53. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Karel Horák (editor); Jan Kára (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 53. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2003/2004. 45. mezinárodní matematická olympiáda. 16. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 46–63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405074

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Každou z hvězdiček na místě jednotek čísel ve výrazu

$$\left|\frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*} - \frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559}\right|$$

nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz nabyl co nejmenší hodnoty.

(*J. Šimša*)

B – I – 2

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. (*J. Zhouf*)

B – I – 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x\lfloor x\rfloor - 5x + 7 = 0,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ znamená dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo k, pro něž platí $k \leqq x$. (Například $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ a $\lfloor -3{,}1\rfloor = -4$.) (*E. Kováč*)

B – I – 4

Číslo a_n vznikne tak, že za sebe napíšeme prvních n po sobě jdoucích přirozených čísel, například $a_{13} = 12\,345\,678\,910\,111\,213$. Určete, kolik čísel dělitelných 24 se nachází mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{10\,000}$. (*P. Černek*)

B – I – 5

Je dána přímka p a mimo ni bod A. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s minimálním obsahem a ramenem BC na přímce p tak, aby $|BC| = |AC|$ a průsečík E jeho úhlopříček splňoval vztah $|BE| = 3|DE|$.

(*P. Leischner*)

B – I – 6

Určete všechna přirozená čísla M dělitelná 240, pro která má rovnice $M = \mathrm{NSN}(x, y)$ s neznámými x a y právě 1 001 řešení v oboru přirozených čísel. (Symbol $\mathrm{NSN}(x, y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.)

(*P. Černek*)

B – S – 1

Zjistěte, kolik řešení má v oboru reálných čísel rovnice

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{x}{2\,004},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo x.

(*J. Šimša*)

B – S – 2

Uveďte příklad množiny M dvojmístných čísel, jež má maximální počet prvků a přitom splňuje obě následující podmínky:

(i) Každá dvě čísla z M jsou nesoudělná.

(ii) Změníme-li pořadí číslic libovolného čísla z M, dostaneme opět číslo z množiny M.

(*J. Földes*)

B – S – 3

Je dán lichoběžník $ABCD$ s ostrými úhly při základně AB. Na ní existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV, kde V je průsečík přímek AD a BC.

(*R. Horenský*)

B – II – 1

Číslo a_n vznikne tak, že za sebe zapíšeme prvních n druhých mocnin po sobě jdoucích přirozených čísel. Např. $a_{11} = 149\,162\,536\,496\,481\,100\,121$.

Zjistěte, kolik čísel dělitelných dvanácti je mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{100\,000}$.

(*P. Černek*)

B – II – 2

Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen. (*E. Kováč*)

B – II – 3

Pro dané přirozené číslo n řešte v oboru kladných reálných čísel rovnici

$$\lfloor x\sqrt{n^2-1}\rfloor = nx - 1.$$

(Symbol $\lfloor r \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo r.)

(*J. Šimša*)

B – II – 4

Je dán ostroúhlý trojúhelník VBA. Sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$ s minimálním obsahem tak, aby jeho vrcholy C a D ležely po řadě na polopřímkách opačných k polopřímkám BV a AV. (*P. Leischner*)

B – I – 1

Označme x a y číslice, které doplníme do čitatele, resp. jmenovatele prvního zlomku. Protože celý výraz v absolutní hodnotě budeme algebraicky upravovat, kvůli přehlednějším zápisům zavedeme označení $N = 111\,111\,111\,110$. Jednotlivá čísla z daného výrazu pak mají vyjádření:

$$\begin{aligned}777\,777\,777\,77x &= 7N + x,\\ 777\,777\,777\,77y &= 7N + y,\\ 555\,555\,555\,554 &= 5N + 4,\\ 555\,555\,555\,559 &= 5N + 9.\end{aligned}$$

Zkoumaný výraz pak lze zapsat a upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{7N+x}{7N+y} - \frac{5N+4}{5N+9}\right| = \frac{|(7N+x)(5N+9) - (5N+4)(7N+y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\ &= \frac{|(35N^2 + 5xN + 63N + 9x) - (35N^2 + 5yN + 28N + 4y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\ &= \frac{|5 \cdot (7 - y + x) \cdot N + 9x - 4y|}{(7N+y)(5N+9)}.\end{aligned}$$

Označme ještě čitatele a jmenovatele získaného zlomku:

$$C = |5 \cdot (7 - y + x) \cdot N + 9x - 4y| \quad \text{a} \quad J = (7N + y)(5N + 9).$$

Budeme-li za x, y dosazovat různé dvojice číslic, jmenovatel J bude nabývat pouze deseti různých hodnot v rozmezí

$$(7N + 0)(5N + 9) \leqq J \leqq (7N + 9)(5N + 9).$$

Podívejme se nyní, jak velkých či malých hodnot bude nabývat čitatel C. Protože číslo $9x - 4y$ je nejvýše dvojmístné, zatímco číslo N dvanáctimístné, řád čitatele C bude záviset na tom, zda bude činitel $(7 - y + x)$ roven nule či nikoli. Proto tyto dvě možnosti posoudíme odděleně.

A. Případ $7 - y + x = 0$. Tehdy platí $y = x + 7$ a zkoumaný čitatel C je tvaru

$$C = |5 \cdot 0 \cdot N + (9x - 4y)| = |9x - 4(x + 7)| = |5x - 28|.$$

Jelikož číslice y (rovná $x+7$) je nejvýše 9, je číslice x rovna 0, nebo 1, nebo 2, takže výraz $|5x-28|$ se rovná 28, nebo 23, nebo 18. *Nejmenší* hodnota čitatele C je tudíž rovna 18 a dosáhneme ji jedině pro $x=2$ a $y=9$. Šťastnou „shodou okolností“ má zrovna pro $y=9$ jmenovatel J *největší* hodnotu, takže

$$\min\left\{\frac{C}{J}\right\}=\frac{18}{(7N+9)(5N+9)}.$$

B. Případ $7-y+x\neq 0$. Ukažme, že hodnoty čitatele C (tudíž i hodnoty zlomku C/J) jsou v tomto případě „obrovské“ ve srovnání s případem A. Z nerovnosti $7-y+x\neq 0$ plyne odhad $|7-y+x|\geqq 1$ (číslo $7-y+x$ je celé), tudíž máme

$$C=|5\cdot(7-y+x)\cdot N+9x-4y|\geqq 5\cdot|7-y+x|\cdot N-|9x-4y|\geqq 5N-|9x-4y|.$$

Protože x a y jsou číslice, platí zřejmě $|9x-4y|\leqq 81$. Z posledního odhadu C a maximální hodnoty J proto plyne nerovnost

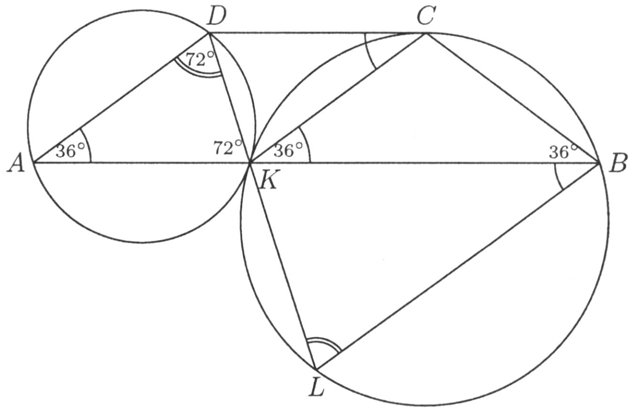
$$\frac{C}{J}\geqq\frac{5N-81}{(7N+9)(5N+9)}.$$

Poslední zlomek je „mnohokrát“ větší než zlomek v závěru případu A, neboť oba zlomky mají stejný jmenovatel, zatímco srovnání čitatelů zřejmě dopadá takto: $5N-81\gg 18$ (nerovnost $5N-81>18$ platí již od hodnoty $N=20$).

Závěr: Do čitatele doplníme číslici $x=2$, do jmenovatele číslici $y=9$.

B – I – 2

V rovnoramenném trojúhelníku AKD známe úhel DAK proti základně KD. Můžeme dopočítat zbylé dva úhly při základně (obr. 17): $|\sphericalangle ADK|=|\sphericalangle AKD|=\frac{1}{2}(180^\circ-|\sphericalangle DAK|)=72^\circ$. Čtyřúhelník $AKCD$ má protější strany AK a CD shodné a rovnoběžné, takže se jedná o rovnoběžník, tudíž přímky KC a AD jsou rovnoběžné. Úhly DAK a CKB jsou tedy souhlasné a úhly CKB a KCD střídavé, proto $|\sphericalangle CKB|=|\sphericalangle KCD|=36^\circ$. Úhel DKC doplňuje úhly AKD a CKB do přímého úhlu, jeho velikost je tedy $|\sphericalangle DKC|=180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ$.

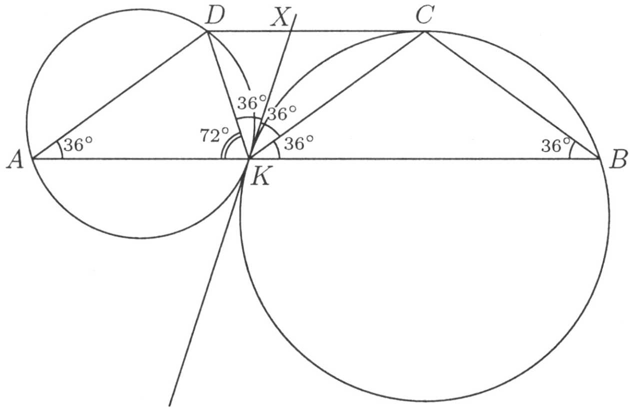


Obr. 17

Na polopřímce opačné k polopřímce KD zvolme bod L tak, že $|KL| = |AD|$. Potom $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle AKD| = 72°$ a $|\sphericalangle CKL| = |\sphericalangle LKB| + |\sphericalangle CKB| = 108°$. Dopočítaním úhlů v lichoběžníku $ABCD$ dostáváme $|\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 36°) = 144°$ a můžeme vyjádřit velikost úhlu BCK: $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle KCD| = 144° - 36° = 108°$. Nyní již víme, že $|KL| = |CB|$ a $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle KCB|$, což znamená, že $LBCK$ je rovnoramenný lichoběžník, a lze mu tedy opsat kružnici (shodnou s kružnicí opsanou trojúhelníku KBC). Dále můžeme z lichoběžníku $LBCK$ dopočítat $|\sphericalangle KLB| = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 108°) = 72° = |\sphericalangle KDA|$. Z této rovnosti plyne, že $AD \parallel BL$, takže trojúhelníky ADK a BLK jsou vzájemně stejnolehlé podle středu K. Stejnolehlé jsou potom i kružnice jim opsané. Protože obě procházejí středem K zmíněné stejnolehlosti, mají v tomto bodě vnější dotyk.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že $|AKD| = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ je rovnoběžník (obr. 18), takže $|CK| = |AD|$. Z rovnosti $|CK| = |BC|$ v trojúhelníku KBC usoudíme, že $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KBC| = 36°$. Proto na základně CD existuje bod X tak, že $|AKX| = 108°$ (a $|\sphericalangle BKX| = 72°$). Pak $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle AKX| - |\sphericalangle AKD| = 108° - 72° = 36°$, a tedy $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle DAK|$, takže úhel DKX je úsekovým úhlem příslušným oblouku DAK v kružnici opsané trojúhelníku AKD, to znamená, že přímka KX je její tečnou. Podobně $|\sphericalangle CKX| = |\sphericalangle BKX| - |\sphericalangle BKC| = 72° - 36° = 36° = |\sphericalangle KBC|$, takže KX je i tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KBC. Kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají tedy společnou tečnu KX

procházející společným bodem K. Obě kružnice se tudíž v tomto bodě dotýkají.



Obr. 18

B – I – 3

Označme $k = \lfloor x \rfloor$, tedy $x = k + \alpha$, $0 \leqq \alpha < 1$. Daná rovnice má potom tvar $(k+\alpha)k - 5(k+\alpha) + 7 = 0$. Odtud $\alpha = \dfrac{k^2 - 5k + 7}{5 - k}$. Hledáme tedy celá čísla k, pro která platí

$$0 \leqq \frac{k^2 - 5k + 7}{5 - k} < 1. \tag{$*$}$$

Každou z těchto nerovností vyšetříme odděleně. Protože kvadratický trojčlen $k^2 - 5k + 7$ má záporný diskriminant, platí $k^2 - 5k + 7 \geqq 0$ pro každé $k \in \mathbb{R}$, takže levá nerovnost v $(*)$ platí, právě když $5 - k > 0$, neboli $k < 5$. Vyřešme pravou nerovnici:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 - 5k + 7}{5 - k} &< 1, \\ \frac{k^2 - 5k + 7 - (5 - k)}{5 - k} &< 0, \\ \frac{k^2 - 4k + 2}{5 - k} &< 0, \\ \frac{(k - 2 - \sqrt{2})(k - 2 + \sqrt{2})}{5 - k} &< 0. \end{aligned}$$

Podle polohy čísel $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$ a 5 na číselné ose zjistíme, že poslední nerovnost platí, právě když $k \in \left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right) \cup (5, \infty)$. Nerovnosti $(*)$ tedy platí současně, právě když $k \in \left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$. Této podmínce vyhovují pouze tři celá čísla $k \in \{1, 2, 3\}$. Pro $k = 1$ dopočteme $\alpha = \frac{3}{4}$, pro $k = 2$ vyjde $\alpha = \frac{1}{3}$ a pro $k = 3$ je $\alpha = \frac{1}{2}$. Celkem dostáváme tři řešení $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = \frac{7}{2}$.

Jiné řešení. Jako v prvním řešení označíme $k = \lfloor x \rfloor$ a z rovnice $kx - 5x + 7 = 0$ vyjádříme x ve tvaru $x = \dfrac{7}{5-k}$. Nyní hledáme celá čísla k, pro která platí $k \leqq \dfrac{7}{5-k} < k+1$. Obě nerovnice jsou splněny jedině pro celá $k \in \{1, 2, 3\}$, kterým odpovídají kořeny $x \in \{\frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}\}$.

B – I – 4

Přirozené číslo je dělitelné číslem 24, právě když je dělitelné současně (navzájem nesoudělnými) čísly 3 a 8. Pro ciferný součet přirozeného čísla k zaveďme označení $S(k)$. Číslo a_n je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný jeho ciferný součet, tedy číslo $S(1) + S(2) + \ldots + S(n)$. Zbytek po dělení třemi tohoto součtu závisí pouze na zbytcích (po dělení třemi) jednotlivých sčítanců $S(k)$. Protože při dělení třemi dává číslo $S(k)$ stejný zbytek jako číslo k (viz návodnou úlohu 1), dávají čísla $S(1), S(4), S(7), \ldots$ zbytek 1, čísla $S(2), S(5), S(8), \ldots$ zbytek 2 a čísla $S(3), S(6), S(9), \ldots$ zbytek 0. Proto například číslo $S(a_{14})$, tedy součet $S(1) + S(2) + \ldots + S(14)$, dává při dělení třemi stejný zbytek jako součet

$$(1+2+0) + (1+2+0) + (1+2+0) + (1+2+0) + 1 + 2.$$

Podle uzávorkovaných trojic snadno vidíme, že tento součet je dělitelný třemi. Protože obecně součet $S(3k-2) + S(3k-1) + S(3k)$ je dělitelný třemi pro každé přirozené k, můžeme obdobným způsobem uzávorkovat každý součet

$$S(1) + S(2) + \ldots + S(n)$$

a zjistit, že jeho zbytek při dělení třemi

- ▷ je roven 1, je-li $n = 3k - 2$;
- ▷ je roven 0, je-li $n = 3k - 1$ nebo $n = 3k$.

Čísla a_n tedy budou dělitelná třemi, právě když n bude tvaru $3k$ nebo $3k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Nyní rozeberme, kdy budou čísla a_n navíc dělitelná osmi. Přirozené číslo je dělitelné osmi, právě když je dělitelné osmi poslední trojčíslí jeho zápisu v desítkové soustavě. Naše úvahy budou tedy záviset na počtu číslic čísla n:

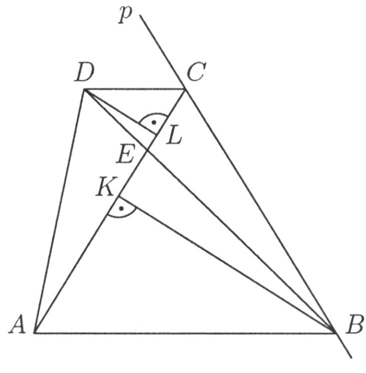
▷ Alespoň trojmístná n. Pro taková n je tedy a_n dělitelné osmi, právě když je dělitelné osmi číslo n.
Protože se zbytky čísel a_n po dělení třemi opakují po třech, zbytky po dělení osmi po osmi číslech a_n, budou se zbytky po dělení číslem 24 opakovat po nejmenším společném násobku těchto period, tedy po dvaceti čtyřech. Pro trojmístná n snadno zjistíme, že podmínce v úloze vyhovují čísla tvaru $104 + 24k$ a $120 + 24k$ (n musí být dělitelné osmi a dávat zbytek dva nebo nula po dělení třemi). Do 10 000 máme 413 čísel tvaru $104+24k$ ($413 = \lfloor \frac{1}{24}(10\,000 - 104) \rfloor + 1$) a 412 čísel tvaru $120 + 24k$.

▷ Dvojmístná n. Aby bylo číslo a_n dělitelné osmi, musí být dělitelné čtyřmi. O dělitelnosti čtyřmi rozhoduje poslední dvojčíslí, takže čtyřmi budou dělitelná právě všechna ta a_n, pro která je n dělitelné čtyřmi. Číslo $n-1$ je pak liché, tedy i a_{n-1} je číslo liché a číslo $100a_{n-1}$ dává zbytek čtyři po dělení osmi. Potom číslo $a_n = 100a_{n-1} + n$ bude dělitelné osmi, právě když n bude také dávat zbytek čtyři po dělení osmi, bude tedy tvaru $8k+4$. Spolu s podmínkou na dělitelnost třemi dostáváme, že vyhovující dvojmístná čísla n mají (stejně jako výše) periodu 24 a jsou tvaru $n = 12 + 24k$ a $n = 20 + 24k$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Do sta to máme $4 + 4 = 8$ čísel.

▷ Jednomístná n. Snadno zjistíme, že ze všech sudých čísel a_n pro $n \leqq 8$ vyhovuje pouze $a_6 = 123\,456$.
Celkem vyhovuje 834 čísel.

B – I – 5

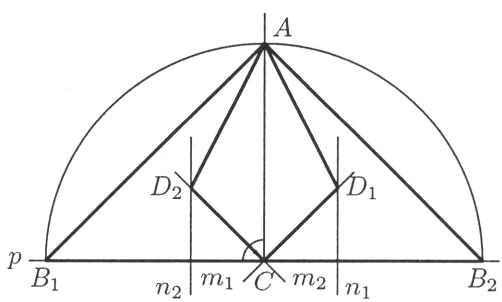
Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník a K, L jsou paty kolmic z vrcholů B, D na přímku AC (obr. 19). Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BKE a DLE plyne, že délky stran BK a DL, tedy odvěsen ve zmíněných trojúhelnících, jsou ve stejném poměru jako délky jejich přepon BE a DE, tedy $3 : 1$. BK a DL jsou však i výšky v trojúhelnících ABC a ACD, a to na společnou stranu AC. Obsahy těchto trojúhelníků jsou tedy také v poměru $3 : 1$, takže obsah lichoběžníku $ABCD$ je roven $\frac{4}{3}P$, kde P je obsah rovnoramenného trojúhelníku ABC. Výška tohoto trojúhelníku z bodu A na stranu BC je dána (vzdálenost bodu A od přímky p). Obsah trojúhelníku ABC bude tedy minimální, bude-li minimální délka strany BC, tedy i AC, tedy když úsečka AC bude kolmá na p.



Obr. 19

Konstrukce. Nejprve sestrojíme bod C (pata kolmice z A na p). Vrchol B nalezneme jako průsečík přímky p s kružnicí $k(C, |AC|)$ (dvě možnosti). Vrchol D je průsečíkem přímky m, vedené bodem C rovnoběžně s AB, a přímky n rovnoběžné s AC ve vzdálenosti $\frac{4}{3}|BC|$ od vrcholu B uvnitř poloroviny opačné k ACB.

Úloha má celkem dvě řešení souměrně sdružená podle přímky $AC \perp p$ (obr. 20).



Obr. 20

B – I – 6

Nejprve ukažme, že pro číslo M s prvočíselným rozkladem $M = \prod_{i=1}^{n} p_i^{c_i}$ (p_i jsou různá prvočísla) je počet řešení rovnice $\mathrm{NSN}(x, y) = M$ roven $\prod_{i=1}^{n} (2c_i + 1)$. Vskutku, každé řešení (x, y) dané rovnice má tu vlastnost, že libovolné prvočíslo p_i $(i = 1, \ldots, n)$ dělí alespoň jedno z čísel x a y (a to nejvýše v takové mocnině, v jaké dělí M) a žádná jiná prvočísla už ani x, ani y nedělí; x a y jsou tedy tvaru $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$, $y = \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}$, $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0$, a navíc $\max(a_i, b_i) = c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Čísla x a y tak jednoznačně určují n-tice čísel a_i a b_i a obráceně jsou jimi jednoznačně určena. Všechna řešení dané rovnice jsou tedy popsána dvojicemi n-tic přirozených čísel takových, že na i-té pozici je v obou n-ticích číslo z množiny $\{0, \ldots, c_i\}$ a alespoň v jedné z nich se přímo rovná c_i. Takových n-tic je $\prod_{i=1}^{n} (2c_i + 1)$: Dvě n-tice čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ můžeme uvážit jako n dvojic čísel (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_n, b_n). Libovolná dvojice (a_i, b_i) může nezávisle nabývat $(2c_i+1)$ různých hodnot $(0, c_i)$, $(1, c_i)$, …, $(c_i - 1, c_i)$, (c_i, c_i), $(c_i, c_i - 1)$, …, $(c_i, 1)$, $(c_i, 0)$. Podle kombinatorického pravidla součinu dostáváme výše uvedený počet.

Prvočíselný rozklad čísla 1 001 je $7 \cdot 11 \cdot 13$. Aby měla daná rovnice právě 1 001 řešení, musí exponenty c_i z prvočíselného rozkladu čísla M (obsahujícího dle zadání nejméně tři prvočísla, a to 2, 3 a 5) vyhovovat rovnici $\prod_{i=1}^{n} (2c_i + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13$. V prvočíselném rozkladu čísla M tedy musí být zastoupena právě tři prvočísla, a to v mocninách $\frac{1}{2}(7 - 1) = 3$, $\frac{1}{2}(11 - 1) = 5$ a $\frac{1}{2}(13 - 1) = 6$. Protože M má být dělitelné číslem $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, tedy prvočísly 2, 3 a 5 v odpovídajících mocninách, jsou jediné možné volby pro M čísla $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6$, $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5$.

B – S – 1

Předpokládejme na okamžik, že celé číslo $k = \lfloor x \rfloor$ známe, dosaďme je do rovnice jako „parametr“ a získanou rovnici vyřešme:

$$
\begin{aligned}
x &= k + \frac{x}{2\,004}, \\
2\,004x &= 2\,004k + x, \\
x &= \frac{2\,004k}{2\,003}.
\end{aligned}
$$

Budeme-li do posledního vzorce dosazovat jednotlivá celá čísla k, bude příslušné x skutečně řešením zkoumané rovnice, bude-li se jeho celá část rovnat právě číslu k, budou-li tedy platit nerovnosti

$$k \leqq \frac{2\,004k}{2\,003} < k + 1.$$

Zjistíme, která celá k vyhovují oběma nerovnostem. Levá nerovnost je ekvivalentní s nerovností $k \geqq 0$, pravá nerovnost s nerovností $k < 2\,003$. Hledaná k jsou tedy právě hodnoty $k \in \{0, 1, \ldots, 2\,002\}$, každá z nich určuje jediné řešení x, takže všech řešení x zadané rovnice je právě $2\,003$. Dodejme, že vyhovující k lze určit rovněž úpravou odvozeného vzorce do tvaru

$$x = \frac{2\,004k}{2\,003} = k + \frac{k}{2\,003},$$

z něhož je vidět, že číslo k je celou částí čísla x, právě když platí nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k}{2\,003} < 1, \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq k < 2\,003.$$

Jiné řešení. Protože pro každé reálné x platí $\lfloor x \rfloor \leqq x \leqq \lfloor x \rfloor + 1$, porovnáním se zadanou rovnicí dodejme k zjištění, že každé řešení x musí splňovat nerovnosti

$$0 \leqq \frac{x}{2\,004} < 1, \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq x < 2\,004.$$

Číslo x splňující poslední nerovnosti bude řešením zkoumané rovnice, právě když hodnota $x - \dfrac{x}{2\,004}$ bude celočíselná. Protože platí

$$x - \frac{x}{2\,004} = \frac{2\,003x}{2\,004},$$

lze poslední podmínku vyslovit takto: číslo $2\,003x$ je celočíselným násobkem čísla $2\,004$. To s ohledem na nerovnosti $0 \leqq 2\,003x < 2\,003 \cdot 2\,004$ znamená, že číslo $2\,003x$ je rovno některému z čísel

$$0 \cdot 2\,004,\ 1 \cdot 2\,004,\ 2 \cdot 2\,004,\ \ldots,\ 2\,002 \cdot 2\,004,$$

takže zkoumaná rovnice má právě $2\,003$ řešení

$$\frac{0 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{1 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{2 \cdot 2\,004}{2\,003}, \ldots, \frac{2\,002 \cdot 2\,004}{2\,003}.$$

B – S – 2

Kvůli podmínce (i) může být v množině M nejvýše jedno z čísel $11, 22, 33, \ldots, 99$ zapsaných dvěma stejnými číslicemi, která jsou vesměs dělitelná jedenácti. Kvůli podmínce (ii) a dělitelnosti dvěma tam zas nesmí být žádné číslo zapsané dvěma různými sudými číslicemi; s jednou sudou číslicí může být v M nejvýše jedna dvojice čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$.

Zbývá posoudit, kolik může množina M obsahovat dvojic čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ zapsaných dvěma různými lichými číslicemi a a b. Žádné z těchto čísel nesmí být dělitelné třemi (je-li číslo $\overline{ab}$ dělitelné třemi, je takové i číslo $\overline{ba}$), proto v úvahu připadá pouze sedm dvojic takových čísel: $(13, 31)$, $(17, 71)$, $(19, 91)$, $(35, 53)$, $(37, 73)$, $(59, 95)$ a $(79, 97)$. Kvůli dělitelnosti pěti, sedmi a devatenácti však může být v M pouze jedna z dvojic $(19, 91)$, $(35, 53)$ a $(59, 95)$, tedy nejvýše pět ze všech sedmi vypsaných dvojic.

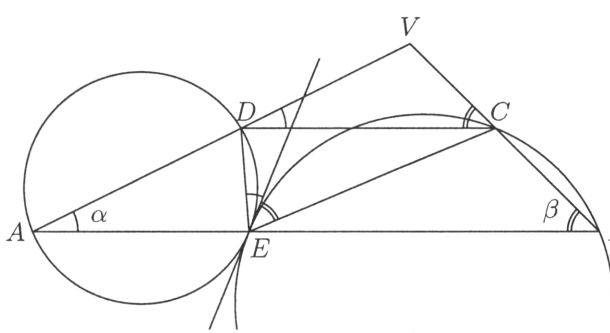
Celkově zjišťujeme, že množina M obsahuje nejvýše $1 + 2 + 2 \cdot 5 = 13$ čísel. Příkladem třináctiprvkové množiny je

$$\mathsf{M} = \{11, 23, 32, 13, 31, 17, 71, 35, 53, 37, 73, 79, 97\}.$$

(Existují i jiné příklady, naše úvahy však ukazují, že každá třináctiprvková množina M musí obsahovat čísla 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97 a jednu z dvojic $(35, 53)$ nebo $(59, 95)$; dvojice $(19, 91)$ je vyloučena, neboť číslo 91 je násobkem čísla 13.)

B – S – 3

Označme α a β po řadě vnitřní úhly při vrcholech A a B (obr. 21). Bodem E prochází společná tečna obou uvažovaných kružnic, úhel DEC



Obr. 21

je tedy součtem úsekových úhlů příslušných tětivě DE v jedné kružnici (s obvodovým úhlem α) a tětivě EC v druhé kružnici (s obvodovým úhlem β). Jeho velikost je tudíž $\alpha + \beta$. A protože velikost úhlu CVD je $180° - (\alpha + \beta)$, zjišťujeme, že ve čtyřúhelníku $CVDE$ se úhly u protějších vrcholů E a V doplňují do $180°$. To, jak víme, znamená, že $CVDE$ je tětivový čtyřúhelník, tj. bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV.

B – II – 1

Jak víme, každé přirozené číslo k dává při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $S(k)$ rovné součtu číslic původního čísla k. Číslo a_n proto dává při dělení třemi stejný zbytek jako součet $S(1^2) + S(2^2) + \ldots + S(n^2)$, tedy rovněž jako součet $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. *Dvěma způsoby* ukážeme, že poslední součet je dělitelný třemi, právě když číslo n je tvaru $9k - 5$, $9k - 1$ nebo $9k$, kde k je přirozené číslo.

Při *prvním způsobu* využijeme známý vzorec

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1}$$

z něhož plyne, že zkoumaný součet je dělitelný třemi, právě když je součin $n(n + 1)(2n + 1)$ dělitelný devíti. Protože čísla n, $n + 1$ a $2n + 1$ jsou navzájem nesoudělná, hledáme právě ta n, pro která je dělitelné devíti jedno z čísel n, $n+1$ nebo $2n+1$, a to jsou po řadě čísla tvaru $9k$, $9k-1$, $9k - 5$.

Druhý způsob je založen na pozorování, že zbytky čísel 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, $5^2, \ldots$ při dělení třemi jsou $1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$, tedy opakují se s periodou 3. Skutečně, čísla $(k + 3)^2$ a k^2 dávají stejný zbytek při dělení třemi, neboť jejich rozdíl je číslo $3(2k + 3)$, což je násobek tří. Sčítáním uvedených zbytků dostaneme postupně zbytky prvních devíti součtů (1): $1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0$; poté se zbytky dalších součtů (1) začnou periodicky opakovat. (Plyne to z toho, že předchozí součet devíti čísel dává nulový zbytek a zároveň je počet sčítanců násobkem periody 3 sčítaných zbytků.)

Víme již, která čísla a_n jsou dělitelná třemi; posoudíme nyní snazší otázku, která a_n jsou dělitelná čtyřmi. Ukažme, že to jsou všechna a_n se sudým $n > 2$ (a žádná jiná). Číslo a_n s lichým n je totiž liché, číslo a_2 se rovná 14 a číslo a_n se sudým $n > 2$ končí stejným dvojčíslím jako číslo n^2, takže je takové a_n (stejně jako zmíněné dvojčíslí) dělitelné čtyřmi.

Spojíme-li výsledky o dělitelnosti třemi a čtyřmi dohromady, dojdeme k zjištění, že číslo a_n je dělitelné dvanácti, právě když je číslo n jednoho z tvarů $18k - 14$, $18k - 10$ nebo $18k$, kde k je libovolné přirozené číslo. Protože $100\,000 = 5\,556 \times 18 - 8$, je mezi přirozenými čísly od 1 do 100 000 právě 5 556 čísel $18k - 14$, 5 556 čísel $18k - 10$ a 5 555 čísel $18k$, dohromady je to 16 667 čísel.

B – II – 2

Pro koeficient a musí platit $a \neq 0$ a $a \neq -1$, aby všechny uvažované trojčleny byly skutečně kvadratické trojčleny. Jak víme, kvadratický trojčlen má dvojnásobný kořen, právě když je jeho diskriminant nulový. Sestavme proto diskriminanty všech tří trojčlenů se zvětšenými koeficienty:

$$\begin{aligned}
(a+1)x^2 + bc + c &\quad \text{má diskriminant} \quad D_1 = b^2 - 4(a+1)c,\\
ax^2 + (b+1)x + c &\quad \text{má diskriminant} \quad D_2 = (b+1)^2 - 4ac,\\
ax^2 + bx + (c+1) &\quad \text{má diskriminant} \quad D_3 = b^2 - 4a(c+1).
\end{aligned}$$

Hledáme tedy reálná čísla a, b, c, pro která platí $a \neq 0$, $a \neq -1$ a $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

Z rovnosti $D_1 = D_3$ plyne $c = a$, takže $D_2 = (b+1)^2 - 4a^2 = (b + 1 - 2a)(b + 1 + 2a)$; rovnost $D_2 = 0$ pak znamená, že platí $b = \pm 2a - 1$, a proto $D_1 = (\pm 2a - 1)^2 - 4(a+1)a = 4a^2 \mp 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 \mp 4a - 4a$, tudíž $D_1 = -8a + 1$ nebo $D_1 = 1$. Proto z rovnosti $D_1 = 0$ plyne $a = 1/8$, $b = 2a - 1 = -3/4$ a $c = a = 1/8$ (zkouška je snadná, není však nutná, naším postupem totiž máme zaručeny rovnosti $D_1 = D_3$, $D_2 = 0$ a $D_1 = 0$).

Odpověď: Úloze vyhovuje jediný trojčlen $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$.

B – II – 3

Kladné číslo x je řešením rovnice s daným n, právě když je číslo nx přirozené a jsou splněny nerovnosti

$$nx - 1 \leqq x\sqrt{n^2 - 1} < nx.$$

Pravá nerovnost je splněna pro každé $x > 0$, neboť zřejmě platí $\sqrt{n^2 - 1} < \sqrt{n^2} = n$. Zbývá tedy vyřešit levou nerovnici (vzhledem k neznámé x). Po jednoduché úpravě dostáváme

$$x\left(n - \sqrt{n^2 - 1}\right) \leqq 1,$$

$$x \leqq \frac{1}{n - \sqrt{n^2 - 1}} = n + \sqrt{n^2 - 1}.$$

Využili jsme toho, že výraz $n - \sqrt{n^2 - 1}$ je kladný a v součinu se sdruženým výrazem $n + \sqrt{n^2 - 1}$ dává číslo 1. Po vynásobení obou stran odvozené nerovnosti číslem n dostaneme pro přirozené číslo $k = nx$ ekvivalentní podmínku

$$k \leqq n^2 + n\sqrt{n^2 - 1},$$

která je splněna právě pro $k \in \{1, 2, \ldots, 2n^2 - 1\}$, neboť pro druhý sčítanec z pravé strany poslední nerovnosti zřejmě platí celočíselné odhady

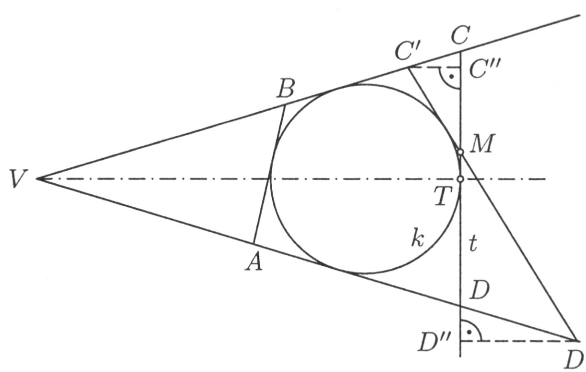
$$n^2 - 1 \leqq n\sqrt{n^2 - 1} < n^2$$

(znovu využíváme pouze nerovnost $\sqrt{n^2 - 1} < n$). Všechna řešení dané rovnice jsou tvaru $x = k/n$ a tvoří tak množinu zlomků

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n^2 - 1}{n}\right\}.$$

B – II – 4

Kružnice vepsaná hledanému čtyřúhelníku je kružnicí k připsanou straně AB trojúhelníku BAV. Ten ze dvou průsečíků osy úhlu AVB s kružnicí k, který je dál od vrcholu V, označme T (obr. 22). Hledané body C a D nalezneme jako průsečíky tečny t v bodě T ke kružnici k po řadě s přímkami VB, VA. Dokažme, že takto sestrojený čtyřúhelník má ze všech čtyřúhelníků vyhovujících podmínkám úlohy nejmenší obsah.



Obr. 22

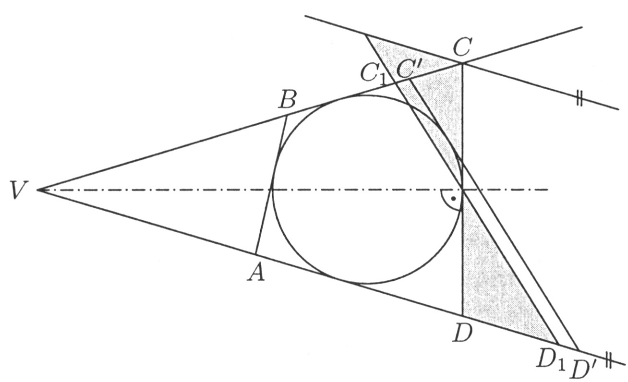
Označme C', D' vrcholy jiného tečnového čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí k (přímka $C'D'$ je tečnou kružnice k). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že průsečík M tečen t a $C'D'$ leží uvnitř úsečky TC.

To znamená, že platí $|MD| > |MC|$ (obr. 22). Označme C'' a D'' odpovídající paty kolmic spuštěných z bodů C' a D' na přímku t; bod C'' leží uvnitř úsečky MC a D'' na polopřímce MD vně úsečky MD, takže $|MC''| < |MC| < |MD| < |MD''|$ a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $MC'C''$ a $MD'D''$ plyne $|C'C''| < |D'D''|$. Trojúhelník DMD' má tudíž větší obsah než trojúhelník CMC'. Rozdíl jejich obsahů je však roven rozdílu obsahů čtyřúhelníků $ABC'D'$ a $ABCD$, tedy obsah čtyřúhelníku $ABC'D'$ je větší než obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení označme C, D průsečíky tečny t připsané kružnice k s rameny úhlu VB, VA. Jsou-li C', D' vrcholy jiného tečnového čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí k, platí pro obsahy tečnových čtyřúhelníků $ABCD$ a $ABC'D'$

$$S(ABCD) = S(VCD) - S(VAB),$$
$$S(ABC'D') = S(VC'D') - S(VAB).$$

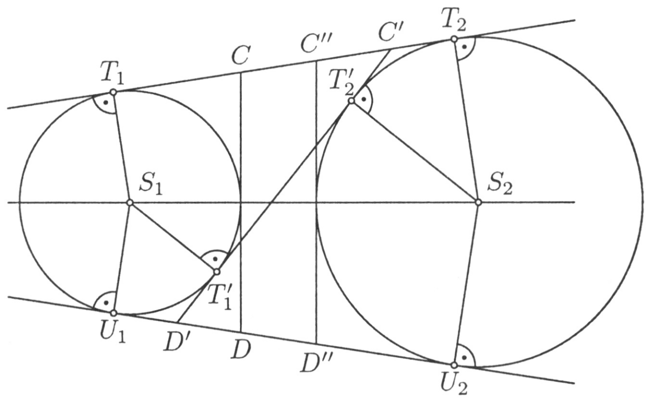
Stačí tedy ukázat, že pro libovolnou takovou tečnu $C'D'$, která není kolmá na osu úhlu AVB, platí $S(VC'D') > S(VCD)$. To je však zřejmé z obr. 23 (oba šedé trojúhelníky mají díky středové souměrnosti stejný obsah a přitom $S(VC'D') > S(VC_1D_1) > S(VCD)$).



Obr. 23

Jiné řešení. Obsah tečnového čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vepsaná kružnice má poloměr r, je $S = \frac{1}{2}r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) = \frac{1}{2}r(2|AB| + 2|CD|) = r(|AB| + |CD|)$. Obsah tečnového čtyřúhelníku $ABCD$ splňujícího podmínky úlohy bude tedy nejmenší, právě když bude nejkratší úsečka CD.

Uvažujme kružnici připsanou straně $C'D'$ trojúhelníku $VC'D'$ (obr. 24). Z vlastností tečen postupně nahlédneme, že je $|T_1C| = \frac{1}{2}|CD|$,



Obr. 24

$|T_2C''| = \frac{1}{2}|C''D''|$ a také $|C'D'| = |T_1T_2|$. Poslední rovnost plyne ze známých vlastností vepsané a připsané kružnice, totiž že jejich body dotyku na společnou stranu jsou souměrně sdružené podle středu strany; důkaz ovšem vyžaduje trochu počítání:

$$|T_1T_2| = |T_1C'| + |C'T_2| = |T_1'C'| + |C'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'|,$$
$$|U_1U_2| = |U_1D'| + |D'U_2| = |T_1'D'| + |D'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_1'D'|.$$

Ze souměrnosti podle osy úhlu AVB plyne $|T_1T_2| = |U_1U_2|$, takže $|T_2'C'| = |T_1'D'|$. Je tedy $|C'D'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'| = |T_1T_2|$.

Protože obě kružnice jsou odděleny společnou tečnou $C'D'$, nemohou se dotýkat, takže $|CD| < |C''D''|$, neboli $|CT_1| < |C''T_2|$. To znamená, že je

$$|CD| = 2|T_1C| < |T_1C| + |C''T_2| < |T_1T_2| = |C'D'|,$$

což jsme chtěli dokázat.