \cdot 3$ a $3 \cdot 7 \cdot 11$ jsou větší než 100, musí být prvočíslo 37 samo jako jeden činitel a zbylá čtyři prvočísla 3, 7, 11, 13 musí být rozdělena do dvojic. Jelikož i součin $11 \cdot 13$ je větší než 100, připadají do úvahy pouze rozdělení na činitele $3 \cdot 11$, $7 \cdot 13$ a 37, nebo na činitele $3 \cdot 13$, $7 \cdot 11$ a 37. K těmto činitelům ještě připojíme možné činitele z rozkladu číslice k a dostaneme řešení dvou typů:

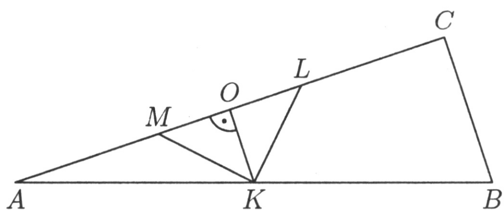
$$a = 33k_1,\ b = 91,\ c = 37k_2, \quad \text{kde } k_1 \in \{1,2,3\},\ k_2 \in \{1,2\},$$
$$a = 39k_1,\ b = 77,\ c = 37k_2, \quad \text{kde } k_1 \in \{1,2\},\ k_2 \in \{1,2\},$$

Hledaný počet trojic čísel a, b, c je tedy $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

C – I – 6

Body L a M na straně AC zvolíme tak, aby $|AM| = |ML| = |LC|$. Těžnice KO trojúhelníku KLM je střední příčkou trojúhelníku ABC, platí tedy $|KO| = \frac{1}{2}|BC|$, $|AC| = 6|MO|$ a $|AB| = 2|AK|$. Rozlišíme tři možnosti:

(a) Nechť $|KL| = |KM|$ (obr. 2). Pak je $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle MOK| = 90°$ a $|MO| = |KO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKO plyne



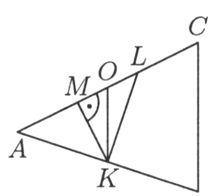
Obr. 2

$$|AK| = \sqrt{(3|MO|)^2 + |KO|^2} = \sqrt{10|KO|^2} = \sqrt{10}|KO| = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \sqrt{10}|BC| = 2\sqrt{10}\,\text{cm},$$
$$|AC| = 6|MO| = 6|KO| = 3|BC| = 6\,\text{cm}.$$

(b) Nechť $|ML| = |MK|$ (obr. 3). Pak je $|\sphericalangle KML| = 90°$ a $|AM| =$



Obr. 3

$= |ML| = |MK| = 2|MO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KMO plyne

$$|KO| = \sqrt{|MO|^2 + (2|MO|)^2} = \sqrt{5}|MO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\text{ cm}.$$

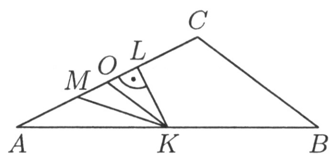
Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKM plyne

$$|AK| = \sqrt{|AM|^2 + |MK|^2} = \sqrt{2}|MK| = 2\sqrt{2}|MO| = \\ = \frac{2\sqrt{10}}{5}|KO| = \frac{\sqrt{10}}{5}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|BC| = \frac{4\sqrt{10}}{5}\text{ cm}.$$

(c) Nechť $|ML| = |KL|$ (obr. 4). Pak je $|\sphericalangle MLK| = 90°$. Je tedy $|KL| = |ML| = 2|LO| = 2|MO|$ a $|AL| = |AM| + |ML| = 4|MO|$.



Obr. 4

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KLO tak plyne

$$|KO| = \sqrt{|LO|^2 + (2|LO|)^2} = \sqrt{5}|LO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = 6|LO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\text{ cm}.$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKL plyne

$$|AK| = \sqrt{|AL|^2 + |LK|^2} = \sqrt{(4|LO|)^2 + (2|LO|)^2} = \\ = 2\sqrt{5}|LO| = 2|KO| = |BC| = 2\text{ cm},$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = 2|BC| = 4\text{ cm}.$$

C – S – 1

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$(x-y)(z-1)=1,$$

odkud plyne, že buď platí $x-y=z-1=1$, nebo $x-y=z-1=-1$.

V prvním případě je $z=2$, $y=x-1$ a po dosazení do kterékoli z původních rovnic určíme $x=669$, takže $y=668$.

Ve druhém případě je $z=0$, $y=x+1$, takže $x=2\,005$ a $y=2\,006$.

Řešením jsou dvě trojice $x=669$, $y=668$, $z=2$ a $x=2\,005$, $y=2\,006$, $z=0$.

Jiné řešení. Z první rovnice vyjádříme

$$x=2\,005-yz$$

a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice, kterou upravíme:

$$y+2\,005z-yz^2=2\,006,$$
$$y(1-z^2)=2\,005(1-z)+1.$$

Z dané soustavy je zřejmé, že nemůže být $z=1$, takže můžeme psát

$$y(1+z)=2\,005+\frac{1}{1-z}.$$

Levá strana poslední rovnosti je celá, proto musí být celá i pravá strana. Této podmínce vyhovuje jedině $z=0$ a $z=2$.

Stejně jako v předchozím řešení dosazením do kterékoli rovnice původní soustavy dopočteme $x=669$, $y=668$ pro $z=2$ a $x=2\,005$, $y=2\,006$ pro $z=0$.

C – S – 2

Pro $n=1$ a $n=2$ má daná množina méně než čtyři prvky.

Jelikož pro každé přirozené číslo n platí

$$n(2n+2)=2n(n+1),$$

mohli bychom zvolit $a=n$, $b=2n+2$, $c=2n$, $d=n+1$. Tato čísla jsou vzájemně různá pro každé $n>1$, neboť pro taková n platí $n<n+{}$ ${}+1<2n<2n+2$. Ještě zbývá ověřit, pro která čísla n je $2n+2\leqq n^2$, aby takto zvolená čtyři čísla a, b, c, d byla z dané množiny. Je vidět, že tato poslední nerovnost platí pro každé $n > 2$, neboť je ekvivalentní s nerovností $3 \leqq (n-1)^2$.

Můžeme tedy shrnout, že požadovaná čísla a, b, c, d lze z dané množiny vybrat pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Jiné řešení. Pro $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina méně než čtyři prvky.

Jelikož pro každé přirozené číslo n platí

$$n \cdot 6n = 2n \cdot 3n,$$

mohli bychom zvolit $a = n$, $b = 6n$, $c = 2n$, $d = 3n$. Tato čísla jsou vzájemně různá pro každé n, neboť $n < 2n < 3n < 6n$. Ještě zbývá ověřit, pro která čísla n je $6n \leqq n^2$, aby zvolená čtyři čísla a, b, c, d byla z dané množiny. Je vidět, že tato poslední nerovnost platí pro každé $n > 5$.

Pro $n = 3$ vybereme $a = 3$, $b = 8$, $c = 6$, $d = 4$ (viz předchozí řešení), pro $n = 4$ vybereme $a = 4$, $b = 10$, $c = 8$, $d = 5$ (viz předchozí řešení), nebo $a = 5$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 10$ (viz následující poznámku), pro $n = 5$ vybereme $a = 5$, $b = 12$, $c = 10$, $d = 6$ (viz předchozí řešení).

Můžeme tedy shrnout, že požadovaná čísla a, b, c, d lze z dané množiny vybrat pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Poznámka. Čtveřic vzájemně různých čísel a, b, c, d, která splňují dané podmínky, je mnoho. Pokaždé je ale třeba u takové čtveřice určit, od kterého nejmenšího čísla n dané podmínky platí, a pro zbylá přirozená čísla n je třeba určit konkrétní hodnoty čísel a, b, c, d.

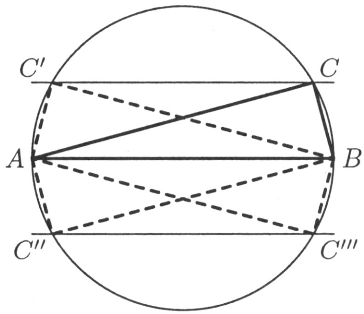
Tak např. je možné volit $a = n$, $b = 3n + 3$, $c = 3n$, $d = n + 1$ pro $n > 3$, nebo $a = n+1$, $b = 2n+4$, $c = 2(n+1)$, $d = n+2$ pro $n > 3$ (viz druhé řešení pro $n = 4$) apod.

C – S – 3

Podmínka, že obsah trojúhelníku ABC se má rovnat $\frac{1}{8}$ obsahu S čtverce o straně AB, znamená, že výška trojúhelníku ABC na stranu AB má délku $\frac{1}{4}|AB|$, takže bod C musí ležet na jedné ze dvou rovnoběžek s přímkou AB vzdálených $\frac{1}{4}|AB|$ od přímky AB.

Podmínka, že součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se má rovnat obsahu čtverce o straně AB, znamená podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC, že je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou AB, takže bod C musí ležet na kružnici se středem ve středu přepony AB a poloměrem $\frac{1}{2}|AB|$.

Konstrukce bodu C je tedy jednoduchá. Obě zmíněné rovnoběžky zřejmě protnou kružnici nad průměrem AB ve čtyřech bodech (obr. 5). Vzhledem k tomu, že se jedná o polohovou úlohu, má úloha čtyři řešení.



Obr. 5

C – II – 1

Danou rovnost pro $z \neq 0$ postupně upravíme:

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z,yx},$$
$$\frac{x+y}{z} = z + \frac{y}{10} + \frac{x}{100},$$
$$100(x+y) = (100z + 10y + x) \cdot z.$$

Jelikož x, y, z jsou číslice, platí nerovnosti $100 \cdot (9+9) \geqq 100(x+y)$ a $(100z + 10y + x) \cdot z \geqq 100z \cdot z$, odkud plyne $18 \geqq z^2$. To znamená, že může být jedině $z = 1$, nebo $z = 2$, nebo $z = 3$, nebo $z = 4$ (hodnota $z = 0$ není přípustná).

Pro $z = 1$ má daná rovnost tvar

$$100(x+y) = 100 + 10y + x,$$
$$99x + 90y = 100.$$

Úvahou o dělitelnosti třemi či devíti zjistíme, že poslední rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Proto nemůže být $z = 1$.

Pro $z = 2$ má daná rovnost tvar

$$100(x + y) = (200 + 10y + x) \cdot 2,$$
$$49x + 40y = 200.$$

Úvahou o dělitelnosti deseti zjistíme, že může být jedině $x = 0$. Pak je $y = 5$, takže v tomto případě splňují danou rovnost číslice $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$.

Pro $z = 3$ má daná rovnost tvar

$$100(x + y) = (300 + 10y + x) \cdot 3,$$
$$97x + 70y = 900.$$

Úvahou o dělitelnosti deseti zjistíme, že může být jedině $x = 0$. Pak ale neexistuje žádné celé y splňující rovnost $70y = 900$. Proto nemůže být $z = 3$.

Pro $z = 4$ má daná rovnost tvar

$$100(x + y) = (400 + 10y + x) \cdot 4,$$
$$24x + 15y = 400.$$

Úvahou o dělitelnosti třemi zjistíme, že poslední rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Proto nemůže být $z = 4$.

Daná rovnost je splněna jedině pro $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$. Skutečně platí $\dfrac{0+5}{2} = 2{,}50$.

C – II – 2

K libovolně zvolenému přirozenému číslu $n > 2$ hledáme příklad různých přirozených čísel p, q závislých na čísle n tak, aby platilo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Po úpravách má tato rovnost tvar

$$2pq = n(p + q), \quad \text{neboli} \quad p(2q - n) = nq.$$

Jelikož stačí nalézt jedinou dvojici čísel p, q, je možné ji hledat zkoušením několika jednoduchých možností v poslední rovnici.

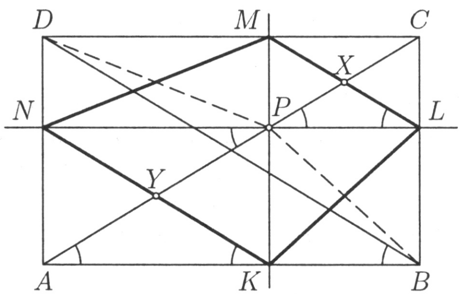
Zkusme položit $2q-n=1$. Získáme tak $q=\frac{1}{2}(n+1)$ a $p=\frac{1}{2}n(n+1)$. Tato čísla jsou přirozená a vzájemně různá pro libovolné liché číslo $n>2$.

Dále zkusme položit $2q-n=2$. Získáme tak $q=\frac{1}{2}(n+2)$ a $p= =\frac{1}{4}n(n+2)$. Tato čísla jsou přirozená a vzájemně různá pro libovolné sudé číslo $n>2$.

Můžeme tedy pro liché číslo $n>2$ položit $q=\frac{1}{2}(n+1)$ a $p=\frac{1}{2}n(n+1)$ a pro sudé číslo $n>2$ zas $q=\frac{1}{2}(n+2)$ a $p=\frac{1}{4}n(n+2)$.

C – II – 3

a) AC a BD jsou úhlopříčky obdélníku $ABCD$, proto jsou úhly ABD a BAC shodné. AP a KN jsou úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$, proto jsou úhly AKN, KAP a APN shodné (obr. 6). PC a LM jsou úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$, proto jsou úhly PLM a LPC shodné. Úhly APN a LPC jsou shodné (vrcholové úhly), proto jsou shodné i úhly AKN, PLM a ABD, přímky LM a KN jsou tudíž rovnoběžné s úhlopříčkou BD daného obdélníku, a jsou tedy rovnoběžné navzájem.



Obr. 6

b) Jsou-li X a Y průsečíky přímek LM a KN s úhlopříčkou AC, je $|XY|=|XP|+|PY|=\frac{1}{2}|CP|+\frac{1}{2}|PA|=\frac{1}{2}(|CP|+|PA|)=\frac{1}{2}|CA|$. Úsečka XY má tedy délku nezávislou na poloze bodu P. Podle a) svírá přímka XY s přímkami KN a LM stejný úhel jako s přímkou BD, takže tento úhel rovněž nezávisí na poloze bodu P. Proto je i vzdálenost přímek LM a KN nezávislá na poloze bodu P (a je jednozačně určena velikostí $|XY|$ a úhlem MXP, přičemž $|\sphericalangle MXP|=2|\sphericalangle ABD|$).

c) KL a BP jsou úhlopříčky pravoúhelníku $KBLP$, jsou proto shodné. Podobně jsou MN a PD shodné úhlopříčky pravoúhelníku $NPMD$, LM a PC shodné úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$ a NK a AP shodné úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$. Pro obvod čtyřúhelníku $KLMN$ tak platí

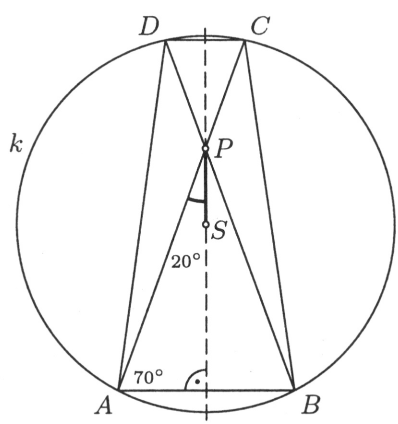
$$\begin{aligned} o &= |KL| + |LM| + |MN| + |NK| = \\ &= (|KL| + |MN|) + (|LM| + |NK|) = \\ &= (|BP| + |PD|) + (|PC| + |AP|) \geqq |BD| + |AC| = 2|AC|, \end{aligned}$$

kde jsme pro trojici bodů B, D, P využili trojúhelníkovou nerovnost $|BP| + |PD| \geqq |BD|$.

Jiné řešení části b). Čtyřúhelník $KLMN$ je podle části a) lichoběžník (anebo případně rovnoběžník, který můžeme považovat za speciální případ lichoběžníku) se základnami KN a LM. Naší úlohou je ukázat, že jeho výška nezávisí na volbě bodu P. Strany a úhlopříčky čtyřúhelníku $KLMN$ dělí obdélník $ABCD$ na čtyři dvojice shodných trojúhelníků, z čehož plyne, že obsah $KLMN$ je polovinou obsahu $ABCD$. Dále součet délek základen KN a LM je roven součtu délek úseček AP a PC, tedy délce úsečky AC. Lichoběžník $KLMN$ má tedy konstantní obsah a konstantní součet délek základen, má tedy i konstantní výšku.

C – II – 4

Všimněme si lichoběžníku $ABCD$, jemuž lze opsat kružnici. Přímka jdoucí jejím středem S kolmo k oběma základnám AB a CD je osou souměrnosti obou tětiv AB a CD, tedy i osou souměrnosti celého lichoběžníku $ABCD$. Jeho ramena AD a BC jsou tudíž shodná a průsečík P úhlopříček AC a BD leží též na ose úseček AB a CD. Jelikož je podle zadání $|\sphericalangle BAC| = 70°$, je $|\sphericalangle APS| = 20°$ (obr. 7).



Obr. 7

Popis konstrukce: Sestrojíme úsečku SP, kde $|SP| = d = 2\,\mathrm{cm}$, a kružnici $k(S; 5\,\mathrm{cm})$. Bodem P vedeme polopřímky PX a PY tak, aby $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SPY| = 20°$. Průsečíky polopřímek PX a PY s kružnicí k jsou body A a B. Potom průsečíky vnitřků polopřímek AP a BP s kružnicí k jsou body C a D.

Úloha má jediné řešení.